V ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ЗНАНИЙ

Витяев Е.Е.

Конструктивные числовые представления величин[1]

В работе числовые представления величин, законов и информации обобщаются до конструктивного числового представления, которые могут использоваться для числового представления структурных величин и законов. Показывается, что тесты и анкеты, используемые в психологии и социологии, могут рассматриваться как примеры конструктивных числовых представлений. В другой работе данного раздела, информация, извлекаемая из данных, представляется эмпирическими системами, использующими, интерпретируемые в системе понятий предметной области, отношения и операции. Эта информация о величинах и законах представляет собой истинное содержание величин и законов и может быть адекватно представлена числовыми представлениями величин (шкалами), используя результаты теории измерений. Но не для всякой информации в теории измерений есть результаты о числовом представлении. Для представления информации, не имеющей числового представления в теории измерений, можно использовать конструктивные числовые измерения, которые могут представить практически любую информацию.

Ключевые слова: *Data Mining, естественная классификация, систематика, классификация, KDD&DM, интеллектуальный анализ данных.*

1. Введение. Исследования, проводимые в психологии, социологии, принятии решений, экспертном оценивании и других областях, показывают, что есть много сложных структурных «нечисловых» величин (частичные порядки, толерантности, решетки и т.д.). Логический анализ таких величин, проведенный в теории измерений [Пфанцагль, 1976; Krantz D.H. at al, 1971, 1989, 1990], теории принятия решений [Фишберн П., 1978; Кини Р.Л., Райфа Х., 1981] и анализе нечисловой информации [Всесоюзная, 1983; Всесоюзная, 1984; Анализ, 1981], показал, что *информация*, содержащаяся в таких величинах, может быть представлена эмпирическими системами. Однако эти эмпирические системы являются такими алгебраическими структурами, которые нельзя сильным гомоморфизмом отобразить в поле вещественных чисел, т.е. для таких величин нельзя построить числовые представления в рамках теории измерений.

С другой стороны, числовые представления величин «удобны» - по числовым значениям величин легко определять исходные (в эмпирической системе) соотношения между значениями величин. Поэтому для *корректного числового представления информации*, содержащейся в величинах и данных необходимо найти более общий способ числового представления величин, чем существующий в теории измерений.

Рассмотрим смысл и роль числового представления. Смысл состоит в том, чтобы значениям величин приписать числа так, чтобы исходные отношения и операции преобразовывались в некоторые «простые» и «удобные» числовые отношения и операции. В этом случае по значениям числовых отношений и операций легко определяются значения исходных отношений и операций. Однако, числовые представления обладают следующими недостатками.

1. В качестве числовых отношений и операций используется небольшое число математических действий. Этого достаточно для числового представления многих величин [Пфанцагль, 1976; Krantz D.H. at al, 1971, 1989, 1990], но это не даёт возможность представить многие другие (структурные) величины.
2. Доказательство того, что любая эмпирическая система, удовлетворяющая системе аксиом, сильным гомоморфизмом отображается в выбранную числовую систему, предъявляет слишком сильные требования к системе аксиом. Приходиться включать в неё аксиомы, не поддающиеся экспериментальной проверке, а также «чисто технические» аксиомы, не изменяющие множества экспериментально проверяемых следствий [Пфанцагль, 1976]. Это противоречит содержанию систем аксиом, как результата экспериментального анализа свойств величин. Такие аксиомы часто отражают свойства числовой системы, а не свойства величин.

Смыслу числового представления точнее всего соответствует понятие конструктивизации [Ершов Ю.Л., 1980] эмпирических систем. В этом случае значения величин отображаются в натуральные, рациональные или другие числа (в общем случае в коды), при этом значения отношений и операций в эмпирической системе можно эффективно вычислить по этим числам (кодам).

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 08-07-00272-а; интеграционными проектами СО РАН № 47, 115, 119, а также работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-335.2008.1)

Это даёт возможность обобщить понятие числового представления и распространить его на структурные и практически любые другие величины и законы. В данной работе вводится понятие конструктивного числового представления, которое может использоваться для числового представления структурных «нечисловых» величин. Конструктивные числовые представления практически не накладывают ограничений на числовые отношения и операции, кроме эффективности и предъявляет более слабые требования к системам аксиом.

