

Семинар 0 (06.02.2028):

1) Упр 2 из ANTO

2) Упр 3 из ANTO

3) * а) Описать все простые m -н в $\mathbb{Z}[i]$

б) используя а) найти и доказать критерий

представимости НБ. числа в виде суммы

двух квадратов

Зачет 1 (13.02.2025):

1) Пусть F -поле. u $R = \{ \frac{f}{g} \mid f, g \in F[x-u], g(u) \neq 0 \}$,

где $a = \text{const} \in F^*$. Δ -те, что R локально.

2) F -поле, $\{R_i\}$ - семейство локальных колец R_i в F .

Δ -те, что $\cap R_i$ локально

3) $d \in \mathbb{Q}^*$ квадрат или не квадрат. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Δ -те, что при $d \equiv 1(4)$ R не гауссов. локально

и т.д.

4^б) Докажем, что в кольце $\mathbb{Z}[x]$ простые д. дел.
взаимно перпендикулярны

а) $f(x) = (x - c_1) \dots (x - c_n) - 1$, где c_i - разл. целые
числа

б) $g(x) = (x - c_1) \dots (x - c_n) + 1$, где c_i - разл. целые
и $n \geq 4$

в) Если $\overline{g(x)}$ ^{не простое} из б) не простое, тогда $n \geq 4$

Семинар 2 (20.02.2025):

1) Упр 2 из лекции ANT 2

2) Пусть $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$, $\beta = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Найти $\chi_{E/\mathbb{Q}}^{\beta}(t)$ и $\chi_{E/\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}^{\beta}(t)$.

3)* $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Найти все сопряженные э-ты к $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Зачет 3 (27.02.2025)

1) Для $m, n \in \mathbb{Z}$ свод. от кл-ров. Того

$$\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \Leftrightarrow m=n.$$

2) Найти диск ($\mathbb{Q}[\varepsilon]/\mathbb{Q}$), где ε — куб. корень $x^3=1$.

3) Для 2 и 3 решить АНТЗ

4)* Для 3 и 3 решить АНТЗ.

Семинар 4 (06.03.2025)

1) БУДУТ ли следующие области колыА

а) $\mathbb{Z}$ б) $\mathbb{Q}$ в) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ г) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

г) $\overline{\mathbb{Z}}$ — целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$

д) $F[x^2, x^3]$, где F — поле?

2) Пусть A — обл. целых чисел, L — кон. расщ. $K = \mathbb{Q}(A)$,

$B = \overline{A}^L$ — целое зам. A в L . Если S — мультипл.

мн-во в A , то $B_S = \overline{A_S}^L$, т.е. локализация

B_S — целое замыкание локализации A_S в L .

3)* Прочитать § 2. Числ. в гл. 6 [Кос 1]
о дискр. и результате двух рн-ков

4) При каких значениях λ

а) мн-мн $t^3 - \lambda t + 2$ и $t^2 + \lambda t + 2$ имеют
общий корень?

б) мн-и $t^3 - 3t + \lambda$ имеют краткий корень?

5) Вычислить дискриминант мн-ков

а) $t^n + a$

б) $t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1$

Семинар 5 (13.03.2025)

1) Пусть A - замкнуто, $K = \mathbb{Q}(A)$, L - кот. сеп. расщ. K
 $B = \bar{A}^L$, $0 \neq I \neq A \Rightarrow 0 \neq IB \neq B$.

2) У-р 3 из ANT 4

3) Найти унитарный базис в $\mathcal{O}_L$, если $L = \mathbb{Q}[\theta]$,
где θ - корень мн-ва:

а) $t^3 + 3t^2 + 4t - 1$

б) $t^3 - t + 4$

в) $t^3 + 3t - 2$

4) Показать, что в $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{C}}$ каждый простой идеал
максимален

5*) 1-го теорема Штейнсаберга: $\text{disc}(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}) \equiv 0, 1 \pmod{4}$

Укажем: а) пусть $x_1, \dots, x_n$ - элементы базиса $\mathcal{O}_L$,

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ - $\mathbb{Q}$ -вложения L в $\mathbb{C}$, где $n = [L:\mathbb{Q}]$

Заметим $\text{disc}(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}) = \det(T(x_i, x_j)) =$
 $= \det(\sigma_i(x_j))$ как $P-N$, где P - слагаемое
со "знаком плюс", N - слагаемое со "знаком минус"

б) ж-те, что $P+N, PN \in (\mathbb{Q})$

в) г-те, что $P+N, PN \in \mathbb{Z}$

2) Завершим доказ-во

Семинар 6 (20.03.2025)

- 1) Укажите ли гомоморфизм колец $B : B \supseteq \mathbb{Z}$
 P - простой идеал в B и $P \cap B = 0$?
- 2) $P \trianglelefteq A$, $I, J \trianglelefteq A$. Докажите, что $I \cap J \subseteq P \Rightarrow$
 $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$.
- 3) Пусть I, J, K - идеалы гомоморфизма колец A . Докажите, что
 $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$ и $I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K)$.
- 4) $I \trianglelefteq A$. Докажите, что $\exists I' - \text{вз. пр. с } I : I \cdot I' =$
 — идеал
- 5) Пусть A - сг. $K \supseteq \mathbb{Q}(A)$, L — кон. сеп. расщ. K ,
 $B = \overline{A}^L$, $I_1, I_2 \trianglelefteq A$. Докажите $I_1 B = I_2 B \Leftrightarrow I_1 = I_2$.

