УДК: 1:0001.8 + 16:0001.12 + 510

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ПАРАДОКСА ГУДМЕНА – ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПАРАДОКСА ГУДМЕНА В КАЖДОМ ИНДУКТИВНОМ АКТЕ УСИЛЕНИЯ ГИПОТЕЗ

Е.Е. Витяев, И.В. Хомичева.

АННАТАЦИЯ

Цель данной работы – показать универсальность парадокса Гудмена в том смысле, что он возникает при каждом акте усиления гипотез. Анализируя отрицательные результаты о существовании методов индукции, полученные в своё время Самохваловым и Витяевым, мы обнаружили, что в основе их лежит некоторый вариант парадокса Гудмэна. В работе доказательства упомянутых отрицательных результатов преобразуются в доказательства возникновения парадокса Гудмэна при каждом акте усиления гипотез. Отсюда следует, во-первых, наглядная демонстрация отрицательных результатов, во-вторых, связь их с литературой посвященной проблеме индукции и парадоксу Гудмэна и, наконец, доказательство того, что отрицательные результаты возникают везде и, значит, что это без решения этого парадокса и проблемы индукции, предсказания, получаемые существующими методами индукции, парадоксальны и бессмысленны.

Введение.

Проблема индукции является одной из наиболее старых и в то же время наиболее запутанных проблем. Самохвалов [1] предложил и исследовал наиболее общее формальное определение методов индукции вместе с набором необходимых требований, которым они должны удовлетворять. Необходимые требования определяются тем, что без их выполнения теряет смысл сама проблема индукции. Было доказано [1], что методов индукции, удовлетворяющих этим требованиям, не существует (за исключением вырожденных случаев). Тем самым получен отрицательный результат о существовании методов индукции, удовлетворяющих этим требованиям. В работе Витяева и Новикова [3] отрицательный результат был доказан для наиболее наглядного способа представления результатов экспериментов, когда они представляются точками в признаковом пространстве R^n.

Одним из основных необходимых требований к методам индукции является требование лингвистической инвариантности – инвариантности методов индукции к языкам, в которых они сформулированы (языкам представления гипотез и результатов экспериментов). Усиление гипотезы не должно зависеть от языка, в котором она сформулирована, а должно зависеть от результатов наблюдений и исходной гипотезы. Несмотря на очевидность этого требования, было доказано [1], что нет методов индукции ему удовлетворяющих.

Впервые зависимость методов индукции от языка заметил Гудмен в своем «новом парадоксе индукции» Гудмена. В работе [2] нами доказано, что парадокс индукции Гудмэна является частным случаем отрицательного результата. Однако Гудмен не сделал, да и не мог сделать на основании только своего парадокса, вывода, который следует из отрицательного результата – о невозможности инвариантных (удовлетворяющих требованию лингвистической инвариантности) методов индукции. Тем не менее, многие авторы, занимавшиеся этим парадоксом, достаточно хорошо понимали его радикальность и общность (см. обсуждение литературы относящейся к парадоксу в [2]).

$$
\begin{tikzcd}
 & pr^L_0 \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi"'] & = Obs^L(A), \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi"'] & F(\langle h^L_0, pr^L_0\rangle) \arrow[r] \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi"'] & h^L_1 \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi"'] \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & pr^Q_0 & = Obs^Q(A), & F(\langle h^Q_0, pr^Q_0\rangle) \arrow[r] & h^Q_1 \neq \varphi(h^L_1)
\end{tikzcd}
$$

Диаграмма.

Obs^L, Obs^Q – экспериментальные процедуры, записанные в двух различных языках L и Q, которые для любого множества объектов A порождают протоколы наблюдений pr^L_0, pr^Q_0;

h^L_0, h^Q_0 – начальные эмпирически эквивалентные гипотезы, записанные в двух различных языках L и Q, подтверждающиеся на протоколах pr^L_0, pr^Q_0;

h^L_1, h^Q_1 – усиленные методом индукции F гипотезы;

φ – преобразование языка L в язык Q, порождающее преобразования измерительных процедур, протоколов и гипотез.

Цель данной работы – показать универсальность парадокса Гудмена. Анализируя отрицательные результаты, мы обнаружили, что они основаны на некотором варианте парадокса Гудмэна. Из доказательств фактически следует, что парадокс Гудмена возникает при каждой попытке усиления гипотез.

