Обнаружение законов на эмпирических системах
и тестирование систем аксиом теории измерений.
(Osnovnta pokryvaet Zakon.doc Moscow published, Vych systemy definition of law)

Витяев Е.Е., Логвиненко А.Д.
630090, Институт математики СО РАН, Новосибирск, Vityaev@math.nsc.ru
Queens University of Belfast, 22 Sharman Drive, Belfast BT9 5HL, North Ireland

Введение. Постановка проблемы.

Теория измерений базируется на аксиоматическо-репрезентационном подходе к измерениям ("Axiomatic-Representational Viewpoint in Measurement" [2, p.201]). Основным постулатов этого подхода является предположение о существовании эмпирической системы. "The most pervasive abstraction in measurement theory consists in formalizing basic observations as a relational structure, that is, a set with some primitive relations and operations. This abstraction arises from considering the nature of empirical, qualitative observations". [2,p.201].

Разработка каждой конкретной аксиоматико-репрезентативной теории требует решения трех проблем - одной концептуальной и двух математических (существования и единственности). Концептуальная проблема состоит в выборе примитивов - множества эмпирических отношений и операций, и системы аксиом, которой они должны удовлетворять: "The conceptual task is to select the abstraction to be studied, namely, the primitives and the axioms ... Once the primitives are selected, the question of axioms arises." [2, p.201].

Решение концептуальной проблемы - выбор примитивов и системы аксиом мы разобъем на две самостоятельные проблемы:

1. выбор примитивов (множества отношений и операций) и выбор основного множества объектов (генеральной совокупности объектов);

2. выбор системы аксиом.

Первая из упомянутых проблем - выбор эмпирических отношений, операций и генеральной совокупности объектов фиксирует, в соответствии с основным постулатом теории измерений, некоторую неизвестную нам эмпирическую систему (класс эмпирических систем). Но об этой эмпирической системе нам ничего неизвестно, поэтому неизбежно возникает вторая проблема - выбрать некоторую гипотетическую систему аксиом, которой эта эмпирическая система должна удовлетворять.

Покажем, что объединение этих двух проблем в одну концептуальную проблему, принятое в теории измерений, приводит к смешению нескольких принципиально различных уровней рассмотрения:

- Во-первых, эти две проблемы различны в том отношении, что фиксируя примитивы и множество объектов мы фактически задаем некоторую неизвестную нам, но реальную и объективно существующую эмпирическую систему (класс эмпирических систем), в то время как выбор системы аксиом является чисто гипотетическим и задает некоторый гипотетический класс эмпирических систем. Aproiri, до всякой экспериментальной проверки объективно существующая эмпирическая система и гипотетический класс эмпирических систем строго говоря никак не связаны. Подтвердить, что реальная эмпирическая

система действительно, в каком-то смысле, принадлежит классу гипотетических эмпирических систем могут только методы тестирования систем аксиом.

- Во-вторых, первая проблема - проблема выбора примитивов и основного множества объектов является проблемой эмпирического уровня, в то время как проблема задания системы аксиом есть проблема теоретического уровня, решаемая в рамках аксиоматического подхода. Смешение этих двух проблем в одну концептуальную проблему вводит неявное предположение, что эмпирическая система так же задается на теоретическом уровне и представляет собой некоторую математическую структуру (класс структур) на которой данная система аксиом должна быть истинной. Но это противоречит эмпиричности эмпирической системы. Фактически в теории измерени предполагается, что учет шумов, неточностей приборов, предрасположенностей испытуемого и т.д. не дело теории измерений. Теория измерений, ввиду ее аксиоматического подхода к исследуемой реальности, должна основываться на идеализированных эмпирических системах, в том смысле, что значения предикатов на объектах однозначно определены и не подвержены шумам, неточностям приборов, предрасположенностям испытуемого и т.д. На самом деле, мы никогда не имеем фиксированной и неизменной реальной эмпирической эмпирической системы как она определена в проблеме 1. Она постоянно меняется со временем и, например в случаях ответов испытуемого, может меняться очень быстро. Даже если мы имеем дело не с испытуемым, а с некоторым физическим экспериментом, то все равно наличие разнообразных шумов не позволяет надеяться на постоянство значений отношений и операций на одних и тех же объектах, что исключает существование фиксированной реальной эмпирической системы. Теоретической же модели для представления реальности такой какой она есть и как она сформулирована в проблеме 1 в теории измерений до настоящего времени не существует.

В-третьих, аксиоматический метод и требование истинности систем аксиом на эмпирической системе неизбежно влекут принцип фальсифицируемости при проверке аксиом на эмпирической системе. На самом деле этот принцип применим только в тех теориях, где нам известны все законы строения используемого(их) прибора(ов) включая модели шумов. Только тогда мы в состоянии точно расчитать когда отклонения прибора(ов) допустимы и являются следствием шумов, а когда они действительно означают отклонения от теоретически вычисленных значений. Но этот принцип сильно ограничивает область применимости теории измерений, так как это невозможно сделать, например, для испытуемого, а также практически во всех остальных областях (кроме физики, где теория измерений не нужна).

Приведенные рассуждения ставят следующие проблемы:

1. Как теоретически описать объективно существующую реальность на эмпирическом уровне (проблема 1), не привлекая гипотетические предположения о системе аксиом?

2. Как системы аксиом не предполагать Apriori, а некоторым образом открывать на эмпирической системе?

3. На что можно заменить принцип фальсифицируемости при проверке систем аксиом?

В данной работе предполагается следующим образом ответить на эти вопросы:

1. Эмпирический уровень описывать путем формализации понятия эксперимента;

2. Системы аксиом обнаруживать на множестве экспериментов как законы этих экспериментов;

3. Понятие истинности заменить на некоторую оценку (предсказания, вероятности и т.д.) закона. Вместе с понятием истинности исчезает и принцип фальсифицируемости. Главным же в понятии закона является не оценка (и, в частности, не истинность), а его простота и неупрощаемость, которые свойственны законам природы.

В целом предлагаемый подход позволяет подойти к теории измерений с точки зрения направления Scientific Discovery и не тестировать известные в теории измерений системы аксиом, а открывать из как законы исследуемой реальности.

1. Что такое закон.

Мы будем различать, следуя [2, p.251], design axiom, technical axiom, empirical axiom и idealized axiom. Прямому тестированию на реальных данных подлежат только эмпирические аксиомы: "Empirical axioms. The axioms that are ordinarily tested under some standart interpretation of primitive concepts of the measurement theory form the most important class, the one that is real focus of analysis. It is presumably the objective of particular experiments to test particular axioms ...". В дальнейшем, при рассмотрении тестируемости систем аксиом, мы будем рассматривать только тестирование эмпирических аксиом. Как тестировать остальные типы аксиомы и как находить эмпирические процедуры для проверки других аксиом описано в [2]. Наш подход к тестированию аксиом в этом технически более сложном случае, включающем функциональные символы и кванторы существования, рассмотрен в [10].