Семинар 7 (27.03.2025)

1) $\forall$ из 1 и 3 АНТ?

2) Разложить $\mathbb{Z}_L$ на простые идеалы в $\mathcal{O}_L$,
где а) $L = \mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ б) $L = \mathbb{Q}[\sqrt{13}]$.

3) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, m -есть своб. от квадратов $\neq 1$.
Разложить (в зав от m) на простые в $\mathcal{O}_L$
идеал $I = 2\mathbb{Z}$.

4*) $\forall$ из 2 и 3 из АНТ?

Семинар 8 (03.04.2028)

1) Решить пересл. задачу из контр. работы:

2) Пусть p - простое число, $L = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$

Дока-н, что $p \nmid \mathcal{O}_L = (\mathcal{O}, \sqrt{m})^2 \Leftrightarrow p \nmid m$

$p \nmid \mathcal{O}_L = P_1 P_2$, если m - квадрат $\bmod p$

$p \nmid \mathcal{O}_L = P$ - простое $\Leftrightarrow m$ - не квадрат $\bmod p$.

Семинар 9 (10.04.2025)

1) Проверьте, что 5987 — простое и найдите $\left(\frac{3766}{5987}\right)$

2) Докажите, что $x^2 + 3 \equiv 0(p)$ имеет решение $\Leftrightarrow p \equiv 1(3)$.

3) $\forall$ из ANT 9

4) Разложите на простые $3 \nmid O_L$ в $L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

5) Пусть $p \nmid a$ и $4 \nmid p$. Докажите, что число решений
уравнения $ax^2 + bx + c \equiv 0(p)$ равно $1 + \left(\frac{b^2 - 4ac}{p}\right)$.

Семестр 10 (17.04.2028)

- (1) $\Delta - \mathbb{R}$, что $L = \mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ факториально
- (2) Завершите gaps-во в Теореме Хейлберга:
 $m = -1, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163 \Rightarrow h_L = 1$.
- (3) Найти $\text{Cl}(O_L)$, где $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$.
- (4) Зад 1 из АНТ 10
- (5⁺) Пусть $p \equiv 1(4)$ -число. Докажите, что $p = a^2 + b^2$
где $a, b \in \mathbb{Z}$ с помощью Теоремы Милковской!

5)* Д-то, что ур-е $x^5 = y^2 + 2$ не имеет решений в целых числах, нося-но доказав

а) (x, y) - решение $\Rightarrow y$ кратно

б) для $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ показать $\mathcal{O}_L, h_L, \text{disc}(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})$ и $\mathcal{O}_L^*$.

в) Д-то, что $(y \pm \sqrt{2})$ вз. сопр. в $\mathcal{O}_L$.

г) Д-то, что $\exists z \in \mathcal{O}_L : z^5 = y + \sqrt{2}$

г) Замечая ред-го $y + \sqrt{-2} = (c + d\sqrt{-2})^5$, раскрыть скобки и сравнить коэффициенты. Произведя замену $x = c^2 + 2d^2$ ред-го и упростить уравнение.

Семинар 12 (15.05.2024)

1) Напишите $\Phi_{24}(x)$, $\Phi_{60}(x)$.

2) Пусть ζ — прим. корень n -ой ст. $\sqrt[n]{1}$. При каких условиях $\mathbb{Q}[\zeta]$ и $\mathbb{Q}$ являются расщеплением $\mathbb{Q}[\zeta]$: $\mathbb{Q}$ — галуисовское, (т.е. его группа Галуа — абелева)?

Указание а) Δ -те, что $\mathbb{Z}_n^* \cong (\mathbb{Z}_{p_1^{u_1}}^*) \times \dots \times (\mathbb{Z}_{p_s^{u_s}}^*)$, где $n = p_1^{u_1} \times \dots \times p_s^{u_s}$.

3) Δ -те, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists$ нек. число простых p таких, что $p \equiv 1(n)$.

Указание: От обратного. Пусть $p_1, \dots, p_s$ — все такие числа.

а) $\exists a \in \mathbb{Z} : \Phi(a, P) \neq \pm 1$, где $P = \prod_{i=1}^s p_i$.

Б) Для $t = anP$ рассмотрим простое $p \mid \Phi_n(t)$, тогда
 $n = \text{ord}_p t$, т.е. n - мин.: $t^n \equiv 1 (p)$.

В) Вывести из б) и в) Б).
