ЗАДАНИЕ 11
Тензорные произведения алгебр,
Теорема Веддерберна-Мальцева

Пусть A и B — алгебры над полем F. Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_F B$ пространств A и B над полем F. Определим на пространстве $A \otimes_F B$ умножение, полагая

$$(\sum_i a_i \otimes b_i)(\sum_j c_j \otimes d_j) = \sum_{ij}(a_i c_j \otimes b_i d_j) \text{ для всех } a_i, c_j \in A, b_i, d_j \in B.$$

Задача 1. Доказать, что $A \otimes_F B$, с определенным таким образом умножением, является алгеброй.

Задача 2. Пусть 1_A и 1_B — единицы алгебр A и B, соответственно. Доказать, что подпространства $A \otimes 1_B$ и $1_A \otimes B$ — подалгебры в $A \otimes_F B$, причем A изоморфна $A \otimes 1_B$, а B изоморфна $1_A \otimes B$.

Задача 3. Пусть A — конечномерная центральная простая алгебра над F (т.е. $Z(A) = F1$) алгебра и K — произвольное поле, содержащее F. Доказать, что $A \otimes_F K$ — центральная простая алгебра над K.

Пусть M, U — правые A-модули. Если задан A-гомоморфизм ϕ модуля U на M, то модуль U называют расширением M. Ядро ϕ называется ядром расширения. Расширение $\phi : U \mapsto M$ называется расщепляемым, если ядро гомоморфизма ϕ выделяется в A-модуле U прямым слагаемым.

Задача 4. Доказать, что расширение $\phi : U \mapsto M$ модуля M с ядром N расщепляемо тогда и только тогда, когда существует такой A-гомоморфизм ψ модуля M в модуль U, что $\phi\psi = 1$.

Пространство M называется (A, A)-бимодулем, если M — одновременно правый и левый A-модуль, причем $(am)b = a(mb)$ для всех $a, b \in A$ и $m \in M$.

Пусть M, U — левые A-модули и T — пространство всех F-линейных отображений из M в U. Если $\phi \in T$, то положим

$$(\phi a)m = \phi(am) \text{ и } (a\phi)m = a\phi(m) \text{ для всех } m \in M, a \in A.$$

Задача 5. Проверить, что алгебра A определяет на T структуру (A, A)-бимодуля.

Пусть $\phi : U \mapsto M$ — произвольное расширение модуля M с ядром N, ψ — F-линейное отображение из M в U такое, что $\phi\psi = 1$ и T — пространство всех F-линейных отображений из M в N. Определим линейное отображение $f : A \mapsto T$, полагая

$$f(a)m = \psi(am) - a\psi(m), \text{ для всех } m \in M, a \in A.$$

Задача 6. Доказать, что f — F-линейное отображение, $f(a)m \in N$ и $f(ab) = af(b) + f(a)b$.

Отображение f из задачи 6 называется дифференцированием алгебры A в (A, A)-бимодуль T. Для каждого $t \in T$ можно определить F-линейное отображение $f_t : A \mapsto T$, полагая $f_t(a) = at - ta$.

Задача 7. Доказать, что f_t — F-линейное отображение, которое является дифференцированием (такие дифференцирования называются внутренними).