2. Основные понятия теории измерений. Пусть знания о некоторой величине, свойстве, признаке сформулированы в некоторой теории Σ сигнатуры $\Omega = \{P_0, ..., P_n, \rho_1, ..., \rho_m, c_0, c_1, c_2, ...\}$, где P_i, $i \le n$ – предикатные символы; ρ_j, $j \le m$ – символы операций; c_l, $l \in I$ – символы констант ($I = \varnothing$ | I – начальная часть ряда натуральных чисел $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ | $I = \omega$); P_0 – равенство. Величиной будем называть эмпирическую систему $\Im = \langle A; \Omega_\Im \rangle$ сигнатуры Ω, удовлетворяющую некоторой системе аксиом Σ; A – множество значений величины, $\Omega_\Im = \{P_0^\Im, ..., P_n^\Im, \rho_1^\Im, ..., \rho_m^\Im, c_0^\Im, c_1^\Im, c_2^\Im, ...\}$ – множество отношений, операций и констант типа Ω, интерпретируемых в понятиях предметной области. Числовыми системами называются системы $\Re = \langle Re^k, \Omega_R \rangle$ сигнатуры Ω, где к – размерность числового представления, $\Omega_\Re = \{=, P_1^\Re, ..., P_n^\Re, \rho_1^\Re, ..., \rho_m^\Re, c_0^\Re, c_1^\Re, c_2^\Re, ...\}$ – множество отношений, операций и констант, определенных на Re или Re^k, Re – поле вещественных чисел. Зафиксируем некоторую числовую систему $\Re$. Шкалой [1] (числовым представлением) величины $\Im = \langle A; \Omega_\Im \rangle$ называется сильный гомоморфизм μ: $A \to Re^k$, удовлетворяющий условиям:

1. $P_i^\Im(a_1, ..., a_{m_i}) \Leftrightarrow P_i^\Re(\mu a_1, ..., \mu a_{m_i})$, $i = 0,1,\ldots,n$;
2. $\rho_j^\Im(a_1, ..., a_{m_j}) \Leftrightarrow \mu\rho_j^\Re(\mu a_1, ..., \mu a_{m_j})$, $j = 1,\ldots,m$;
3. $\mu c^\Im{}_l = c^\Re{}_l$, $l \in I$.

Сильный гомоморфизм μ: $\Im \to \Re$ означает, что, если предикат $P_i^\Re(\mu a_1, ..., \mu a_{m_i})$ истинен на некотором наборе $\langle \mu a_1, ..., \mu a_{m_i} \rangle$, то существует набор $\langle b_1, ..., b_{m_i} \rangle$, $\mu a_1 = \mu b_1, ..., \mu a_{m_i} = \mu b_{m_i}$, на котором предикат $P_i^\Im(b_1, ..., b_{m_i})$ также истинен. Введем обозначения. AC(Σ) – множество неприводимых (алгебраических) систем системы аксиом Σ; $AC_\aleph(\Sigma)$, $AC_\omega(\Sigma)$ – подмножества AC(Σ), содержащие системы не более чем континуальной и счетной мощности соответственно; $F(\Im,\Re)$ – множество шкал величины $\Im$. В теории измерений исследуются три основные проблемы [Пфанцагль, 1976; Krantz D.H. at al, 1971, 1989, 1990].

2.1. **Проблема существования**. Для данной системы аксиом Σ величины найти достаточно простую и удобную числовую систему $\Re$ (например, поле вещественных чисел) и доказать, что для любой величины $\Im \in AC_\aleph(\Sigma)$ существует шкала ($F(\Im,\Re) \ne \emptyset$}.

Из формулировки проблемы существования следует, что знаний Σ должно быть достаточно для выбора числовой системы $\Re$ и построения шкалы для любой системы $\Im \in AC_\aleph(\Sigma)$. Решение проблемы существования должно, кроме того, давать метод шкалирования приборов, измеряющих эти величины. Этот метод может быть извлечен из доказательства теоремы существования.

2.2. **Проблема единственности**: Для выбранной числовой системы $\Re$ определить все шкалы $F(\Im,\Re)$ величин $\Im \in AC_\aleph(\Sigma)$.

Таблица 1. Числовые типы данных.