Суть возникающего в отрицательных результатах парадокса представлена на приведенной ниже диаграмме. На ней представлены симметричные акты применения метода индукции F в двух различных языках, L и Q, такие, что исходные гипотезы эмпирически эквивалентны (т.е. наблюдение над одним и тем же множеством объектов одновременно подтверждает или опровергает их), в то же время "усиленные" гипотезы – нет. На диаграмме показаны две эмпирически эквивалентные цепочки применения метода индукции F в двух различных языках L и Q. Каждая цепочка включает следующие шаги:

- получить протокол эксперимента $pr_0 = Obs(A)$ (pr^L_0 в языке L и pr^Q_0 в языке Q) применением измерительной процедуры Obs к множеству объектов A. Измерительные процедуры $Obs^L(A)$ и $Obs^Q(A)$ фиксируют результаты измерения, записанные в двух различных языках L и Q;
- взять исходную гипотезу h_0 и записать её в языках L и Q (гипотезы h^L_0 и h^Q_0 эмпирически эквиваленты в том смысле, что они подтверждаются и опровергаются на одном и том же (с точностью до трансляции $\varphi: L \leftrightarrow Q$ языков) наборе протоколов);
- произвести усиление гипотез h^L_0 и h^Q_0 методом индукции F, используя исходную информацию в виде пар $\langle h^Q_0, pr^Q_0\rangle$, $\langle h^L_0, pr^L_0\rangle$;
- получить усиленные гипотезы h^Q_1, h^L_1;
- можно доказать (см. доказательства, приведённые в разделах 1,2), что полученные гипотезы h^Q_1, h^L_1 различны (при их сравнении с учетом преобразования φ) и порождают различные предсказания. Более того, как будет доказано, различные предсказания получаются при каждом усилении гипотез h^L_0 и h^Q_0.
- в результате получаем парадокс, состоящий в следующем:
    - если гипотезы h^L_0, h^L_1 отличаются, то существует протокол pr, который подтверждается гипотезой h^L_0, но опровергается гипотезой h^L_1;
    - тогда может быть построен язык Q и трансляция $\varphi: L \leftrightarrow Q$ языков такая, что протокол φ(pr) подтверждает гипотезу h^Q_1 в то время как он опровергает h^L_1 (и $\varphi(h^L_1)$);
    - в результате, на протоколе pr мы получаем противоречивые предсказания: если мы проводим усиление гипотезы методом индукции F в языке L, то этот протокол pr недопустим, если же мы проводим усиление в языке Q, то этот же протокол φ(pr) допустим.

Эта диаграмма иллюстрирует универсальность парадокса Гудмена.

Традиционно, индукция и, получающиеся на её основе предсказания, рассматриваются как объективные, однако диаграмма наглядно демонстрирует зависимость индукции и

предсказания от нашего субъективного выбора языка. Более того, подобрав язык и соответствующую измерительную процедуру, можно получить любое желаемое предсказание.

В следующем разделе 1, следуя работе [3], мы докажем универсальность парадокса Гудмена для языков L, Q, в которых результаты измерений представлены в виде точек признакового пространства R^n. Доказательство получается модификацией отрицательного результата так, что получается доказательство приведенной выше диаграммы для каждого акта усиления гипотез.

В разделе 2, модификацией доказательства отрицательного результата [1], получается парадокс Гудмэна в виде диаграммы для языков L, Q в логике первого порядка, где гипотезы представляются некоторым алгоритмом.

Продемонстрировав возникновение парадокса Гудмэна в непрерывном случае (для признакового пространства) и дискретном (в логике), мы утверждаем, что аналогичные доказательства возникновения парадокса Гудмена можно получить и для любой другой формализации методов индукции.

Доказанная универсальность парадокса Гудмена говорит о том, что проблема индукции требует пересмотра.

1. Парадокс Гудмена для усиления гипотез в признаковом пространстве.

Выберем наиболее естественный для восприятия язык репрезентации эксперимента, в котором результаты наблюдений представляются точками в признаковом пространстве R^n, а гипотезой является область допустимых результатов экспериментов и продемонстрируем, как невыполнение требования лингвинистической инвариантности приводит к парадоксу Гудмэна.

Измерительной процедурой *Obs* эксперимента будем называть частичное отображение, определённое на множестве объектов *A* и принимающее значение во множестве протоколов; протокол наблюдения *pr* – любое конечное подмножество R^n, *pr* = *Obs*(*A*) = $\{\bar{x}_1,....,\bar{x}_m\}$, $x_i \in R^n, i = 1,...,m$. Гипотеза представляется некоторым допустимым множеством результатов наблюдения *T*, которое является открытым связным подмножеством R^n.