Далее мы будем предполагать, что система аксиом Σ представляет собой совокупность универсальных формул (содержащих только кванторы всеобщности) без функциональных символов. В [10] показано, что такая система аксиом Σ может быть логически эквивалентными преобразованиями преобразована к совокупности формул вида:

$$C = (A_1 \& ... \& A_k \Rightarrow A_0), \text{ где} \quad (1)$$
$$A_j = P_j (x^j_1,...,x^j_{nj})^{\varepsilon j}\ j,\ j = 0,1,...,k,$$

$x^0_1,...,x^0_{n0}$, $x^1_1,...,x^1_{n1}$,..., $x^k_1,...,x^k_{nk}$ - свободные переменные; n0,n1,...,nk - местности предикатных символов $P_0,P_1,...,P_k$; символы $\varepsilon 0,\varepsilon 1,...,\varepsilon k \in \{0,1\}$ - означают наличие (0) отсутствие (1) отрицания.

Далее мы будем предполагать, что система аксиом представляет собой совокупность формул вида (1), которые будем называть **правилами**.

Традиционно задача тестирования систем аксиом Σ на некоторой эмпирической системе M состоит в следующем:

Задача 1: Определить истинна ли система аксиом Σ на эмпирической системе M.

Проанализируем эту задачу. Что можно сказать об истинности системы аксиом Σ на эмпирической системе M, опираясь только на логический анализ системы аксиом? Можно сказать, во-первых, что правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ может быть истинным на эмпирической системе только потому, что посылка правила всегда ложна. На самом деле, как мы покажем, это означает, что на эмпирирческой системе истинно некоторое логически более сильное "подправило", связывающее между собой атомы посылки. Во-вторых, правило C может быть истинно на эмпирической системе только потому, что некоторое его логиче-

ски более сильное "подправило", содержащее только часть посылки и то же заключение, истинно на эмпирической системе. Поэтому система аксиом может оказаться истинной на эмпирической системе потому, что фактически на эмпирической системе истинна некоторая система подправил данной системы аксиом, из истинности которой в свою очередь следует истинность системы аксиом. Какие из подправил будут фактически истинны на эмпирической системе мы заранее не знаем, но все такие подправила вместе с самой системой аксиом S мы будем считать **гипотезами** для проверки на эмпирической системе.

Из логики и метологии науки хорошо известно, что те из гипотез следует считать **законами**, которые при одинаковой их подтвержденности на экспериментальных данных наиболее фальсифицируемы, просты и/или содержат наименьшее число "параметров". В нашем случае все эти свойства, которые обычно трудно точно определить, следуют из определения логической силы высказывания. "Подправило" является одновременно и логически более сильным высказыванием, чем само правило и более фальсифицируемым, так как содержит более слабую посылку и, следовательно, применимо к большему объему данных и тем самым в большей степени подвержено фальсификации; и более простым, так как содержит меньшее число атомарных высказываний, чем правило; и включает меньшее число "параметров", так как лишние атомарные высказывания тоже можно считать параметрами "подстройки" высказывания под данные.

Почему же закон должен быть наиболее фальсифицируемым, простым и содержать наименьшее число параметров? Разные авторы придерживаются различных мнений на этот счет, либо не объясняют этого вообще. Очевидно одно, что это нужно для того, что бы максимально близко приблизиться к реальным данным и наиболее точно отразить реальные зависимости в данных, а не наши гипотезы о них. В нашем случае для гипотез вида (1) мы можем более точно ответить на этот вопрос. Так как все описанные свойства закона вытекают из логической силы высказывания, то поиск логически наиболее сильных "подправил", истинных на эмпирической системе, позволяет нам не только проверить гипотезу об истинности системы аксиом, но и решить другую принципиально более важную задачу: выяснить, а какова на самом деле та наиболее сильная (логически) теория, вытекающая из этих правил, которая описывает наши данные и возможно лежит в основании неизвестного нам закона их порождения? Решение этой **задачи обнаружения закона в данных** или, что то же самое, поиска сильнейшей теории в данных как раз и требует нахождения среди всех правил вида (1) логически наиболее сильных (среди истинных на эмпирической системе). Именно такие правила в соответствии с существующими представлениями следует считать законами эмпирической системы.

Такая постановка задачи принципиально меняет и исходную задачу тестирования систем аксиом. Тестирование систем аксиом, как оно понимается в теории измерений, это либо фальсифицируемость, либо статистический вывод. Фальсифицируемость, как это представлено в теории измерений, не предполагает поиска более простого и логически более сильного и так же не фальсифицируемого утверждения. Тем самым нефальсифицированное на имеющихся данных утверждение принимается в качестве гипотезы несмотря на то, что оно может содержать некоторые дополнительные условия, которые без ущерба для нефальсифицируемости можно было бы удалить из него. Это означает, что эти дополнительные условия лишь наша гипотеза не имеющая эмпирического содержания. Поэтому поиск логически наиболее сильных правил, являющихся законами, обладает тем преимуществом, что они не содержат в себе лишних, не имеющих эмпирического содержания атомов. Статистический вывод или статистическая проверка гипотез так же не предпола-

гают поиска логически более сильного утверждения, хотя очевидно, что логически более сильное утверждение применимо к большему объему данных и, следовательно, имеет большую статистику для получения более достоверного статистического вывода**. Поэтому исходная постановка задачи 1 тестирования систем аксиом принятая в теории измерений заменяется нами на задачу обнаружения законов и поиска наиболее сильной теории эмпирических систем**, которую мы сформулируем ниже. Решение задачи 1 в этом случае получается как частный случай задачи обнаружения законов.

Выясним из истинности каких логически более сильных "подправил" следует истинность самого правила. Тем самым мы получим определение "подправил" и определение закона для эмпирической системы.

Для дальнейших рассмотрений необходимо выделить фрагмент языка первого порядка $L(\Sigma)$, содержащий только внелогические символы системы аксиом Σ. Сигнатурой $\Im(\Sigma)$ языка $L(\Sigma)$, будем называть набор $\Im(\Sigma) = <P_1,...,P_k>$, где $P_1,...,P_k$ - все предикатные символы, встречающиеся в аксиомах Σ; n1,...,nk - местности соответствующих предикатных символов; $X(\Sigma) = <x_1,...x_m>$ - множество всех свободных переменных, входящих в Σ; $U(\Sigma)$ - множество всех атомарных формул (атомов) вида $P(x_1,...x_n)$, $x_1,...x_n \in X(\Sigma)$, входящих в аксиомы из Σ; $\Re(\Sigma)$ - множество утверждений языка $L(\Sigma)$, полученное замыканием множества $U(\Sigma)$ относительно логических операций &,v,¬. На элементах булевой алгебры $\Re(\Sigma)$ определено тождество утверждений. Будем предполагать, что логические константы $И \equiv A\vee\neg A$ и $Л \equiv A\&\neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Sigma)$. Так как число переменных и атомарных формул конечно, то и алгебра $\Re(\Sigma)$ конечна.

Пусть у нас есть некоторая эмпирическая система $M = <A,W>$, где A - основное множество эмпирической системы, а $W = <P_1,...,P_k>$, $k > 0$ - множество предикатов, определенных на A. Каждый предикат P_j местности nj определяет подмножество $P \subseteq A_1 x...x A_{nj} = A$ наборов объектов на которых он истинен. Под истинностью системы аксиом Σ на эмпирической системе M будем понимать стандартное опредление истинности высказываний на моделях.

Выясним из истинности каких логически более сильных "подправил" на эмпирической системе M следует истинность самого правила. Тем самым мы получим определение "подправил" и определение закона для эмпирической системы M.

