Лекция 5. Конструктивные числовые представления величин

Исследования, проводимые в психологии, социологии, принятии решений, экспертном оценивании и других областях, показывают, что есть много сложных, структурных «нечисловых» величин (частичные порядки, толерантности, решетки и т.д.). Логический анализ таких величин показал, что эмпирические системы таких величин нельзя сильным гомоморфизмом отобразить в поле вещественных чисел, т.е. для таких величин нельзя построить их числовые представления в теории измерений.

Смысл числового представления в том, что бы закодировать эмпирическую систему числами так, что бы по значениям чисел мы всегда могли определить значения всех отношений и операций на эмпирической системе.

Смыслу числового представления точнее всего соответствует понятие конструктивизации эмпирической системы. В этом случае значениям величины приписываются натуральные, рациональные или другие числа (или коды) так, чтобы значения отношений и операций в эмпирической системе можно было эффективно вычислимы по этим числам.

Такой способ получения числовых представлений:

1. не накладывает на числовые отношения и операции никаких ограничений кроме эффективности;
2. применим практически к любой системе аксиом;
3. не требует существования гомоморфизма в какие-то другие числовые системы, что накладывает на них дополнительные ограничения.

Для построения конструктивных числовых представлений воспользуемся Теорией Конструктивных Моделей (ТКМ).

Напомним, что мы рассмотрели основные определения и проблемы теории измерений. В данном параграфе мы сформулируем основные определения и проблемы конструктивных числовых представлений так, чтобы была видна полная аналогия этих определений с определениями и проблемами теории измерений.

Пусть знания о некоторой величине, свойстве, признаке сформулированы в виде системы аксиом Σ сигнатуры

$\Omega = \langle P_1,\ldots,P_n, \rho_1,\ldots,\rho_m, c_0,c_1,c_2,\ldots\rangle$,

P_i , $i \le n$, – предикатные символы;

ρ_j , $j \le m$, – символы операций;

$c_0,c_1,c_2,\ldots$ – символы констант.

Пусть величина представлена эмпирической системой $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{A}; \Omega_{\mathfrak{I}}\rangle \in AC_\omega(\Sigma)$ сигнатуры Ω, удовлетворяющей системе аксиом Σ, где $AC_\omega(\Sigma)$ – множество счетных моделей системы аксиом Σ.

При конструктивном представлении величин значения $a \in A$ величины $\mathfrak{I} = \langle A; \Omega_{\mathfrak{I}}\rangle$ нумеруются (кодируются).

Нумерацией множества A называется отображение $\nu:N \to A$ множества (подмножества) N натуральных (рациональных) чисел N на A,

Определение 1. Пару $(\mathfrak{I},\nu)$ будем называть конструктивным числовым представлением величины $\mathfrak{I}$ (*конструктивной системой*), а нумерацию

ν – конструктивным числовым представлением (*конструктивизацией*),

если существует характеристические общерекурсивные функции $P^N_1,\ldots,P^N_n$ со значениями во множестве $\{0,1\}$,

общерекурсивные функции $\rho^N_1,\ldots,\rho^N_m$ и

натуральные числа c^N_0, c^N_1, $c^N_2,\ldots$ такие, что

1. $P^{\mathfrak{I}}_i(\nu n_1,\ldots, \nu n_{mi}) \Leftrightarrow (P^N_i(n_1,\ldots,n_{mi}) = 1)$, $i = 0,1,\ldots,n$;
2. $\rho^{\mathfrak{I}}_j(\nu n_1,\ldots, \nu n_{mj}) = \nu\rho^N_j (n_1,\ldots,n_{mj})$, $j = 1,\ldots,m$;
3. $c^{\mathfrak{I}}_l = \nu c^N_l$, $l = 1, 2, 3, \ldots$ ♦

Конструктивное числовое представление ν аналогично шкале, только вместо числовых отношений, операций и констант используются общерекурсивные функции и натуральные числа.