Допустимые преобразования	Группы допустимых преобразований	Шкалы
$x \to f(x)$,	f: Re → (на) Re, Взаимно-однозначные преобразования	Номинальная (наименований)
$x \to f(x)$,	f: Re → (на)Re монотонные преобразования	Порядка
$x \to rx + s$, $r > 0$	Позитивная аффинная группа	Интервалов
$x \to tx^r$, $t, r > 0$	Степенная группа	Логарифмически-интервальная
$x \to x + s$	Группа сдвига	Разностей
$x \to tx$, $t > 0$	Группа подобия	Отношений
$x \to x$	Тождественная группа	Абсолютная

Эти множества можно, в частности, определить, найдя группу допустимых преобразований шкалы [Пфанцагль, 1976]. Обозначим через $\Gamma(\Re)$ – группу автоморфизмов числовой системы $\Re$ на себя. Известно, что, если $\mu \in F(\Im,\Re)$, то и $\gamma\mu \in F(\Im,\Re)$, $\gamma \in \Gamma(\Re)$ тоже шкала. Группа $\Gamma(\Re)$ называется *группой допустимых преобразований шкалы* $F(\Im,\Re)$.

2.3. **Проблема адекватности**. Числовые утверждения должны быть инвариантны относительно произвола в выборе шкал из $F(\Im,\Re)$ (см. [Пфанцагль, 1976]). Методы анализа данных также должны быть инвариантны относительно групп допустимых шкал – изменение шкал величин в данных не должно изменять результаты анализа данных, проведенных тем или иным методом.

Решение этих проблем позволяет корректно вводить числовые представления величин и в определенной степени корректно их использовать. Однако, анализ методов интеллектуального анализа данных показывает, что они как правило не инвариантны – мы можем обработать некоторым методом данные, измеренные в сантиметрах, килограммах, скорости – метров в секунду, а затем перевести эти данные в метры, граммы и скорости – сантиметров в секунду и получить совершенно другой результат анализа – не болен, а здоров.

3. Конструктивные числовые представления величин. При конструктивном представлении величин, значения $a \in A$ величин $\Im = \langle A;\ \Omega_\Im\rangle \in AC_\omega(\Sigma)$ нумеруются (кодируются). Нумерацией множества A называется отображение ν множества натуральных чисел $\omega = \{0,1,2,\ldots\}$ на A, ν: $\omega \to$ A [Ершов Ю.Л., 1980]. Пару $(\Im,\nu)$ будем называть конструктивным представлением величины $\Im$ (конструктивной системой [Ершов Ю.Л., 1980]), а нумерацию ν – конструктивным числовым представлением (конструктивизацией [Ершов Ю.Л., 1980]), если существуют характеристические общерекурсивные функции $P_0^N, P_1^N, \ldots, P_n^N$ со значениями во множестве $\{0,1\}$, общерекурсивные функции $\rho_1^N, \ldots, \rho_m^N$ и натуральные числа $c_0^N, c_1^N, c_2^N, \ldots$ такие, что

1. $P_i^\Im(\nu a_1, \ldots, \nu a_{m_i}) \Leftrightarrow P_i^N(a_1, \ldots, a_{m_i}) = 1$, $i = 0,1,\ldots,n$;
2. $\rho_j^\Im(\nu a_1, \ldots, \nu a_{m_j}) \Leftrightarrow \nu\rho_j^N(a_1, \ldots, a_{m_j})$, $j = 1,\ldots,m$;
3. $c^\Im{}_l = \nu c^N{}_l$, $l \in I$.

Конструктивное числовое представление ν аналогично шкале, только вместо числовых отношений, операций и констант используются общерекурсивные функции и натуральные числа. Конструктивная числовая система имеет вид $N = \langle\omega;\ \Omega_N\rangle$, $\Omega_N = \{P_0^N, P_1^N, \ldots, P_n^N, \rho_1^N, \ldots, \rho_m^N, c_0^N, c_1^N, c_2^N, \ldots\}$. Сформулируем проблемы существования, единственности и адекватности для конструктивного числового представления.

3.1. **Проблема существования.** Доказать, что для любой системы $\Im \in AC_\omega(\Sigma)$ существует конструктивное числовое представление и существует алгоритм ограниченной сложности, реализующий построение всех этих конструктивизаций. Практически требуется алгоритм минимальной сложности.