<u>Теорема</u> 1.1. Правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ логически следует (в исчислении высказываний) из любого правила вида:

1. $A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}$,
   где $\{A_{i1},...,A_{ih},A_{i0}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, $0 \le h < k$, т.е.
   $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$;
   $\vdash$ - доказуемость в исчислении высказываний.
2. $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0)$,
   где $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, $0 \le h < k$, т.е.,
   $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$.

<u>Доказательство</u>: Докажем сначала первую цепочку выводов. $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \equiv (\neg(A_{i1}\&...\&A_{ih})\vee\neg A_{i0}) \equiv (\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee\neg A_{i0}) \equiv \neg(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})$. Так как $\{A_{i1},...,A_{ih},A_{i0}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, то коньюнкция $A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0}$ является частью коньюнкции $A_1\&...\&A_k$. Из аксиомы алгебры высказываний $A\&B \vdash A$ по правилу modus ponense следует, что $A_1\&...\&A_k \vdash A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0}$. Поэтому из формул $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0})$, $A_1\&...\&A_k$ выводится противоречие $\neg(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})\&(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&A_{i0})$. Отсюда следует, что

$(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow \neg A_{i0}) \vdash \neg(A_1\&...\&A_k)$. Докажем, что $\neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$. Так $\neg(A_1\&...\&A_k) \equiv \neg A_1\vee...\vee\neg A_k$, то по правилу алгебры высказываний $A \vdash A\vee B$ выводим, что $\neg(A_1\&...\&A_k) \vdash (\neg A_1\vee...\vee\neg A_k\vee A_0) \equiv (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$.

Докажем, что $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$, если $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subset \{A_1,...,A_k\}$, $0 \le h < k$. Так как $(A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow A_0) \equiv (\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee A_0)$, то из схемы аксиом $A \frown A\vee B$ алгебры высказываний и правила modus ponens следует, что $(\neg A_{i1}\vee...\vee\neg A_{ih}\vee A_0) \vdash (\neg A_1\vee...\vee\neg A_k\vee A_0) \equiv (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$.

Определение 1.1. **Подправилом** некоторого правила C будем называть любое из логически более сильных правил вида 1 или 2, определенных в теореме 1.1 для правила C.

Как легко видеть любое подправило также имеет вид (1). Обозначим через $SSub(\Sigma)$ множество всех подправил, вместе с самими правилами, системы аксиом Σ.

Следствие 1.1. Если некоторое подправило правила C истинно на эмпирической системе M, то и само правило C истинно на M.

Определение 1.2. **Законом** эмпирической системы $M = \langle A,W \rangle$ будем называть любое, истинное на M правило C вида (1), для которого каждое его подправило уже не истинно на M.

Таким образом, от задачи 1 мы переходим к следующей задаче, заменяя тестирование систем аксиом на обнаружение законов эмпирических систем.

Задача 2: Для множества правил $SSub(\Sigma)$ определить какие из них являются законами эмпирической системы $M = \langle A,W \rangle$. После этого проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub(\Sigma)$, являющееся законом эмпирической системы M. Если да, то в силу следствия 1.1 система аксиом выполнена на M.

2. Понятие эксперимента. Определение закона на множестве всех возможных экспериментов.

Свяжем проверку истинности системы аксиом на эмпирической системе M с конкретными конечными экспериментами на которых эта истинность проверяется. Тем самым мы не просто сделаем проверку аксиом более конструктивной, а заменим задачу, которую можно выполнять только на теоретическом уровне на задачу чисто эмпирической проверки. Понятие эксперимента заменяет идеализированные эмпирические системы на действительно эмпирические.

Под интерпретацией языка $L(\Sigma)$ на эмпирической системе $M = \langle A,W \rangle$ будем понимать два отображения: интерпретацию сигнатурных символов $I(M)$: $\Im(\Sigma) \to W$, сопоставляющую каждому сигнатурному символу $P_j \in \Im(\Sigma)$, $j = 1,...,k$, местности nj некоторый предикат P_j из W той же местности, и интерпретацию переменных I: $X(\Sigma)) \to X(A)$, сопоставляющую взаимнооднозначно всем свободным переменным $X(\Sigma) = \langle x_1,...x_m \rangle$ языка $L(\Sigma)$ переменные по основному множеству A эмпирической системы M, представленные набором $X(A) = \langle x_1,...x_m \rangle$. Под состоянием s: $X(A) \to A$ будем понимать отображение набора переменных $X(A) = \langle x_1,...x_m \rangle$ в набор объектов $\langle a_1,...a_m \rangle$ из A (не все объекты обязательно различны). Множество всех возможных состояний обозначим через S.

Определим неформально что такое эксперимент. Эксперимент состоит в том, чтобы при заданной интерпретации $I(M)$: $\Im(\Sigma) \to W$ предикатных символов и заданной интер-

претации I переменных, выбрать из основного множества A некоторый набор объектов $<a_1,...a_m>$ и подставить их вместо переменных $<x_1,...x_m>$. Далее определить значения истинности всех атомарных формул на $<a_1,...a_m>$.

Эксперимент определим как набор

$$Exp(s) = Exp(I(M)I(X(\Sigma)),s) = <<a_1,...a_m>, I(M)I(X(\Sigma))s>,$$

где $s \in S$, $s(X(A)) = <a_1,...a_m>$; $I(M)I(X(\Sigma))s$ - суперпозиция интерпретации I(M) предикатных символов, интерпретации $I(X(\Sigma))$ переменных и состояния s. Эта суперпозиция задает интерпретацию предикатных переменных в предикаты на эмпирической системе и подставляет вместо символов переменных набор объектов из основного множества эмпирической системы, что определяет конкретные значения истинности этих предикатов на данном наборе объектов. Поскольку для данной эмпирической системы M интерпретации I(M), $I(X(\Sigma))$ предикатных символов и переменных фиксированы, то эксперимент также будем обозначать через Exp(s). Запись $<<a_1,...a_m>, I(M)I(X(\Sigma))s>$, как и в случае моделей, означает, что значения истинности атомарных высказываний на объектах набора $<a_1,...a_m>$ определены. Таким образом, запись $<<a\ ,...a\ >, I(M)I(X(\Sigma))s>$ представляет собой набор значений истинности всех атомарных высказываний на объектах из $<a_1,...a_m>$. Например, для $W = \{\sim\}$ и объектов <a,b,c>

$$\begin{aligned} <<a,b,c>, I(M)I(X(\Sigma))s> = <&(a \sim a) = И, (b \sim b) = И, (c \sim c) = И, \\ &(a \sim b) = Л, (a \sim c) = И, (b \sim c) = И, \\ &(b \sim a) = Л, (c \sim a) = И, (c \sim b) = Л>. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что порядок атомарных отношений в наборе $<<a,b,c>, I(M)I(X(\Sigma))s>$ всегда фиксирован, поэтому, если взять только набор значений истинности <И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л> или будем говорить бинарный вектор ε для соответствующего эксперимента, то этот вектор будет однозначно характеризовать результаты эксперимента. Этот вектор можно представить как вершину девятимерного двоичного куба $\{0,1\}^9$. Полученный вектор ε(Exp(s)) будем называть **значением эксперимента** Exp(s).