Определение 2. Конструктивной числовой системой является система

$N = \langle N; \Omega_N \rangle$, $\Omega_N = \{P^N{}_0, P^N{}_1, \ldots, P^N{}_n, \rho^N{}_1, \ldots, \rho^N{}_m, c^N{}_0, c^N{}_1, c^N{}_2, \ldots\}$

Сформулируем проблемы существования и единственности для конструктивного числового представления.

Проблема существования. Доказать, что для любой системы $\Im \in AC_\omega(\Sigma)$ существует конструктивное числовое представление и существует алгоритм ограниченной (минимальной) сложности, реализующий построение всех этих конструктивизаций.

Проблема единственности и адекватности. Найти различные способы конструктивного числового представления величин и доказать, что метод инвариантен относительно выбора конструктивного числового представления величин.

Но в данном случае очевидно, что метод не должен использовать числовые представления сами по себе, а только использовать их как способ кодирования эмпирической системы.

Пример конструктивного представления

Рассмотрим отношение строгого линейного порядка P.

Оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\neg\, a < a$;
2. $a < b \,\&\, b < c \Rightarrow a < c$;
3. $a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$.

Теорема: Пусть величина $\Im = \langle A; < \rangle \in AC_{fin}(\Sigma)$ – является строгим линейным порядком на конечном множестве A, тогда существует нумерация основного множества ν: $N \rightarrow \mathbf{A}$, такая что:

$a_i < b_j \Leftrightarrow i < j$.

Конструктивное числовое представление процедур шкалирования для экстенсивных величин

В теории измерений [143] такие величины как массы, длина, скорость задаются системой аксиом экстенсивных величин.

Определение 3. Эмпирическая система $\Im = \langle A; <, \bullet \rangle$, $A \neq \varnothing$, является замкнутой экстенсивной структурой, если выполнены следующие аксиомы:

1. < - слабый линейный порядок;
2. $\forall x,y,z\ (x\bullet(y\bullet z) \sim (x\bullet y)\bullet z)$;
3. $\forall x,y,z\ (x \leq y \Leftrightarrow z\bullet x \leq z\bullet y \Leftrightarrow x\bullet z \leq y\bullet z)$;
4. Для любых x,y,z,u; если $x < y$, то существует натуральное число n, $nx\bullet z < ny\bullet u$, $nx = x\bullet\ldots\bullet x$.

Числовые представления экстенсивных величин определяются следующей теоремой.

Теорема [143]. Эмпирическая система $\Im = \langle A; <, \bullet \rangle$, $A \neq \varnothing$, является замкнутой экстенсивной структурой тогда и только тогда, когда существует отображение φ: $A \rightarrow Re$, удовлетворяющее следующему условию: для любых $a,b \in A$

1. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$,
2. $\varphi(a\bullet b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Из теоремы следует, что числовым представлением замкнутой экстенсивной структуры является её сильный гомоморфный образ в $R = \langle Re, <, + \rangle$. Каждому значению $a \in A$ экстенсивной величины $\Im = \langle A; <, \bullet \rangle$ можно сопоставить действительное число. Считается, что этой теоремой дается математическая модель измерительных приборов экстенсивных величин (весов, линейки и т.д.).

Эта теорема, тем не менее, не дает способ построения отображения φ (шкалирования прибора). Шкала прибора, а в дальнейшем и результаты измерения, определяются процедурой шкалирования прибора, которая дает нам значения φ в отдельных точках. Процедура шкалирования опирается на некоторую алгебраическую спецификацию, но ввиду ее конструктивного характера ей нужны, вообще говоря, другие свойства величины, чем те, которые требуются для гомоморфного вложения в Re.

Поэтому более адекватным и конструктивным представлением экстенсивных величин является алгебраическая спецификация процедуры шкалирования величины. Проиллюстрируем этот подход на примере экстенсивных величин.