3.2. **Проблема единственности**. Ее можно разбить на две части. Первая связана с существованием не сводимых друг к другу посредством эффективного отображения (неавтоэквивалентных [Гончаров С.С., 1980]) конструктивных числовых представлений.

Проблема единственности А. Для каждой величины $\Im = \langle A;\ \Omega_\Im\rangle \in AC_\omega(\Sigma)$ определить число неавтоэквивалентных конструктивных числовых представлений.

Вторая часть проблемы единственности так же, как и в случае числовых представлений, связана с произволом в выборе одного из автоэквивалентных конструктивных числовых представлений.

Проблема единственности Б. Для каждой величины $\Im = \langle A;\ \Omega_\Im\rangle \in AC_\omega(\Sigma)$ определить все классы автоэквивалентных конструктивных числовых представлений.

3.3. **Проблема адекватности**. Она также разбивается на две части в зависимости от того, какой произвол в выборе конструктивных числовых представлений нужно учитывать.

Проблема адекватности А. Выбор класса автоэквивалентных числовых представлений должен учитывать имеющиеся знания Σ.

Проблема адекватности Б. Числовые утверждения должны быть инвариантны относительно выбора одного из автоэквивалентных конструктивных числовых представлений.

Для конструктивных числовых представлений, очевидно, что метод интеллектуального анализа данных будет инвариантен только тогда, когда он не использует в своей работе числовые отношения и операции отличные от тех, которые содержатся в эмпирической системе.

4. Примеры конструктивных представлений величин.

4.1. Рассмотрим линейный порядок. Знания Σ о линейном порядке содержат аксиомы антисимметричности, полноты и транзитивности. Линейными порядками являются, например, балльные величины и величины типа «число»: число рабочих на предприятии, число автокатастроф, число браков или разводов и т.д. Значения таких величин часто представляются натуральными числами, поэтому их естественным числовым представлением может быть конструктивное числовое представление. Рассмотрим линейные порядки, удовлетворяющие следующей аксиоме.

Аксиома 1. Любая ограниченная сверху (снизу) последовательность $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a$ ($a < \ldots < a_3 < a_2 < a_1$) конечна.

Обозначим систему аксиом Σ линейного порядка вместе с аксиомой 1 через Σ_1. Известно, что любой линейный, но не более чем счетный порядок, удовлетворяющий теории Σ_1, вложим в модель $\langle \omega; \leq \rangle$. Отсюда следует решение проблемы существования конструктивного числового представления для линейных порядков Σ_1.

Предложение 1. Любой линейный порядок $\Im \in AC_\omega(\Sigma_1)$ имеет конструктивное числовое представление.

Конструктивными числовыми представлениями могут служить обычные способы нумерации значений этих величин.

Рассмотрим линейные порядки, удовлетворяющие аксиоме полноты.

Аксиома 2. $\forall a,b,\exists c(a < c < b)$.

Обозначим через Σ_2 систему аксиом линейного порядка вместе с аксиомой 2. Примерами полных линейных порядков, удовлетворяющих Σ_2, являются физические величины, используемые в нефизических областях. Например, величины температуры, давления, веса человека, рассматриваемые с медицинской точки зрения, или температуры, освещенности, влажности почвы, рассматриваемые с сельскохозяйственной точки зрения. Для этих величин операция сложения (имеющая смысл с физической точки зрения) смысла не имеет. Осмысленно только отношение порядка, являющееся полным линейным порядком. Такой порядок естественно представлять не действительными, а рациональными числами.

Получим конструктивное числовое представление полных линейных порядков, используя рациональные числа. Известно, что любой полный, не более чем счетный линейный порядок $\Im \in AC_\omega(\Sigma_2)$, изоморфен одному из интервалов (0,1), [0,1), (0,1], [0,1] множества рациональных чисел.

Предложение 2. Любой полный линейный порядок $\Im \in AC_\omega(\Sigma_2)$ имеет конструктивное числовое представление.

Примерами конструктивных числовых представлений могут служить градации шкал приборов, измеряющих эти величины.

Рассмотрим деревья – рефлексивные, антисимметричные, транзитивные порядки, удовлетворяющие следующей аксиоме.