Пусть у нас есть некоторый эксперимент Exp(s) множество значений которого представляет собой двоичный куб E. Рассмотрим взаимосвязь куба E и булевой алгебры $\Re(\Sigma)$. Как известно, любое утверждение из $\Re(\Sigma)$ есть дизьюнкция элементарных коньюнкций атомов или их отрицаний из $U(\Sigma)$. Следовательно, во-первых, значение истинности любого утверждения $A \in \Re(\Sigma)$ на эксперименте Exp(s) определено и вычисляется по правилам алгебры высказываний, во-вторых, любому утверждению $A \in \Re(\Sigma)$ соответствует некоторое подмножество $E(A) \subseteq E$ векторов, на котором (и только на котором) оно истинно. Так как $И \equiv A \vee \neg A$ и $Л \equiv A \& \neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Sigma)$, то всему множеству E и пустому подмножеству $\varnothing$ вершин так же соответствуют некоторые высказывания из $\Re(\Sigma)$. Поэтому, фактор алгебра $\Re(\Sigma)/\equiv$ высказываний и множество всех подмножеств двоичного куба E изоморфны соответственно относительно логических операций на $\Re(\Sigma)/\equiv$ и теоретико множественных операций на E. Каждому бинарному вектору ε(Exp(s)) = <И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л> $\in$ E, представляющему собой результаты некоторого эксперимента, будет соответствовать при таком изоморфизме элементарная коньюнкция $(a \sim a)\&(b \sim b)\&(c \sim c)\&\neg(a \sim b)\&(a \sim c)\&(b \sim c)\&\neg(b \sim a)\&(c \sim a)\&\neg(c \sim b) \in \Re(\Sigma)$, описывающая результаты соответствующего эксперимента, которую будем обозначать через A(Exp(s)).

Определим для эмпирической системы M множество всех возможных экспериментов $Exp = \{Exp(s) \mid s \in S\}$.

<u>Определение</u> 2.1. Формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на Exp(s) (будем писать $Exp(s) \vDash C$), тогда и только тогда, когда при определенном в эксперименте Exp(s) наборе значений истинности $\varepsilon(Exp(s))$, формула C истинна. Иначе говоря, формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на Exp(s), если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(C)$.

<u>Определение</u> 2.2. Формула $C \in \Re(\Sigma)$ **истинна** на Exp тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте $Exp(s) \in Exp$.

<u>Лемма</u> 2.1. Формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на эмпирической системе M (при классическом определении истинности высказываний на модели) тогда и только тогда, когда она истинна на Exp.

<u>Определение</u> 2.3. Система аксиом Σ истинна на Exp тогда и только тогда, когда каждая аксиома из Σ истинна на Exp.

<u>Определение</u> 2.4. **Законом на Exp** будем называть любое истинное на Exp правило C вида (1), каждое подправило которого уже не истинно на Exp.

<u>Теорема</u> 2.1. Правило C вида (1) является законом эмпирической системы M = <A,W> тогда и только тогда, когда оно является законом на Exp.

Задача 2 переформулируется в результате следующим образом:

Задача 3: Для множества правил SSub определить какие из них являются законами на Exp. После этого проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из SSub, являющееся законом на Exp.

3. События и вероятности событий.

Сделаем следующий шаг обобщения: будем предполагать, что обьекты для экспериментов выбираются некоторым случайным образом из основного множества A эмпирической системы как из генеральной совокупности объектов. Это позволит нам ввести вероятность на множестве экспериментов, не меняя пока определения эксперимента как некоторого "фрагмента" эмпирической системы.

Определим вероятность m на E.

<u>Определение</u> 3.1. **Вероятностью** на E будем называть отображение $m: E \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

3.1.1. $\sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon) = 1$.

3.1.2. $m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$.

Смысл условия 3.1.2 объясняется леммой 3.2. Он состоит в том, что вероятность должна быть согласована с истинностью высказываний: если высказывание A тождественно истинно на M, то его вероятность должна быть равна 1, если же оно тождественно ложно, то его вероятность должна быть равна 0.

<u>Определение</u> 3.2. Событием в эксперименте Exp(s) будем называть любое подмножество $E(A) \subseteq E$, $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$, $A \in \Re(\Sigma)$. Вероятностью m события E(A) будем называть величину $m(E(A)) = \sum_{\varepsilon \in E(A)} m(\varepsilon)$.

Будем говорить, что в результате эксперимента Exp(s) произошло событие E(A) или событие A, если $\varepsilon(\mathrm{Exp}(s)) \in E(A)$. Событие A является элементом булевой алгебры $\Re(\Sigma)$, которую мы так же будем называть булевой алгеброй событий. Вероятность m индуцирует вероятность на булевой алгебре $\Re(\Sigma)$.

Лемма 3.1. Функция $n(A) = m(E(A))$, $A \in \Re(\Sigma)$, определенная на $\Re(\Sigma)$, является **вероятностью на $\Re(\Sigma)$**, т.е. для любых $A,B \in \Re(\Sigma)$ функция n удовлетворяет следующим аксиомам [7] ($\vdash$ - доказуемость в исчислении высказываний):

3.1.1. $n(A \vee B) + n(A \& B) = n(A) + n(B)$;

3.1.2. $n(\neg A) = 1 - n(A)$;

3.1.3. Если $\vdash A \equiv B$, то $n(A) = n(B)$;

3.1.4. Если $\vdash A$, то $n(A) = 1$.

Но не только при доказуемости высказывания его мера должна быть равна 1. Из условия 3.1.2 определения 3.1 вероятности следует, что и при истинности любого высказывания A на эмпирической системе M, оно должно иметь вероятность равную 1.

Лемма 3.2. Для любого высказывания $A \in \Re(\Sigma)$ выполнены следующие условия:

3.2.1. $M \vDash A \Leftrightarrow n(A) = 1$;

3.2.2. $M \vDash \neg A \Leftrightarrow n(A) = 0$;

Доказательство: Докажем, что условия 3.2.1 и 3.2.2 эквивалентны. Подставим в 3.2.1 вместо высказывания A высказывание $\neg A$, получим: $M \vDash \neg A \Leftrightarrow n(\neg A) = 1 \Leftrightarrow (1 - n(A)) = 1 \Leftrightarrow n(A) = 0$. Докажем теперь условие 3.2.2. Пусть $M \vDash \neg A$, тогда A всюду ложно на M и, значит, в силу леммы 2.1 A ложно на Exp. Отсюда, в силу определения 2.2, A ложно на каждом эксперименте из Exp, поэтому для каждого $\varepsilon \in E(A)$ $\{\mathrm{Exp}(s) \mid \varepsilon(\mathrm{Exp}(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$ и $m(\varepsilon) = 0$, откуда следует, что $n(A) = 0$. Обратное доказательство получается обратным ходом рассуждения.

4. Определение вероятностного закона на Exp.

Введем определение вероятностного закона путем обобщения понятия закона на вероятностный случай. Сделаем это так, что бы понятие закона на Exp было частным случаем этого более общего определения.