Алгебраическая спецификация процедуры шкалирования может быть задана аксиомами 1,2,3 и следующей схемой аксиом:

4'. $\forall y \exists x (kx \sim y)$, $k = 1,2,...$,

$\exists x,y \neg(x \sim y)$.

Алгебраическим представлением процедуры шкалирования экстенсивных величин является эмпирическая система $\Im = \langle B; <, \bullet \rangle$, удовлетворяющая аксиом 1-3,4'.

Такая процедура может быть порождена произвольным своим элементом b, таким что $\neg(b \bullet b \sim b)$.

Конструктивное числовое представление факторсистемы $\Im/\sim$ дает следующая теорема.

Теорема. Факторсистема N/~, удовлетворяющая системе аксиом 1-3,4', изоморфна $\Re a = \langle Ra^+ ; \leq, + \rangle$, $R^+a = \{m/n \mid m,n = 1,2,...\}$.

Конструктивное числовое представление законов.

Алгебраическое и конструктивное представление структур ранга (2,2)

Рассмотрим модель $\langle M \times N; \sim \rangle$, $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$, удовлетворяющую следующей аксиоме:

Аксиома 1. $\sim$ - отношение эквивалентности на $M \times N$.

Определим на M и N отношения эквивалентности:

$$i \sim j \Leftrightarrow \forall \alpha((i,\alpha) \sim (j,\alpha));$$

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \forall i ((i,\alpha) \sim (i,\beta)) \qquad (10)$$

Эти отношения позволяют определить отображение:

$$f: (M/\sim)\times(N/\sim) \to (M\times N/\sim), \quad f([i],[\alpha]) = [i,\alpha] \qquad (11)$$

где $[i],[\alpha],[i,\alpha]$ – классы эквивалентных элементов в $M/\sim$, $N/\sim$, $M\times N/\sim$.

Отношения эквивалентности будут согласованы, если выполнены следующие аксиомы подстановочности [5]:

Аксиомы 2.

$$(i,\alpha) \sim (i,\beta) \Leftrightarrow (j,\alpha) \sim (j,\beta),$$

$$(i,\alpha) \sim (j,\alpha) \Leftrightarrow (i,\beta) \sim (j,\beta).$$

Лемма 1. Из аксиом 1,2 следует, что следующие отображения взаимно-однозначны:

$f_{\alpha 0}: (M/\sim) \to (M\times N/\sim)$, $f_{\alpha 0}([i]) = [i,\alpha_0]$, $\alpha_0 \in N$;

$f_{i0}: (N/\sim) \to (M\times N/\sim)$, $f_{i0}([\alpha]) = [i_0,\alpha]$, $i_0 \in M$;

в отображении (11) классы $[i]$, $[i,\alpha]$ однозначно определяют класс $[\alpha]$, а классы $[\alpha]$, $[i,\alpha]$ - класс $[i]$.

Так как $f_{\alpha 0}, f_{i0}$ взаимно-однозначны, то существуют обратные отображения $f^{-1}_{\alpha 0}$, f^{-1}_{i0}. Определим операцию

$$[i,\alpha_0]\bullet[i_0,\alpha] = f(f^{-1}_{\alpha 0}([i,\alpha_0]),f^{-1}_{i0}([i_0,\alpha])) = [i,\alpha] \qquad (12)$$

Если множества $M_{\alpha 0} = f^{-1}_{\alpha 0}(M\times N/\sim)$, $N_{i0} = f^{-1}_{i0}(M\times N/\sim)$ совпадают со всем множеством $M\times N/\sim$ и операция (12) обратима справа и слева, то мы получим квазигруппу. Эти требования выполняются, если имеет место следующая аксиома:

Аксиома 3. Неограниченная разрешимость: для любых трех из четырех элементов $i,j \in M$, $\alpha,\beta \in N$ четвертый можно подобрать так, что $(i,\alpha) \sim (j,\beta)$.

Лемма 2. Из аксиом I-III следует, что операция (12) определяет на $M\times N/\sim$ квазигруппу.