Определение 1. Эмпирической гипотезой *h* будем называть пару $\langle Obs,T \rangle$.

Смысл эмпирической гипотезы состоит в том, что для любого множества объектов *A* протокол *pr* = *Obs*(*A*) должен лежать в *T*, $pr \subset T$.

Говорят, что протокол *pr* подтверждает гипотезу (допустим), если $pr \subset T$, и опровергает гипотезу, если $pr \not\subset T$.

Метод индукции *F* применяется к некоторой априорной эмпирической гипотезе h_0 и протоколу наблюдений pr_0 = *Obs*(*A*) с целью усиления исходной гипотезы h_0 (возможно вырожденной и утверждающей, что «всё возможно»). Усиление гипотезы h_0 методом индукции *F* заключается в том, что он опираясь на известную информацию в виде пары $\langle h_0, pr_0 \rangle$, выдает более сильную гипотезу h_1=$\langle Obs,T_1 \rangle$ такую, что h_1 есть более точное выражение результатов эксперимента, чем h_0.

Определение 2. Метод индукции *F* – это отображение $F : \langle h_0, pr_0 \rangle \to h_1$, определённое на любой паре $\langle h_0, pr_0 \rangle$ и удовлетворяющее условию: существует пара $\langle h_0, pr_0 \rangle$ такая, что $F(\langle h_0, pr_0 \rangle) = h_1, T_1 \neq T_0$.

Для определения метода индукции $F : \langle h_0, pr_0 \rangle \to h_1$ в случае пространства признаков нам достаточно определить метод построения допустимого множества T_1. Будем рассматривать только те методы индукции *F*, в которых допустимое множество T_1 гипотезы h_1 получается в результате применения некоторого формального метода индукции.

Определение 3. Формальным методом индукции будем называть эффективное отображение F_{formal}: $T_1 = F_{formal}(T_0, pr_0)$, где $pr_0 \neq \varnothing$, T_0, T_1 - допустимые множества, удовлетворяющие условию: $pr_0 \subset T_1 \subset T_0$.

Рассмотрим класс Φ гомеоморфизмов пространства R^n, $n \geq 2$ на себя такой, что $\phi \in \Phi$ и ϕ^{-1} физически реализуем. Определим понятие ϕ-трансляции $\phi \in \Phi$ признакового пространства R^n и эмпирических гипотез. Определим ϕ-трансляцию $\phi \in \Phi$ признакового пространства R^n как ϕR^n. В качестве ϕ-трансляции измерительной процедуры Obs возьмём композицию отображений ϕObs, ставящую в соответствие множеству объектов A протокол наблюдений $\phi pr = \phi Obs(A)$, $pr = Obs(A)$. Тогда ϕ-трансляция эмпирической гипотезы $h = \langle Obs, T \rangle$ есть гипотеза $\phi h = \langle \phi Obs, \phi(T) \rangle$. Имеющиеся гипотезы h и ϕh эмпирически эквивалентны для любой ϕ-трансляции, $\phi \in \Phi$ в том смысле, что наблюдение над одним и тем же множеством объектов A одновременно подтверждает или опровергает эти гипотезы.

Определение 4. Будем говорить, что метод индукции $F: \langle h_0, pr_0 \rangle \rightarrow h_1$ удовлетворяет требованию лингвистической инвариантности (инвариантен) относительно класса гомеоморфизмов Φ и исходных данных $\langle h_0, pr_0 \rangle$, если для любого гомеоморфизма $\phi \in \Phi$ выполняется:

$$\phi(F_{formal}(T_0, pr_0)) = F_{formal}(\phi(T_0), \phi(pr_0)).$$

Требование лингвистической инвариантности есть, по сути, требование инвариантности метода относительно гомеоморфных преобразований признакового пространства. В частности, инвариантности относительно выбора единиц измерений шкал признаков в признаковом пространстве.

