ЗАДАНИЕ 1

Определения ассоциативного кольца и алгебры над полем. Определение подкольца, подалгебры. Подалгебра, порожденная множеством элементов. Все алгебры в данном задании предполагаются ассоциативными.

Задача 1. Элемент e алгебры A называется правой (левой) единицей, если для любого $a \in A$ выполнено равенство $ae = a$ $(ea = a)$. Доказать, что правая и левая единицы совпадают.

Задача 2. Доказать, что любая алгебра является подалгеброй алгебры с единицей.

Задача 3. Пусть A — алгебра. Доказать, что множество $M_n(A)$ всех матриц порядка $n \times n$ над A является ассоциативной алгеброй относительно обычного матричного умножения.

Алгебра A называется *конечномерной*, если размерность пространства A конечна.

Задача 4. Элемент a алгебры A называется алгебраическим над полем F, если он является корнем многочлена $f(x)$ (т.е. $f(a) = 0$) с коэффициентами из поля F. Доказать, что каждый элемент конечномерной алгебры A является алгебраическим над полем F.

Подмножество I алгебры A называется *правым* (*левым*) *идеалом*, если I — подпространство пространства A и $xa \in I$ $(ax \in I)$ для любых $x \in I$, $a \in A$. Подмножество I алгебры A называется *идеалом*, если I — правый и левый идеал. Как легко видеть, алгебра A и пространство $\{0\}$ являются идеалами в A. Идеал отличный от A и $\{0\}$ называется *собственным*. Алгебра A называется *простой*, если $A^2 = A$ и в A нет собственных идеалов.

Пусть I — идеал алгебры A. Рассмотрим фактор-пространство $\overline{A} = A/I$ и зададим на нем умножение, полагая $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, здесь $\overline{a}$ — образ элемента a в фактор-пространстве $\overline{A}$.

Задача 5. Доказать, что $\overline{A}$ — ассоциативная алгебра.

Пусть A, B — алгебры. Линейное отображение ϕ пространства A в пространство B называется *гомоморфизмом*, если $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Множество $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A : \phi(a) = 0\}$ — *ядро* ϕ. Гомоморфизм ϕ — *изоморфное вложение*, если $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$.

Задача 6. Доказать, что ядро гомоморфизма алгебры A в алгебру B является идеалом в A.

Задача 7. Пусть A — простая алгебра. Доказать, что алгебра $M_n(A)$ также проста.