Вспомним определение закона на Exp. Законом на Exp является истинное на Exp правило все подправила которого ложны на Exp. Можно иначе переформулировать понятие закона на Exp. Законами являются такие правила, истинные на Exp, которые нельзя более упростить и/или логически усилить, сохраняя их истинность. Это свойство неупрощаемости позволяет сформулировать закон не только в терминах истинности но и вероятности и тем самым перекинуть мост между детерминированным и вероятностным случаями.

Теорема 4.1. Для правила $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1) следующие два условия эквивалентны:

1. правило C является законом на Exp;

2a. условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена (т.е. $n(A_1\&...\&A_k) > 0$) и $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$;

b. условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Доказательство: Приведено в приложении.

Теорема 4.1. дает нам эквивалентное определение закона на Exp в терминах вероятностей.

Определение 4.1. **Вероятностным законом на Exp в детерминированном случае** (для вероятностей удовлетворяющих определению 3.1) будем называть правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условиям:

a) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена (т.е. $n(A_1\&...\&A_k) > 0$) и $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$;

b) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Следствие 4.1. Вероятностный закон на Exp в детерминированном случае является законом эмпирической систем M.

Доказательство: Следует из теорем 2.1 и 4.1.

Задача тестирования систем аксиом теперь сводится к задаче обнаружения вероятностных законов в детерминированном случае.

Задача 4: Проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из SSub, являющееся вероятностным законом в детерминированном случае на Exp.

5. Обобщение понятия вероятностного закона и экспериемнта для тестирование систем аксиом в условиях шумов.

Определение эксперимента Exp(s), как некоторого "фрагмента", эмпирической системы не включает в себя всех видов случайностей, которые могут быть в эксперименте и не отражает реальность проведения экспериментов как она есть. Пока что определение вероятности 3.1 в силу условия 3.1.2 исключет возможность искажения значений истинности предикатов. Чтобы обобщить понятие эксперимента на случай, когда возможны ошибки измерения, шумы или ошибки в ответах испытуемого необходимо ввести все эти случайные искажения в понятие эксперимент.

Известно [6], что в языке первого порядка и, значит, в определенных в языке первого порядка экспериментах, можно ввести несколько типов случайностей:

5.1. Случайности, связанные со случайным выбором стимулов или их случай-ным поступлением из генеральной совокупности (случайность на области [6]);

5.2. Случайности, вызывающие ошибки в определении значений истинности атомарных высказываний и связанные с ошибками измерения, ошибками в ответах испытуемого, шумами прибора или шумами воздействующими на испытуемого (случайность на множестве возможных миров [6]).

В случаях 5.1. и 5.2. вероятность может вводиться вобще говоря различным образом [6] как вероятность на "области" в случае 5.1 или как вероятность на множестве "возможных миров" в случае 5.2. Определение вероятности 3.1. является примером вероятности на "области", т.к. учитывает только случайности, связанные со случайным выбором стимулов, но в силу свойства 3.1.2 определено для экспериментов, которые являются "фрагмен-

тами" эмпирических систем и, следовательно, не содержат случайностей вида 5.2. Чтобы учесть оба типа случайностей 5.1. и 5.2. необходимо одновременно обобщить определение вероятности и эксперимента.

Определение 5.1. **Вероятностью** на E назовем отображение m: $E \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

5.1.1. $\sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon) = 1$.

Для "**детерминированных**" **экспериментов**, должно быть выполнено так же следующее условие:

5.1.2. $m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \varnothing$.

Эксперимент определим как набор

$Exp(s) = F<<a_1,...a_m>, I(M)I(X(\Sigma))s>$,

где F: $E \to E$ - случайное отображение. В случае, когда F - тождественное отображение будем говорить, что мы имеем "детерминированный" эксперимент, для которого должно быть выполнено условие 5.1.2.

"Детерминированный" эксперимент совпадает со старым определением эксперимента. Данное определение эксперимента Exp(s) представляет собой случайно искаженный функцией F "фрагмент" эмпирической системы. Характеристики функции F как случайного отображения полностью определяются вероятностью m. Определение вероятности n остается прежним.

Для экспериментов, определенных в определении 5.1 с различными типами случайностей уже нельзя требовать истинности аксиом на Exp. Поэтому определение закона на Exp теряет свой смысл. Эквивалентное определение вероятностного закона, данное в теореме 4.1, для которого должно быть выполнено условие $n(A_0/A_1 \&...\&A_k) = 1$, так же теряет смысл, в силу того, что условная вероятность не может быть равна 1 в экспериментах с шумами. Поэтому необходимо ввести обобщение этого определения путем удаления условия, которое не может быть выполнено.

Определение 5.2. **Вероятностным законом** на Exp будем называть правило C = $(A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условию:

5.2.1. Условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена и строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Покажем, что в результате удаления условия $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ из определения 4.1 вероятностного закона для детерминированого случая, мы ничего не потеряли из существа определения закона.

Вспомним, что именно свойство неупрощаемости позволило нам сформулировать определение вероятностного закона в детерминированном случае. Посмотрим на теорему 4.1 с точки зрения **неупрощаемости** закона. В вероятностных терминах свойство неупрощаемости закона звучит уже несколько иначе: для правила, истинного на M, для которого условная вероятность равна 1, неупрощаемость правила означает, что если мы возьмем любое логически более сильное его подправило, то его условная вероятность строго уменьшится и станет строго меньше 1, т.е. вероятностный закон на Exp в детерминированном случае нельзя упростить не уменьшив существенно его условную вероятность. Поэтому два эквивалентных определения закона, сформулированные в теореме 4.1 могут

быть переформулированы в терминах неупрощаемости закона, только одно из них для значения истинности, а другое для условной вероятности. Из этой переформулировки видно, что для понятия закона важны не сама истинность, или то, что условная вероятность равна 1, а невозможность его упрощения с сохранением этих оценок (истинности, вероятности и т.д.). Это дает возможность дать более общее определение закона для правил вида (1), охватывающее как детерминированный так и вероятностный случай.

5.3. Определение закона: Законом является такое правило C вида (1), характеризуемое некоторой оценкой, что его нельзя "упростить" (логически усилить в соответствии с теоремой 1.1) не уменьшив существенно этой оценки.

Эквивалентность двух различных определений закона с точки зрения данного определения закона для двух различных видов оценок - **оценки истинности** и **оценки условной вероятности равной** 1 доказана в теореме 4.1. При переходе от определения 4.1 вероятностного закона в детерминированном случае к определению 5.2 вероятностного закона мы заменили оценку закона с условной вероятности равной 1 на просто оценку условной вероятности, оставаясь в рамках определения закона 5.3.

Условная вероятность, используемая в теореме 4.1 и определениях 4.1 и 5.2 как оценка закона, интересна не только тем, что это вероятность, а еще и тем, что она является **оценкой предсказательной силы закона**, являющейся наиболее важной характеристикой законов вообще. Понятие закона всегда прежде всего связывается с его способностью предсказывать, поэтому переход от характеристики закона в терминах истинности, принятой в философской логике и связанной с принципом фальсифицируемости, к характеристике закона в терминах предсказания является не просто уходом от старой парадигмы (включая принцип фальсифицируемости), а переходом к более естественному определению закона.

Теорема 4.1 в этом случае означает, что для детерминированного случая, который характеризует возможность предсказания в случае отсутствия шумов, определения закона через истинность и условную вероятность совпадают. Но если мы имеем стохастический случай, когда правила не истинны на M, определение закона через истинность теряет свой смысл, а определение закона, основанное на условных вероятностях и предсказании сохраняет свой смысл.