Парадокс индукции Гудмена возникает при нарушении требования инвариантности следующим образом. В исходном признаковом пространстве R^n (исходный язык описания данных и гипотез) представляются данные $\langle h_0, pr_0 \rangle$ и полученная методом F усиленная гипотеза h_1

$$h_0 = \langle Obs, T_0 \rangle,\ h_1 = F(\langle h_0, pr_0 \rangle) = \langle Obs, T_1 \rangle,\ T_1 = F_{formal}(T_0, pr_0).$$

В смысле парадокса Гудмэна ϕ-трансляция признакового пространства R^n осуществляет переход к другому языку ϕR^n описания данных и гипотез. После ϕ-трансляции начальных данных $\langle h_0, pr_0 \rangle$ и применения метода индукции F мы получим усиленную гипотезу в новом языке:

$$Obs^{\phi} = \phi Obs,\ pr_0^{\phi} = \phi pr_0,\ T_0^{\phi} = \phi T_0,\ h_0^{\phi} = \phi h_0,$$

$$h_1^{\phi} = F(\langle h_0^{\phi}, pr_0^{\phi} \rangle) = \langle Obs^{\phi}, T_1^{\phi} \rangle,\ T_1^{\phi} = F_{formal}(T_0^{\phi}, pr_0^{\phi})$$

Если метод индукции инвариантен, то противоречий не возникает и

$$\phi(F_{formal}(T_0, pr_0)) = \phi(T_1) = T_1^{\phi}.$$

Парадокс индукции Гудмэна возникает, когда нарушается требование инвариантности

$$\phi(T_1) \neq T_1^{\phi}$$

и существует протокол pr такой что, либо $pr \subset T_1$ и $\phi(pr) \not\subset T_1^{\phi}$, либо $pr \not\subset T_1$ и $\phi(pr) \subset T_1^{\phi}$. Это означает, как и в парадоксе Гудмэна, что отправляясь от одних и тех же эмпирически эквивалентных данных, но усиливая гипотезы в разных пространствах (языках) мы получаем различные результаты.

Докажем универсальность парадокса Гудмэна, что он возникает при каждом нетривиальном акте усиления гипотез.

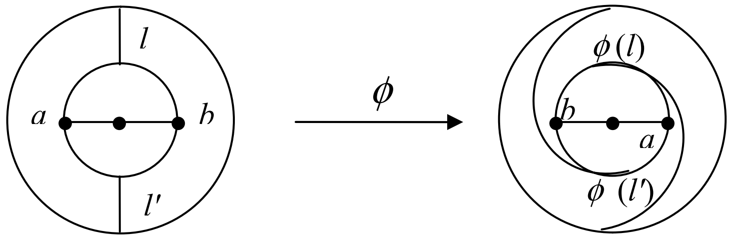

Рис. 1

Теорема 1. Для каждого нетривиального акта усиления гипотезы h_0, когда $T_1 \neq T_0$, некоторым методом индукции $F : \langle h_0, pr_0 \rangle \to h_1$ существует ϕ-трансляция, $\phi \in \Phi$ признакового пространства R^n, $n \geq 2$, в которой возникает парадокс индукции Гудмена.

Лемма [3]. Для любой открытой связанной области A пространства R^n, $n \geq 2$, содержащей некоторую область D, $D \neq A$, найдутся две точки $a \in D$ и $b \in A \setminus D$ и гомеоморфизм ϕ пространства R^n такие, что $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a$, $\phi(A) = A$ и ϕ тождественно вне A.

Действительно, можно осуществить гомеоморфное преобразование плоскости так, чтобы точки $R^n \setminus A$ остались на месте, а точки a и b поменялись местами.

Полное доказательство леммы приведено в [3]. В лемме доказано, что такое преобразование осуществляется с помощью простейших арифметических функций (сложение, умножение, степень, синус и косинус). Например, в случае плоского сечения шара с центром в начале координат, гомеоморфное преобразование эквивалентно повороту относительно начала координат так, чтобы точки a и b поменялись местами см. рис. 1.

Доказательство теоремы. Предположим, некоторым методом индукции F произведен нетривиальный акт усиления гипотезы h_0, тогда:

$$F(\langle h_0, pr_0 \rangle) = h_1, T_1 \neq T_0, T_1 \subset T_0, T_1 = F_{formal}(T_0, pr_0).$$