$\langle Q; \bullet \rangle$, $Q = M\times N/\sim$, $\bullet$ - операция (12) (13)

Эта квазигруппа является лупой с единицей $e = [i_0,\alpha_0]$.

Лемма 3. Из условия Томсена вытекают аксиомы подстановочности II.

Условие Томсена в $\langle Q; \bullet \rangle$ можно представить следующей аксиомой.

Аксиома 4. Из $p_1\cdot q_2 = p_2\cdot q_1$ и $p_3\cdot q_1 = p_1\cdot q_3$ следует $p_3\cdot q_2 = p_2\cdot q_3$.

Лемма 4. Модель $\langle M\times N; \sim \rangle$, $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$, удовлетворяющая аксиомам I,III и условию Томсена, определяет абелеву группу с операцией (12).

По лемме 2, $f_{\alpha 0}(M/\sim) = f_{i0}(N/\sim) = M\times N/\sim$. Тогда операцию (12) можно преобразованиями $f^{-1}_{\alpha 0}$ и f^{-1}_{i0} перевести на множества $M/\sim$, $N/\sim$. Получим операции

$$[i] \bullet [j] = f^{-1}_{\alpha 0}(f_{\alpha 0}([i]) \cdot f_{\alpha 0}([j])) = f^{-1}_{\alpha 0}([i,\alpha_0] \bullet [j,\alpha_0])),$$
$$[\alpha] \bullet [\beta] = f^{-1}_{i0}(f_{i0}([\alpha]) \cdot f_{i0}([\beta])) = f^{-1}_{i0}([i_0,\alpha] \bullet [i_0,\beta])). \quad (15)$$

Эти операции на $M/\sim$ и $N/\sim$ определяют абелевы группы, изоморфные абелевой группе (13).

Определение. Алгебраическим представлением законов ранга (2,2) будем называть модель $\langle M\times N; \sim \rangle$, удовлетворяющую аксиомам 1,3 и условию Томсена. Величинами будем называть абелевы группы $\langle M/\sim; \bullet \rangle$, $\langle N/\sim; \bullet \rangle$, $\langle M\times N/\sim; \bullet \rangle$ с операциями (15) и (12), изоморфные между собой. Закономерная связь между величинами определяется операцией (12).

Алгебраическое представление закона ранга (2,2) в разных областях знаний может дополниться разными аксиомами. В физике, поскольку используемые там физические величины линейно упорядочены и архимедовы, могут добавляться аксиомы типа 1-6*. В других областях таких, как экономика, социология, психология и т.д., должны использоваться не только линейные порядки и аксиома Архимеда, но и более сложные порядки (частичные, деревья, структуры и т.д.) и неархимедовы аксиомы.

Получим конструктивное представление для конечно-порожденных абелевых групп.

Теорема. Модель $\langle M\times N; \sim\rangle$, удовлетворяющую аксиомам 1,3 и условию Томсена, конечно-порожденную относительно операции (12), можно отобразить в прямую сумму бесконечных циклических групп целых чисел и примарных циклических групп вычетов целых чисел $Z = Z_1\oplus\ldots\oplus Z_n \oplus Z^{p1}{}_1\oplus\ldots\oplus Z^{pl}{}_l$ так, что величины, представленные абелевыми группами $\langle M/\sim; \cdot \rangle$, $\langle N/\sim; \cdot \rangle$, $\langle M\times N/\sim; \cdot \rangle$ будут изоморфны Z, а закономерная связь, представленная операцией (12), перейдет в операцию сложения в Z. Таким образом, будут существовать изоморфизмы $\varphi: M/\sim \ \to Z$, $\psi: N/\sim \ \to Z$, $\chi: M\times N/\sim \ \to Z$, связанные соотношением

$$\chi([i,\alpha]) = \varphi([i]) \oplus \psi([\alpha]) \quad (16)$$

где $\oplus$ операция в Z.