Аксиома 3. $\forall a,b,c(c \leq a \,\&\, c \leq b \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a)$

Обозначим систему аксиом для деревьев через Σ_3. Конечными деревьями описываются такие величины, как должность, занимаемое место (в дереве рабочих мест некоторой организации), иерархические величины и т.д. Конечные деревья всегда конструктивизируемы, поэтому решение проблемы существования конструктивного числового представления сводиться к построению простой и удобной конструктивизации, применимой к любому конечному дереву. Пример такого конструктивного числового представления приведен на рис. 1.

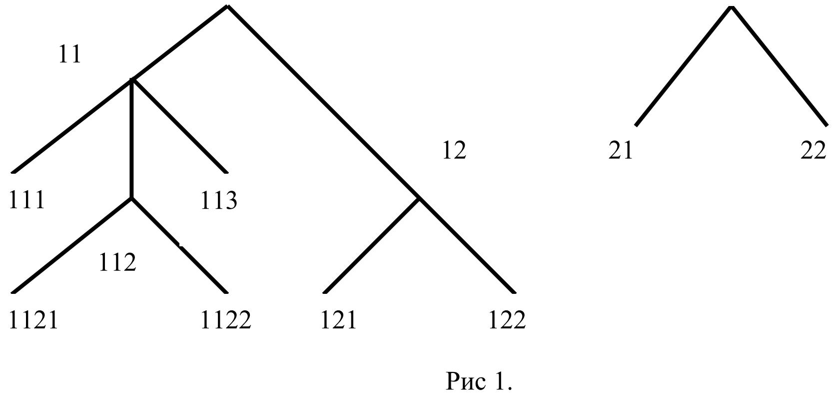

Рис 1.

Если у дерева несколько корневых вершин, то они нумеруются числами 1, 2, 3, ... Вершинам дерева (значениям величины) сопоставляются наборы натуральных чисел $a = \nu(\langle n^a_1,\ldots, n^a_k\rangle)$, $b = \nu(\langle n^b_1,\ldots, n^b_m\rangle)$. По числам из набора легко определяется отношение порядка между a и b.

Закономерные связи между конструктивными числовыми представлениями также должны задаваться общерекурсивными функциями. Например, закономерная связь между древовидными величинами – занимаемое место, должность; балльными величинами – степень, звание; полно линейно упорядоченной величиной – зарплата, определяется законодательством и может быть представлена общерекурсивной функцией.

5. Конструктивные измерительные процедуры, тесты и анкеты. Шкалы $\mu: \Im \to \Re$ практически реализуются в виде шкал приборов (весов, линейки, термометра). Конструктивизации ν также могут реализовываться как показания некоторых измерительных процедур, в частности тестирования, анкетирования, обследования и т.д.

Предположим, что нас интересует отношение предпочтения некоторой величины $\Im = \langle A; \le\rangle$ (коэффициента интеллектуальности, удовлетворенности работой, температура) и способ прямого измерения отношения предпочтения $\le$ дорог, неудобен, требует большого времени и т.д. Для более простого и быстрого измерения этого отношения разрабатывается и используется тест (анкета, обследование). Применение теста к испытуемому (респонденту, больному) даёт для некоторого значения $a \in A$ величины $\Im$ набор ответов в виде некоторой последовательности натуральных или рациональных чисел $\langle n^a_1,\ldots, n^a_k\rangle$. Если по результатам теста для любых двух значений $a, b \in A$ величины $\Im$ можно эффективно определить отношение предпочтения

$$a \le b \Leftrightarrow P^N(\langle n^a_1,\ldots, n^a_k\rangle,\langle n^b_1,\ldots, n^b_l\rangle)$$

например, подсчитывая сумму баллов, взвешенное среднее, кодируя ответы и т.д.), то отображение $\Im: \langle n^a_1,\ldots, n^a_k\rangle \to a$, осуществляемое тестом, и будет конструктивным числовым представлением величины $\Im = \langle A; \le\rangle$. Сама процедура тестирования (анкетирования, обследования) будет конструктивной измерительной процедурой со значениями вида $\langle n^a_1,\ldots, n^a_k\rangle$.