В качестве множества A возьмём $T_0 \backslash pr_0$, а в качестве D его подмножество $T_1 \backslash pr_0$. Так как $T_1 \neq T_0$, то $A \neq D$. Протокол pr_0 есть конечное подмножество R^n, поэтому множества A и D открытые и связные. Применяя к ним лемму, получим два точечных протокола pr_1 и pr_2, и гомеоморфизм $\phi \in \Phi$, такие, что:

$$pr_1 \subset T_0 \setminus T_1, pr_2 \subset T_1 \text{ и } pr_1 \not\subset pr_0, pr_2 \not\subset pr_0,$$

$$\phi \text{ тождественен вне } T_0,$$

$$\phi(pr_0) = pr_0, \phi(T_0) = T_0,$$

$$\phi(pr_1) = pr_2, \phi(pr_2) = pr_1, \phi(T_1) \neq T_1.$$

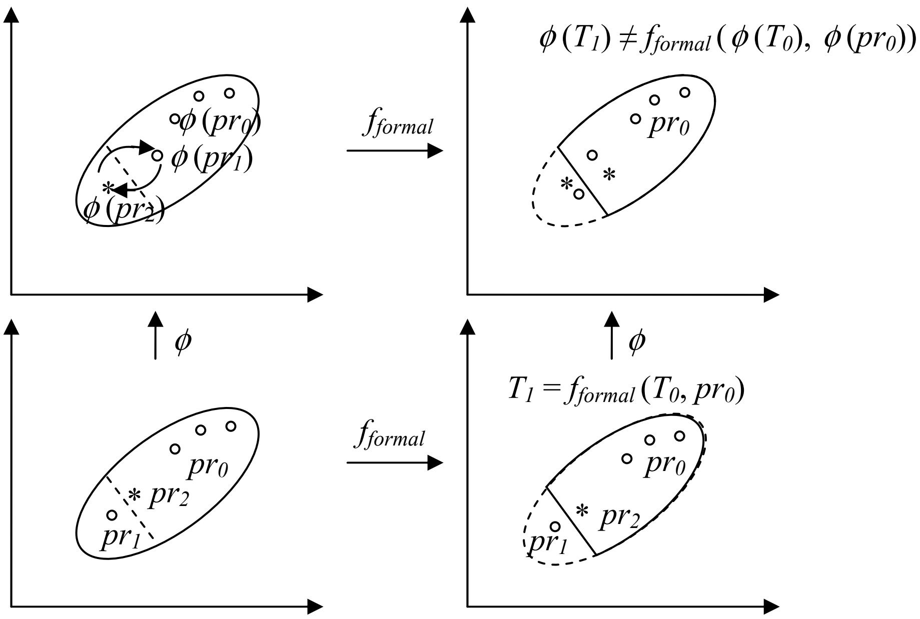

Рис. 2.

Покажем, что в этом случае возникает парадокс индукции Гудмена (см. рис. 2). Подействовав гомеоморфизмом ϕ на начальные данные $\langle h_0, pr_0 \rangle$, получим ϕ-трансформированную пару данных $\langle \phi \mathrm{h}_0, \phi(\mathrm{pr}_0) \rangle$. Применим метод индукции F к исходным $\mathrm{F}: \langle \mathrm{h}_0, \mathrm{pr}_0 \rangle \to \mathrm{h}_1$ и ϕ-трансформированным начальным данным $\mathrm{F}: \langle \phi \mathrm{h}_0, \phi(\mathrm{pr}_0) \rangle \to \mathrm{h}_1^{\phi}$. Рассмотрим допустимые множества соответствующих гипотез h_1 и h_1^{ϕ}:

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{F}_{\mathrm{formal}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{pr}_0) \text{ и } \mathrm{T}_1^{\phi} = \mathrm{F}_{\mathrm{formal}}(\phi(\mathrm{T}_0), \phi(\mathrm{pr}_0)).$$

Так как $\phi(\mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0$ и $\phi(\mathrm{pr}_0) = \mathrm{pr}_0$, то формальный метод индукции $\mathrm{f}_{\mathrm{formal}}$ должен давать один и тот же результат в обоих случаях

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{f}_{\mathrm{formal}}(\mathrm{T}_0, \mathrm{pr}_0) = \mathrm{f}_{\mathrm{formal}}(\phi(\mathrm{T}_0), \phi(\mathrm{pr}_0)) = \mathrm{T}_1^{\phi},$$

следовательно $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_1^{\phi}$. Но по построению $\phi(\mathrm{T}_1) \neq \mathrm{T}_1$ и, следовательно, $\phi(\mathrm{T}_1) \neq \mathrm{T}_1^{\phi}$, что означает нарушение требования лингвистической инвариантности и возникновение парадокса Гудмэна ■

Универсальность парадокса индукции Гудмэна можно переформулировать следующим образом: как только мы хотим сделать нетривиальный шаг индукции, то для него сразу же можно получить парадокс. Точнее, для любых начальных данных $\langle h_0, pr_0 \rangle$ и для любого метода индукции *f* если только мы имеем нетривиальный шаг индукции $\mathrm{F}(\langle \mathrm{h}_0, \mathrm{pr}_0 \rangle) = \mathrm{h}_1, \mathrm{T}_1 \neq \mathrm{T}_0$, то для любого протокола pr, различающего гипотезы h_0 и h_1 может быть построена φ-трансформация такая, что на протоколе pr, усиленные в разных пространствах гипотезы T_1 и T_1^{ϕ}, принимают различные значения.

