ЗАДАНИЕ 6

Полупростые алгебры

Все алгебры в этом задании ассоциативны. Идеал (правый идеал) I алгебры A называется минимальным, если он не содержит идеалов (правых идеалов) алгебры A.

Задача 1. Пусть $a \in A$, I — правый идеал алгебры A и $Ann(a, I) = \{i \in I : ai = 0\}$. Показать, что $Ann(a, I)$ — правый идеал алгебры A.

Задача 2. Пусть I — минимальный правый идеал алгебры A. Показать, что для любого $a \in A$ либо $Ann(a, I) = 0$, либо $I = Ann(a, I)$.

Задача 3. Пусть I — ненильпотентный минимальный правый идеал алгебры A. Показать, что в I найдется такой элемент a, что $I = aI$.

Задача 4. Пусть I — ненильпотентный минимальный правый идеал алгебры A. Показать, что в I найдется идемпотент e такой, что $I = eA$.

Задача 5. Пусть A — полупростая алгебра, т.е. $J(A) = 0$ и e — идемпотент алгебры A. Показать, что правый идеал eA минимальный тогда и только тогда, когда алгебра eAe — тело, т.е. каждый ненулевой элемент в eAe обратим. (А если $J(A) \neq 0$?)

Задача 6. Пусть $I \trianglelefteq A,\ K \trianglelefteq I$. Показать, что $IKI \trianglelefteq A,\ IKI \subseteq I$.

Задача 7. Пусть $I \trianglelefteq A$. Доказать, что $r(I) = \{a \in I : Ia = 0\} \trianglelefteq A$ и $l(I) = \{a \in I : aI = 0\} \trianglelefteq A$.

Задача 8. Пусть I — минимальный идеал конечномерной алгебры A. Показать, что либо $I^2 = 0$, либо I — простая алгебра.