Понятие гипотезы, используемое в философской логике и связанное с принципом фальсифицируемости, отличается от определения закона. В литературе нет определения закона природы. Следует подчеркнуть, что определение закона природы, и на это определение претендует наше определение, должно служить мостом между теоретическим, идеальным и эмпирическим уровнями рассмотрения. **Закон** даже эмпирический (в отличии от гипотез) **идеален**. Поэтому проверка и обнаружение закона никак не могут быть связаны с принципом фальсифицируемости. В нашем определении обнаружение закона связано с его (вероятностной) неупрощаемостью, которая тесно связана с такими присущими законам свойствам как простота, логическая сила, максимальная общность (или фальсифицируемость) и минимальность числа параметров.

6. Тестирование систем аксиом в условиях шумов.

Процесс получения результатов эксперимента в соответствии с определением 5.1 можно разделить на два этапа - получение результатов эксперимента в "чистом" виде, как

"фрагмента" некоторой эмпирической системы, а затем получение результатов реального эксперимента "добавлением" шумов. Выделить эти два этапа можно введя две вероятностных меры для значений экспериментов - вероятностную меру в детерминированном и стохастическом случаях. Первая их них Dm будет удовлетворять дополнительному требованию 5.1.2 для вероятностей в детерминированном случае, а вторая Sm будет вероятностной мерой в общем случае, как определено в определении 5.1.

Введение двух вероятностных мер позволит нам ввести вероятностную модель шумов. Вернемся к определению эксперимента в определении 5.1

$$Exp(s) = F\langle\langle a_1,\ldots a_m\rangle, I(M)I(X(\Sigma))s\rangle,$$

Стохастический эксперимент Exp(s) получается в два этапа: сначала получается результат детерминированного эксперимента в соответствии с вероятностной мерой Dm, а затем применяется случайное преобразование F, отражающее влияние на результаты детерминированного эксперимента шумов, ошибок, неточности приборов и т.д. в соответствии с вероятностной мерой Sm. Приведем соответствующие определения.

Определим переход от значений детерминированного эксперимента, представленного некоторыми наборами в двоичном кубе E, к значению стохастического эксперимента как действие случайной функции $F: E \to E$. Отображение F есть некоторое случайное взаимнооднозначное отображение. Вероятностные характеристики этого отображения и, соответственно, модель шумов задаются соотношением двух вероятностей Dm и Sm. При этом вероятность Sm - есть вероятность реальных экспериментов, а Dm - вероятность гипотетического "идеального" эксперимента на эмпирической системе.

Вернемся к задаче тестирования систем аксиом. Теоремой 4.1 и следствием 4.1 для вероятностей Dm эта задача была решена и сведена к задаче 4. Можно ли доказать аналогичные теоремы в стохастическом случае для вероятностей Sm? К сожалению, в общем случае это принципиально невозможно ввиду огромного разнообразия возможных моделей шумов, ошибок испытуемых, моделей приборов и т.д. Тем не менее большой опыт решения практических задач, а так же модельные эксперименты [5,10-13] показывают, что понятие вероятностного закона устойчиво относительно большого числа типов шумов. Устойчивость понятия вероятностной закономерности относительно некоторого типа шумов означает, что если некоторое множество правил $\{C_i\}$ являются вероятностными законами в детерминированном случае, то это же самое множество правил является вероятностными законами и в стохастическом случае. Тем самым задача тестирования систем аксиом для данного типа шумов может быть сведена задаче 4, за исключением проверки условия, что условные вероятности вероятностных законов равны 1. Последнее условие в стохастическом случае не может быть выполнено и должно быть заменено на величину равную (1-(оценка уровня шумов)). Оценку уровня шумов можно получить в процессе эксперимента, например, время от времени случайно предъявляя совершенно одинаковые стимулы [13].

Эти рассуждения ставят следующую **проблему**: определить какие вероятности и модели шумов сохраняют множество вероятностных законов.

Определение 6.1. Назовем **сохраняющими моделями шумов** те пары вероятностей Sm,Dm которые сохраняют, содержащиеся в них вероятностные законы (т.е. множество вероятностных законов для верояностей Sm и Dm одинаково).

Если мы ограничим себя рассмотрением только сохраняющих моделей шумов, то задача тестирования систем аксиом в стохастическом случае сводится к задаче:

Задача 5: Для сохраняющих моделей шумов, тестирование системы аксиом Σ осуществляется проверкой для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из SSub, являющееся вероятностным законом на Exp.

Таким образом, для решения задачи тестирования системы аксиом в стохастическом случае необходимо знать (либо проверить машинным моделированием) является ли модель шумов сохраняющей или нет. Поэтому данная работа ставит проблему: опрелить множество сохраняющих моделей шумов.

7.Метод обнаружения закономерностей.

Опишем метод тестирования аксиом, который проверяет, является ли некоторая аксиома системы аксиом S Вероятностным Законом на Exp. Понятие Вероятностного Закона требует проверки некоторых вероятностных неравенств. Проверить выполнимость этих вероятностных неравенств на выборке из серии экспериментов можно с помощью определенных статистических критериев.

Предположим, что случайно и независимо в соответствии с вероятностной мерой μ проведена серия экспериментов и получена выборка экспериментов $Samp \subset Exp$.

Для статистической проверки любой аксиомы из S нам достаточно иметь статистику - число повторений каждого события булевой алгебры B(S). Получение этой статистики упрощается тем, что нам достаточно знать только статистику для всех атомов булевой алгебры. Статистика любого события является суммой статистик тех атомов, из которых состоит событие. Статистику для атомов можно представить в виде специального массива.

Определим массив M объема 2^{n+1} (в соответствии с числом атомарных формул $P_0,P_1,P_2,...,P_n$ в U(S). Значения истинности каждой атомарной формулы зададим числами 1,0 (1 - "истина" и 0 - "ложь"). Каждый элемент массива $M[i_1,...,i_{n+1}]$, $i_1,...,i_{n+1} \in \{0,1\}$ равен числу сочетаний значений истинности $i_1,...,i_{n+1}$ атомарных формул $P_0,P_1,P_2,...,P_n$ в экспериментах Samp. (после фиксации интерпретации, подстановки объектов вместо переменных и определения значений истинности атомарных формул). В дальнейшем мы будем предполагать, что статистика (число случаев) любого события $C \in B(S)$ нам известна и будем обозначать ее через n(C).

Проверим сначала для некоторой аксиомы $C \in S$, что выполнено первое условие Вероятностной Закономерности - условная вероятность определена, т.е. $\mu(A_1\&...\&A_n) > 0$ для $C = (A_1\&...\&A_n \Rightarrow A_0)$. Для этого достаточно проверить, что $n[A_1\&...\&A_n] > 0$. Из определения вероятности 3.1. и свойства вероятности 3.2.1 следует, что если $n[A_1\&...\&A_n] > 0$, то вероятность не равна 0. На этом проверка первого условия заканчивается.