В чем именно состоит парадокс показано на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} & pr_0 = Obs(A),\ F(<h_0, pr_0>) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\phi"] & h_1 = <Obs, F_{formal}(T_0, pr_0)> \arrow[d, leftrightarrow, "\phi"] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & pr^{\phi}_0 = Obs^{\phi}(A),\ F(<h^{\phi}_0, pr^{\phi}_0>) \arrow[r] & h^{\phi}_1 = <Obs^{\phi}, F_{formal}(T^{\phi}_0, pr^{\phi}_0)> \neq \phi * h_1 \end{tikzcd}$$

В диаграмме показаны два совершенно равноценных пути усиления гипотез, которые невозможно предпочесть один другому. Более того, поскольку преобразования ϕ и ϕ^{-1} физически реализуемы, то эту реализацию можно включить в саму экспериментальную

процедуру *Obs* и тогда мы будем иметь две экспериментальные процедуры, применение которых к одному и тому же множеству объектов А дает два протокола. Исходная информация $\langle \mathrm{h_0}, \mathrm{pr_0} \rangle$ и $\langle \phi\mathrm{h_0}, \phi(\mathrm{pr_0}) \rangle$ для метода индукции эмпирически эквивалентна. Однако полученные усиления противоречат друг другу на протоколе pr. Какое из предсказаний предпочесть выбрать невозможно. Выбор предсказания зависит от языка – выбранного признакового пространства, что является субъективным произволом и не зависит от исходной информации.

2. Парадокс индукции Гудмэна в логике первого порядка.

Преобразуем отрицательный результат Самохвалова [1987] в доказательство универсальности парадокса Гудмэна для случая формализации методов индукции в логике и теории алгоритмов.

Пусть A - конечное не пустое множество объектов. Протокол наблюдения *pr* над множеством объектов A определим как модель $pr^v = \langle A, P_1, ..., P_k \rangle$, где $v = \langle P_1, ..., P_k \rangle$ - множество предикатов сигнатуры $\Omega = \langle \wp_1, ..., \wp_k \rangle$, $P_i \subset A^{n_i}$, n_i – арность предиката P_i, i = 1,…,k. Пусть M^v - класс всех конечных моделей сигнатуры Ω.

Гипотезу определим как упорядоченную тройку:

$h^v = \langle v,\ obs^v,\ T^v \rangle$,

$obs^v : A \to pr^v$ – отображение, задающее измерительную процедуру, сопоставляющую множеству объектов A протокол наблюдения pr^v;

$T^v:\ M^v \to \{0,1\}$ – тестовый алгоритм, принимающий два значения: $T^v(pr^v) = 0$ (протокол pr^v фальсифицирует гипотезу h^v) или $T^v(pr^v) = 1$ (протокол pr^v подтверждает гипотезу h^v).

Назовём пару $\langle T^v,\ pr^v \rangle$ *допустимой*, если $T^v(pr^v) = 1$. Пусть π - класс всех возможных допустимых пар, τ - класс всех возможных тестовых алгоритмов T^v, и $|pr| = A$ – основное множество модели *pr*.

Метод индукции определим как отображение $F(\langle h_0^v, pr_0^v \rangle) = h_1^v$, сопоставляющее каждой паре, состоящей из протокола pr_0^v и начальной гипотезы h_0^v, более “сильную” гипотезу h_1^v.

В работе [1987] метод индукции определяется вместе с необходимыми требованиями следующим образом:

1. Для произвольной гипотезы $h_0^v = \langle v, obs^v, T_0^v \rangle$, протокола pr_0^v над множеством A если: $T_0^v(pr_0^v) = 1$, $pr_0^v = obs^v(A)$, то имеет место равенство:

$$F(\langle h_0^v, pr_0^v \rangle) = h_1^v = \langle v,\ obs^v, F_{formal}(T_0^v, pr_0^v) \rangle,$$

$$T_1^v = F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)$$

$$T_1^v(pr_0^v) = 1,$$

где F_{formal}: $\pi \to \tau$ однозначное отображение независимое от v, obs^v и A.