Обоснование теста как конструктивного числового представления некоторой величины может быть осуществлено решением следующей задачи. Пусть задано некоторое отношение предпочтения $\le$ величины $\Im = \langle A; \le\rangle$, удовлетворяющее некоторой системе аксиом Σ (частичного порядка, толерантности, решеток и т.д.). Требуется решить проблему существования конструктивного числового представления ν для этой величины и затем для неё разработать тест, измеряющий конструктивное числовое представление ν. Мы не можем сразу строить конструктивное числовое представление ν для исходной величины $\Im$, так как она известна нам только с точностью до системы аксиом Σ. Поэтому, решить проблему существования конструктивного числового представления нужно опираясь на $AC_\omega(\Sigma)$.

Примером такого отношения предпочтения и соответствующего теста является отношение предпочтения между односемейными домами [Козелецкий Ю., 1979, с.243]. В результате получения конструктивного числового представления, мы получаем также набор базовых признаков, по которым производится сравнение.

Пусть $\Im = \langle A; \le \rangle$ - эмпирическая система односемейных домов. Предположим, что отношение порядка $\le$ удовлетворяет аксиомам дистрибутивной решетки:

1. $\le$ - решетка, т.е. любые два элемента $a,b \in A$ имеют точную верхнюю и точную нижнюю грань обозначаемые операциями $a\vee b$ и $a\wedge b$;
2. дистрибутивность: a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$,
   b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee z) \wedge (x \vee y)$.

Цепью упорядоченного множества называется его линейно упорядоченное подмножество. Длинной упорядоченного множества называется точная верхняя грань длин его цепей. Элемент $a \ne \varnothing$ называется $\vee$ - неразложимым, если из $b\vee c = a$ следует, что $b = a$ или $c = a$.

Теорема [Биркгоф, 1984**]**. Пусть L – дистрибутивная решетка длины n. Тогда подмножество X всех ее $\vee$ - неразложимых элементов имеет порядок n и $L \approx 2^X$ (где $\approx$ отношение изоморфизма).

Если упорядочить все неразложимые элементы решётки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, то из теоремы следует, что каждый элемент $\mathbf{a}$ дистрибутивной решетки L однозначно определим кортежем $\langle 0,1,1,0,\ldots,1,0\rangle$, в котором 1 стоит на тех i-х местах, для которых выполнено неравенство $\mathbf{a} \ge \mathbf{a}_i$. Тем самым неразложимые элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ определяют те базовые свойства, сравнение с которыми опреде-

ляет положение элемента в решетке. Определим конструктивное числовое представление как отображение $\nu : \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_a \rightarrow \mathbf{a}$.

Теорема. Для дистрибутивной решетки $L = \langle A; \leq, \wedge, \vee \rangle$ длины n существует конструктивное числовое представление $\nu : \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_a \rightarrow a$, удовлетворяющее условиям:

1. $a \leq b \Leftrightarrow \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_a \leq \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_b$
2. $a \vee b \Leftrightarrow \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_a \oplus \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_b$
3. $a \wedge b \Leftrightarrow \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_a \otimes \langle 0,1,1,0,\ldots,1,0 \rangle_b$

ЛИТЕРАТУРА

II Всесоюзная школа-семинар [Всесоюзная, 1983], «Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа». М., 1983. с.374

Анализ нечисловой информации [Анализ, 1981] ТюринЮ.Н., Литвак Б.Г., Оргов А.И. и др. М., 1981. с.80 (Препринт // Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»).

Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

Всесоюзная конференция [Всесоюзная, 1984], «Нечисловая статистика, экспертные оценки и смежные вопросы». М.-Таллин, 1984, 403с.

Гончаров С.С. Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций. Алгебра и Логика, 19, №6, 1980, с.621-639.

Данные в языках программирования [Данные, 1982]. Абстракция и типология. М., Мир, 1982, с.327.

Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М., Наука, 1980, с.415.

Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М. Радио и связь, 1981, с.560.

Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М., Прогресс, 1979, с.504.

Пфанцагль И. Теория измерений. М., Мир, 1976, с.248.

Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М, Наука, 1978, с.352.

Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. [Krantz D.H. et al, 1971, 1989, 1990] Foundations of measurement. Vol. 1,2,3. - NY, London: Acad. press, 1971, 1989, 1990.