

Программа курса по алгебраической теории чисел для исследовательской группы

Лектор: проф. А. В. Васильев

2 семестр 2025-26 учебного года

0. Введение

Теорема Ферма для показателя 4 и метод бесконечного спуска (ЭДВ, § 1.4, 1.5). Квадратичные вычеты и невычеты конечного поля, множество квадратичных вычетов как ядро гомоморфизма; символ Лежандра и его свойства; квадратичный закон взаимности Гаусса (С, гл. 1).

1. Кольца целых алгебраических элементов

Идеалы кольца: главные, максимальные, простые. Область целостности, простота и неприводимость ее элементов; нётеровость кольца и разложимость его элементов; факториальность кольца, критерий факториальности (ВИН, гл. 9, § 2,7). Локальное кольцо, критерий локальности; мультипликативное множество, локализация кольца; теорема о соответствии между простыми идеалами области целостности и простыми идеалами её локализации, локальность локализации по простому идеалу (ГУБ, § 1.3). Целые элементы в расширении кольца и целые алгебраические числа, целое замыкание кольца, свойства целой зависимости; определение целозамкнутости, целозамкнутость целого замыкания области целостности в своем поле частных, теорема о целозамкнутости факториального кольца; понятие алгебраического числового поля и кольца его целых элементов (ГУБ, § 1.1,1.2; БШ, АлгДоп., § 4). Норма и след, их элементарные свойства; транзитивность функции следа, связь с минимальным и характеристическим многочленами; случай сепарабельного расширения и транзитивность нормы; критерий вырожденности формы следа (ГУБ, § 1.4; БУР, § 2.4). Теорема о целом базисе, дискриминант набора элементов, теорема о вычислении дискриминанта (ГУБ, § 1.5; БУР, § 2.4).

2. Дедекиндовы кольца

Определение дедекиндова кольца, дедекиндовость колец: кольца главных идеалов, целого замыкания дедекиндова кольца в его поле частных и локализации дедекиндова кольца (ГУБ, § 2.1; БУР, § 3.1). Теорема о целозамкнутой нётеровой области целостности с единственным простым идеалом и структура идеала фактор-кольца дедекиндова кольца по степени простого идеала (ГУБ, § 2.2). Взаимная простота идеалов и китайская теорема об остатках; основная теорема арифметики для дедекиндовых колец и ее следствия (ГУБ, § 2.2; БУР, § 3.2). Дробные идеалы дедекиндова кольца и их свойства; группа дробных идеалов и группа классов; факториальность кольца целых алгебраического поля и число классов этого поля (ГУБ, § 2.3; БУР, § 3.2). Разложение идеала в

расширении, критерий вхождения простого идеала расширения в разложение; индексы ветвления и инерции, фундаментальное тождество для разложения идеала в расширении и его частный случай для расширения Галуа; теорема Дедекинда–Куммера, критерий разветвляемости простого идеала в расширении (в условиях ТДК) (ГУБ, § 2.4). Норма идеала и ее свойства, теорема о связи норм главного идеала и элемента; считающая норма идеала в кольце целых алгебраических чисел (ГУБ, § 2.5; БУР, § 3.3).

3. Конечность группы классов

Решетка как дискретная подгруппа, полная решетка и ее объем, теорема Минковского; объем полной решетки, натянутой на целый базис алгебраического числового поля через его дискриминантный идеал, теорема Брилля и оценка считающей нормы идеала; теорема о конечности числа классов и ее следствия; теорема Эрмита о дискриминанте (ГУБ, гл. 3; БУР, гл. 4).

4. Группа единиц алгебраического числового поля и теорема Ферма для регулярных простых показателей

Критерий обратимости целого алгебраического числа; логарифмическое вложение группы единиц, его образ и ядро; теорема Дирихле (ГУБ, гл. 4; БУР, § 5.1).

5. Круговые поля и теорема Ферма для регулярных простых показателей

Круговые многочлены и их свойства; кольцо целых кругового поля и его единицы (ГУБ, § 5.1-5.3; СТ, § 3.2). Теорема Ферма для показателя 3 (АР, гл. 17, § 8, БУР, гл. 1). Регулярные простые числа, теорема Ферма для регулярных простых показателей (ГУБ, § 5.4; БУР, § 7.3; БШ, гл. 5, § 7.1).

Основная литература

- [ANT] А. В. Васильев. Записи лекций, <http://old.math.nsc.ru/~vasand/teaching.html>.
- [ГУБ] В. Ю. Губарев. Конспект лекций по алгебраической теории чисел. 2022.
- [БУР] D. Burde. Algebraic number theory, Lecture notes. 2022.
- [СТ] I. Stewart, D. Tall. Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem. 2001.

Дополнительная литература

- [АР] К. Айерленд, М. Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.
- [БШ] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.
- [ВДВ] Б. Л. ван дер Варден. Алгебра. — М.: Наука, 1976.
- [ВЛМ] А. В. Васильев, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: конспект лекций. — Новосибирск: Изд. Института математики, 2020.
- [ВИН] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.
- [КОС1] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры: Учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [КОС2] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [КОС3] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры: Учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [КЗ] Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [ЛА] С. Ленг. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
- [ЛАЧ] С. Ленг. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1972.
- [ПСШ] А. П. Пожидаев, С. Р. Сверчков, И. П. Шестаков. Лекции по алгебре: Учебное пособие для студентов 1 курса ММФ НГУ. Ч. 1,2. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2011.
- [РКБ] Н. С. Романовский, П. С. Колесников, А. А. Бутурлакин. Теория Галуа. Учебно-метод. пособие — Новосибирск: Изд. НГУ, 2023.
- [С] Ж.-П. Серр. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.
- [Ф] Д. К. Фаддеев. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
- [ФС] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977.
- [ЭДВ] Г. Эдвардс. Последняя теорема Ферма: генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. — М.: Мир, 1980.
- [ЯН] Г. Дж. Януш. Алгебраические числовые поля. — Новосибирск: Научная книга, 2001.
- [АШ] R. B. Ash. A Course In Algebraic Number Theory. 2003.
- [ЭРМ] J. Esmonde, M. Ram Murty. Problems in Algebraic Number theory. 2005.
- [МИЛ] J. S. Milne. Algebraic Number Theory (v3.08). 2020.