Перейдем к проверке второго условия. Рассмотрим сначала правила вида $P^{\varepsilon 1}{}_1 \Rightarrow P^{\varepsilon 0}{}_0$. Так как в посылке стоит только один предикатный символ $P^{\varepsilon 1}{}_1$, который можно удалить в процессе обобщения, то определение вероятностной закономерности 5.2 означает, что вероятность правила $C = (\Rightarrow P^{\varepsilon 0})$ с пустой посылкой строго больше, чем условная вероятность правила $P^{\varepsilon 1}{}_1 \Rightarrow P^{\varepsilon 0}{}_0$, т.е

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/P^{\varepsilon 1}{}_1) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)$.

Последнее неравенство можно переписать в виде

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$

Для проверки этого неравенства сформулируем гипотезу H_0 о независимости предикатных символов $P^{\varepsilon 1}{}_1$ и $P^{\varepsilon 0}{}_0$

H_0: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) = \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\ \mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$,

против альтернатив:

H_1: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) \neq \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$,

Эта гипотеза является сложной с одним ограничением и двумя степенями свободы [9]. Если гипотеза H_0 верна, то предикатные символы $P^{\varepsilon 1}{}_1$ и $P^{\varepsilon 0}{}_0$ независимы и неравенство для условной вероятности не выполнено. Тогда формула $P^{\varepsilon 1}{}_1 \Rightarrow P^{\varepsilon 0}{}_0$ не является вероятностной закономерностью. Если гипотеза H_0 неверна, то верна одна из альтернативных гипотез H_1 и тогда значения $P^{\varepsilon 1}{}_1$ и $P^{\varepsilon 0}{}_0$ зависимы между собой.

Гипотезу H_0 можно переформулировать также следующим образом. Пусть числа $n(P^{\varepsilon 1}{}_1)$ и $n(P^{(1-\varepsilon 1)}{}_1)$ фиксированы, а числа $n(P^{\varepsilon 1}{}_1\&P^{\varepsilon 0}{}_0)$ и $n(P^{(1-\varepsilon 1)}{}_1\&P^{\varepsilon 0}{}_0)$ являются независимыми случайными величинами. Тогда гипотеза H_0 является гипотезой о равенстве вероятностей в двух совокупностях:

H_0: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) = \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$,

против альтернатив:

H_1: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) \neq \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$,

Если гипотеза H_0 неверна, то верна одна из гипотез H_1, и либо $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/P^{\varepsilon 1}{}_1) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)$, либо $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/P^{\varepsilon 1}{}_1) < \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)$.

Если верно первое неравенство, то тестируемая формула

$$P^{\varepsilon 1}{}_1 \Rightarrow P^{\varepsilon 0}{}_0 \qquad (2)$$

является вероятностной закономерностью, если второе, то не является.

По соотношениям

$n(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) > (n(P^{\varepsilon 0}{}_0)*n(P^{\varepsilon 1}{}_1))/N$

$n(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) < (n(P^{\varepsilon 0}{}_0)*n(P^{\varepsilon 1}{}_1))/N$

где N - общее количество экспериментов, можно определить, какое из неравенств первое или второе имеет место.

Чтобы проверить гипотезу H_0 против альтернатив H_1 воспользуемся точным критерием независимости Фишера [1, с.739]. Этот критерий является равномерно наиболее мощным, несмещенным критерием как в случае проверки гипотезы о двумерной независимости, так и в случае проверки гипотезы о равенстве вероятностей в двух совокупностях [9, с.742]. Применив этот критерий с некоторым доверительным уровнем α, мы получим, что, либо гипотеза H_0 верна и, следовательно, значения истинности предикатных символов $P^{\varepsilon 1}{}_1$ и $P^{\varepsilon 0}{}_0$ независимы, и, значит, нет никакой закономерности, либо H_0 не верна, и мы принимаем одну из гипотез H_1. Если гипотеза H_1 означает, что $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&P^{\varepsilon 1}{}_1) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)*\mu(P^{\varepsilon 1}{}_1)$, то тестируемая формула (1) является вероятностной закономерностью с доверительным уровнем α.

Рассмотрим в общем случае произвольную аксиому $C = (P^{\varepsilon 1}{}_1\&\ldots\&P^{\varepsilon n}{}_n \Rightarrow P^{\varepsilon 0}{}_0) \in S$. Сведем этот случай к предыдущему. Введем обозначения $DC = \{P^{\varepsilon 1}{}_1,\ldots,P^{\varepsilon n}{}_n\}$, $D \subset DC$ (включение строгое), $DC^{\&} = P^{\varepsilon 1}{}_1\&\ldots\&P^{\varepsilon n}{}_n$, $D^{\&}$ -конъюнкция литер из D.

Для проверки является ли аксиома C вероятностной закономерностью, надо проверить, выполняется ли для любого подмножества D (включая $\varnothing$) соотношение

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/DC^{\&}) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/D^{\&})$

Будем рассматривать конъюнкцию $D^{\&}$ как одну формулу R_1 из $\Re(\Sigma)$, а конъюнкцию литер из DC\D как другую формулу R_2 из $\Re(\Sigma)$. В случае, когда $D = \varnothing$, R_1 = true, а $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/D^{\&}) = \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0)$. Тогда получим неравенство:

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1\&R_2) > \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1)$.

Так как

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1\&R_2) = \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_1\&R_2)/\mu(R_1\&R_2) = \mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2/R_1)/\mu(R_2/R_1)$,

то предыдущее неравенство перейдет в неравенство

$\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2/R_1) > \mu(R_2/R_1)*\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1)$.

Так как $n[A_1\&...\&A_n] > 0$, то $\mu(DC\&) > 0$; $\mu(R_1) > 0$; $\mu(R_2) > 0$ в силу включений $D \subset DC$ и $DC\backslash D \subset DC$. Отсюда следует, что все проделанные преобразования корректны, т.к. ни одна вероятность в знаменателе не равна 0.

Для проверки последнего неравенства также сформулируем гипотезу о независимости

H_0: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2/R_1) = \mu(R_2/R_1)*\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1)$

против альтернатив:

H_1: $\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2/R_1) \neq \mu(R_2/R_1)*\mu(P^{\varepsilon 0}{}_0/R_1)$.

Ограничиваясь рассмотрением только тех событий, для которых формула R_1 истинна, можно определить подалгебру $\Re(\Sigma)(R\ )$ булевой алгебры $\Re(\Sigma)$, рассматривая только события на которых R_1 истинна. На этих событиях определим вероятностную меру $\mu'(E) = \mu(E\&R_1)/\mu(R_1)$. Тогда гипотезы H_0 и H_1 примут вид:

H_0: $\mu'(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2) = \mu'(R_2)*\mu'(P^{\varepsilon 0}{}_0)$

H_1: $\mu'(P^{\varepsilon 0}{}_0\&R_2) \neq \mu'(R_2)*\mu'(P^{\varepsilon 0}{}_0)$

Гипотеза H_0 проверяется также с помощью критерия Фишера с некоторым доверительным уровнем α.

Аксиома C будем **вероятностной закономерностью** с доверительным уровнем α, если гипотеза H_0 отвергается с уровнем α для любого подмножества $D \subset DC$ и принимаемая гипотеза H_1 имеет неравенство >.