2. $h_1^v < h_0^v$, среди применений метода должно быть хотя бы одно, которое не является простым воспроизводством исходной информации т.е.:
   (a) из $T_0^v(pr^v) = 0$ следует $T_1^v(pr^v) = 0$, для любого протокола pr^v;
   (b) существует допустимая пара $\langle T_0^v,\ pr_0^v \rangle \in \pi$ и протокол pr^v такие, что $T_0^v(pr^v) = 1$, но $T_1^v(pr^v) = 0$, $T_1^v = F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & pr_0^v = \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi_v^w"'] & obs^v(A), \arrow[dd, leftrightarrow] & F(\langle h_0^v, pr_0^v\rangle) \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi_v^w"'] \arrow[r] & h_1^v = \langle v, Obs^v, F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)\rangle \arrow[dd, leftrightarrow, "\varphi_v^w"'] \\
A_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & pr_0^w = & obs^w(A), & F(\langle h_0^w, pr_0^w\rangle) \arrow[r] & h_1^w = \langle w, Obs^w, F_{formal}(T_0^w, pr_0^w)\rangle \neq \varphi_v^w h_1^v
\end{tikzcd}
$$

Определим два различных языка как два множества предикатов v и w сигнатуры Ω. Определим трансформацию φ_v^w одного языка в другой как взаимно-однозначный алгоритм $\varphi_v^w:\ M^v \to M^w$, удовлетворяющий условию:

$$pr_1^v \approx pr_2^v \Leftrightarrow \varphi_v^w(pr_1^v) \approx \varphi_v^w(pr_2^v)$$, где ≈ есть отношение изоморфизма.

Определим тестовый алгоритм $\varphi_v^w T^v:\ M^w \to \{0,1\}$ следующим образом:

3. $$\varphi_v^w T^v(pr^w) = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists pr^v(pr^w \approx \varphi_v^w(pr^v)\ \&\ T^v(pr^v) = 1); \\ 0, \text{ если } \exists pr^v(pr^w \approx \varphi_v^w(pr^v)\ \&\ T^v(pr^v) = 0). \end{cases}$$

Гипотезы $h^v = \langle v,\ obs^v,\ T^v\rangle$ и $h^w = \varphi_v^w h^v = \langle w, \varphi_v^w obs^v, \varphi_v^w T^v\rangle$, где φ_v^w - трансформация, удовлетворяющая предыдущим требованиям, являются эмпирически эквивалентными в том смысле, что наблюдения над одними и теми же множествами объектов всегда одновременно подтверждают или опровергают их.

Пусть Φ – класс всех трансформаций φ_v^w, удовлетворяющих предыдущим условиям.

Заключительным требованием к методам индукции является требование лингвистической инвариантности методов относительно трансформаций $\varphi_v^w \in \Phi$.

4. Для произвольного метода индукции $F(\langle h_0^v, pr_0^v\rangle) = h_1^v$, пары $\langle T_0^v, pr_0^v\rangle \in \pi$ и трансформации $F_v^w \in \varphi$ имеет место следующее соотношение:

$$\varphi_v^w F_{formal}(T_0^v, pr_0^v) = F_{formal}(\varphi_v^w T_0^v, \varphi_v^w(pr_0^v)).$$

Парадокс индукции Гудмэна, означающий нарушение требования лингвистической инвариантности. В приведенных терминах он имеет следующий вид.

Пусть есть два множества предикатов v и w сигнатуры Ω. Сначала в терминах языка v записываются исходные данные $\langle h_0^v, pr_0^v\rangle$ и получается усиленная гипотеза h_1^v.

$$h_0^v = \langle v, obs^v, T_0^v\rangle,\ \ h_1^v = F(\langle h_0^v, pr_0^v\rangle) = \langle v, obs^v, T_1^v\rangle,\ T_1^v = F_{formal}(T_0^v, pr_0^v);$$

Трансформация $\varphi_v^w \in \Phi$ осуществляет переход от языка v к языку w. В языке w исходные данные и результат применения к ним метода индукции представляются следующим образом:

$$obs^w = \varphi_v^w Obs^v,\ \ pr_0^w = \varphi_v^w pr_0^v,\ T_0^w = \varphi_v^w T_0^v,\ h_0^w = \varphi_v^w h_0^v$$
$$h_1^w = F(\langle h_0^w, pr_0^w\rangle) = \langle w, obs^w, T_1^w\rangle, T_1^w = F_{formal}(T_0^w, pr_0^w)$$

Парадокс Гудмэна для трансформации $\varphi_v^w \in \Phi$ означает существование протокола pr^v для которого, или $(T_1^v(pr^v) = 1)\&(T_1^w(\varphi_v^w pr^v) = 0)$ или $(T_1^v(pr^v) = 0)\&(T_1^w(\varphi_v^w pr^v) = 1)$ (см. приведённую диаграмму).

Теорема 2. Для любого метода индукции F, удовлетворяющего требованиям 1-3, и пары $(T_0^v, pr_0^v) \in \pi$, на которой происходит невырожденное (см. определение в доказательстве) усиление гипотезы $h_1 < h_0$, возникает парадокс индукции Гудмэна.

Доказательство теоремы: Так как $h_1 < h_0$, то существуют и протоколы pr_1^v, pr_2^v такие, что:

$$pr_1^v \not\approx pr_0^v,\ pr_2^v \not\approx pr_0^v,\ pr_2^v \not\approx pr_1^v \text{ и}$$

$$T_0^v(pr_1^v) = 1,\ F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)(pr_1^v) = T_1^v(pr_1^v) = 0,$$
$$T_0^v(pr_2^v) = 1,\ F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)(pr_2^v) = T_1^v(pr_2^v) = 1,$$

иначе $PR_n(F_{formal}(T_0^v, pr_0^v)) = [pr_0^v]$, где $[\mathrm{pr}_0^v]$ - класс всех протоколов изоморфных pr_0^v, т.е. имеет место вырожденный случай, когда метод индукции воспроизводит факты.

Применение метода индукции F к паре $(T_0^v, pr_0^v) \in \pi$ даёт:

$$h_0 = \left\langle v,\ obs^v,\ T_0^v \right\rangle,\ pr_0^v = obs^v(A),\ T_0^v(pr_0^v) = 1,$$
$$F(\left\langle h_0^v, pr_0^v \right\rangle) = h_1^v = \left\langle v, obs^v, F_{formal}(T_0^v, pr_0^v) \right\rangle,\ T_1^v(pr_0^v) = 1.$$

Определим алгоритм $\varphi_v^v \in \Phi$, который переставляет местами протоколы pr_1^v, pr_2^v и действует тождественно на остальном множестве протоколов.

$$\varphi_v^v(pr^v) = \begin{cases} pr_1^v,\ if\ pr^v \cong pr_2^v; \\ pr_2^v,\ if\ pr^v \cong pr_1^v; \\ pr^v,\ if\ pr^v is\ no\ isomorphic\ pr_1^v and\ pr_2^v. \end{cases}$$

Из построения алгоритма φ_v^v следует, что

$$\varphi_v^v(pr_0^v) = pr_0^v,\ \varphi_v^v T_0^v = T_0^v.$$

Откуда

$$T_1^v = F_{formal}(T_0^v, pr_0^v) = F_{formal}(\varphi_v^v T_0^v, \varphi_v^v(pr_0^v)) = T_1^{\varphi_v^v}.$$

Однако $\varphi_v^v T_1^v \neq T_1^{\varphi_v^v}$, т.к., с одной стороны, $T_1^{\varphi_v^v}(pr_2^v) = T_1^v(pr_2^v) = 1$, а, с другой стороны, $\varphi_v^v T_1^v(pr_2^v) = 0$, потому что $pr_2^v = \varphi_v^v(pr_1^v)$ и $T_1^v(pr_1^v) = 0$.

Отсюда следует парадокс Гудмэна, если в качестве протокола pr^v взять протокол pr_1^v, т.к.

$$T_1^v(pr_1^v) = 0,\ \text{а}\ T_1^{\varphi_v^v}(\varphi_v^v pr_1^v) = 1\ ■$$

Литература.

1. Самохвалов К.Ф. “О теории эмпирических предсказаний”, (Вычислительные системы, вып. 55), Труды ИМ СО РАН, Новосибирсксsucc, 1973, с.3-35.
2. Витяев Е.Е., Хомичева И.В. Парадокс индукции Гудмена // Методологические аспекты когнитивных процессов (Вычислительные системы, вып. 170), Труды ИМ СО РАН, Новосибирск, 2002, с.38-44.
3. 3. Vityaev E.E., Novikov V.F. “Induction method paradoxicality”, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, v3, No. 1 (1989) 147-157.