Если аксиома C не является Вероятностной Закономерностью, то необходимо проверить не является ли какая-нибудь более общая часть аксиомы C вероятностной закономерностью. Для этого в качестве DC берутся последовательно всевозможные подмножества $D \subset DC$ (включение строгое) условий посылки правила и для каждого $D' \subset D \subset DC$ снова проверяются все гипотезы и неравенства с целью определить является ли правило с посылкой D вероятностной закономерностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. Foundations of measurement. Vol. 1. - NY, London: Acad. press, 1971. - 577p.

2. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. Foundations of measurement. Vol. 3. - NY, London: Acad. press, 1990. - 356p.

3. Витяев Е.Е. Семантический подход к созданию баз знаний. Семантический вероятностный вывод наилучших для предсказания ПРОЛОГ-программ по вероятностной модели данных. // Логика и семантическое программирование (Вычислитель-ные системы, вып. 146), Новосибирск, 1992, с.19-49.

4. Витяев Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания // Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 67). Новосибирск, 1976, с. 54-68.

5. Витяев Е.Е., Москвитин А.А. Введение в теорию открытий. Программная система DISCOVERY // Логические методы в информатике (Вычислительные системы, вып. 148), Новосибирск, 1993, с.117-163.

6. Halpern J.Y. An analysis of first-order logics of probability // Artificial Intelligence v.46, (1990), p.311-350.

7. J.I.Fenstad, Representation of probabilities defined on first order languages // J.N.Crossley, ed., Sets, Models and Recursion Theory: Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloguium (1967) 156-172.

8. И.И.Гихман, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. Теория вероятностей и математическая статистика. "Вища школа", Киев, 1079, с. 408.

9. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи // М., Наука, 1973, с.899.

10.Витяев Е.Е., Логвиненко А.Д. Метод тестирования систем аксиом. // Теория вычислений и языки спецификаций (Вычислительные системы, 152), Новосибирск, 1995, с.119-139.

11.Витяев Е.Е., Москвитин А.А. ЛАДА - программная система логического анализа данных // Методы анализа данных (Вычислительные системы вып.111), Новосибирск, 1985, с.38-58.

12.Витяев Е.Е. Логико-операциональный подход к анализу данных // Комплексный подход к анализу данных в социологии. Тр. Института Социологических исследований АН, Москва, 1989, с. 113-122.

13. A.D. Logvinenko, W.Byth, E.E.Vityaev We can order stimuli even when we are not able to see them: An evidence in favour of fuzzy sensory threshold, Perception and Psychophysics, 1997, (in press).

Приложение. Доказательство теоремы 4.1

Теорема 4.1. Для правила $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1) следующие два условия эквивалентны:

1. правило C является законом на Exp;
2. a) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена (т.е. $n(A\ \&...\&A\ ) > 0$) и равна 1;

   b) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Доказательство:

4.1.1. Предположим, что правило C является законом на M. Докажем, что тогда правила определены. Если правило C является законом на M, то подправило $(A_2\&...\& A_k \Rightarrow \neg A_1)$ не всегда истинно на M. Значит есть эксперименты, являющиеся исключениями из этого правила, т.е. эксперименты на которых высказывание $(A_2\&...\&A_k\ \&A_1)$ истинно. Тогда $\{Exp(I(M),s) \mid \varepsilon(Exp(I(M),s)) \in E(A_2\&...\&A_k\ \&A_1)\} \neq \varnothing$ и, значит, в силу свойства 2 оп-

ределения 3.1, $m(E(A_2\&...\&A_k \&A_1)) \neq 0$ и $n(A_2\&...\&A_k \&A_1) \neq 0$. Отсюда получаем, что $n(A_2\&...\&A_k \&A_1) = n(A_1\&A_2\&...\&A_k) > 0$ и, значит, условная вероятность правила C определена. Отсюда следует, что и условные вероятности всех подправил определены, т.к. из $\{A_{i1},...,A_{ih}\} \subseteq \{A_1,...,A_k\}$, следует, что $n(A_{i1}\&...\&A_{ih}) \geq n(A_1\&...\&A_k) > 0$.

4.1.2. Докажем теперь, что $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1 \Leftrightarrow$ правило C истинно на Exp. Докажем, что из $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ следует истинность правила C на Exp. Предположим противное, что оно не истинно на Exp. Это означает, что существуют эксперименты на которых высказывание $A_1\&...\&A_k\&\neg A_0$ истинно и, значит, множество экспериментов $\{Exp(s) ¦ \varepsilon(Exp(s)) \in E(A_1\&...\&A_k\&\neg A_0)\} \neq \varnothing$ не пусто. Отсюда, вследствии условия 3.1.2 определения вероятности, следует, что $m(A_1\&...\&A_k \&\neg A_0) \neq 0$. Но это противоречит условию $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$, т.к. $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = n(A_0\&A_1\&...\&A_k)/n(A_1\&...\&A_k) = n(A_0/A_1\&...\&A_k)/(n(A_0\&A_1\&...\&A_k) + n(\neg A_0\&A_1\&...\& A_k))$ и поскольку мы доказали, что $n(\neg A_0\&A_1\&...\&A_k) \neq 0$, то $n(A_0/A_1\&...\&A_k) < 1$. Обратное доказательство, что из истинности правила C на Exp следует, что $n(A_0/A_1 \&...\&A_k) = 1$ проводится теми же рассуждениями, проведенными в обратном порядке.

4.1.3. Из 4.1.1 и 4.1.2 следует, что из условия теоремы 1 следует условие 2a. Из 4.1.1 следует определенность правил, а из 4.1.2 следует, что условная вероятность правил равна 1.

4.1.4. Докажем, что из условия 1 теоремы следует условие 2b. Любое подправило $A_{i1}\&...\&A_{ih} \Rightarrow L$ правила C ложно на M, где L - литера вида $\neg A$, для правил вида 1 теоремы 1.1, либо вида A, для правил вида 2. Ложность имеет место тогда и только тогда, когда $\{Exp(s) ¦ \varepsilon(Exp(s)) \in E(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L)\} \neq \varnothing$, что в силу условия 3.1.2 определения вероятности, эквивалентно условиям $m(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L) > 0$ и $n(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L) > 0$. Из последнего неравенства следует $n(L/A_{i1}\&...\&A_{ih}) = n(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&L)/n(A_{i1}\&...\&A_{ih}) = n(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&L)/(n(A_{i1}\&...\&A_{ih}\&\neg L) + n(A_{i1}\&...\& A_{ih}\&L)) < 1$. Но поскольку, в силу пункта 4.1.2 условная вероятность правила C равна 1, то ложность любого подправила на M эквивалентна неравенствам $n(L/A_{i1}\&...\&A_{ih}) < 1 = n(A_0/A_1\&...\&A_k)$.

4.1.5. Таким образом, мы доказали, что из условия 1 следуют условия 2a и 2b, что доказывает теорему в одну сторону.

4.1.6. Докажем, что из условий 2a и 2b следует условие 1 теоремы. Если для правила C условная вероятность определена, то в силу пункта 4.1.1 будут определены и условные вероятности всех его подправил. Так как условная вероятность правила C, в силу условия 2a равна 1, то в силу пункта 4.1.2 правило C будет истинным на Exp. Для доказательства того, что правило C будет законом необходимо доказать, что каждое подправило этого правила ложно. Это можно сделать проводя те же рассуждения, что и в пункте 4.1.4, только в обратном порядке.