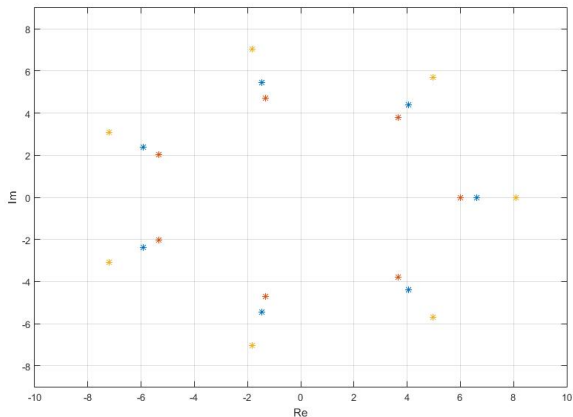


Спектр: визуализация и локализация

Бибердорф Э.А.

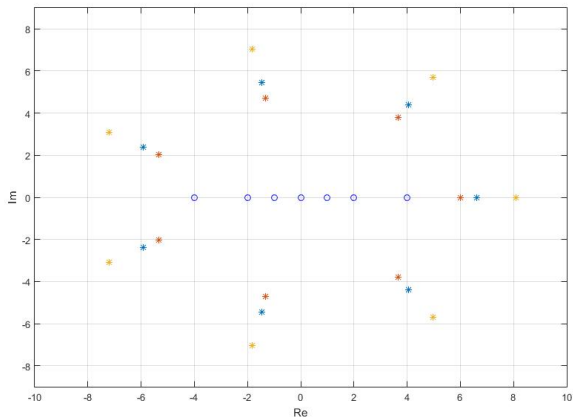
Парадоксы матричного спектра

$$\begin{pmatrix} 289 & 2064 & 336 & 128 & 80 & 32 & 16 \\ 1152 & 30 & 1312 & 512 & 288 & 128 & 32 \\ -29 & -2000 & 756 & 384 & 1008 & 224 & 48 \\ 512 & 128 & 640 & 0 & 640 & 512 & 128 \\ 1053 & 2256 & -504 & -384 & -756 & 800 & 208 \\ -287 & -16 & 1712 & -128 & 1968 & -30 & 2032 \\ -2176 & -287 & -1565 & -512 & -541 & -1152 & -289 \end{pmatrix}$$



Парадоксы матричного спектра

$$\begin{pmatrix} 289 & 2064 & 336 & 128 & 80 & 32 & 16 \\ 1152 & 30 & 1312 & 512 & 288 & 128 & 32 \\ -29 & -2000 & 756 & 384 & 1008 & 224 & 48 \\ 512 & 128 & 640 & 0 & 640 & 512 & 128 \\ 1053 & 2256 & -504 & -384 & -756 & 800 & 208 \\ -287 & -16 & 1712 & -128 & 1968 & -30 & 2032 \\ -2176 & -287 & -1565 & -512 & -541 & -1152 & -289 \end{pmatrix}$$



Что такое собственное значение?

$$\lambda = \lambda_j(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$



$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \infty$$



$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) = 0$$



$$\log(\sigma_{\min}(A - \lambda I)) = -\infty$$

Заметим, что функция

$$f(A, \lambda) = \log(\sigma_{\min}(A - \lambda I))$$

непрерывна и ограничена везде, кроме точек $\lambda = \lambda_j(A)$

Спектральные портреты

- способ визуального выделения собственных значений и их окрестностей.

Спектральные портреты

- способ визуального выделения собственных значений и их окрестностей.

Например, это может быть изображение графика функции

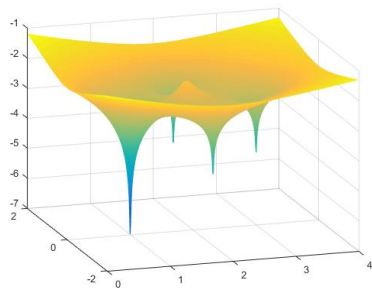
$$f(A, \lambda) = \log(\sigma_{\min}(A - \lambda I))$$

Спектральные портреты, пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

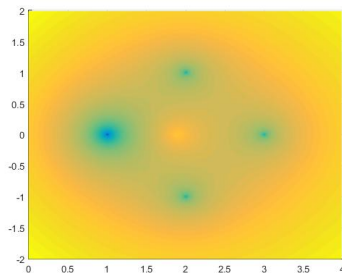
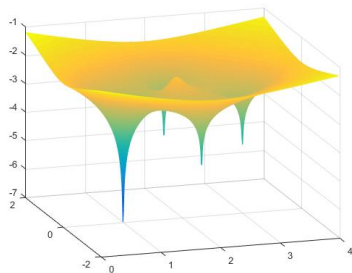
Спектральные портреты, пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



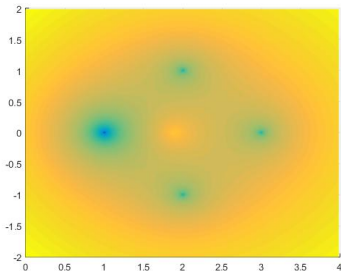
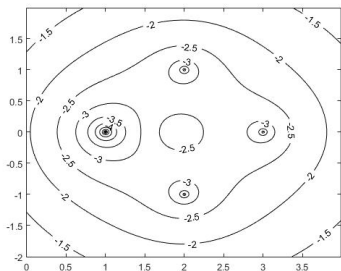
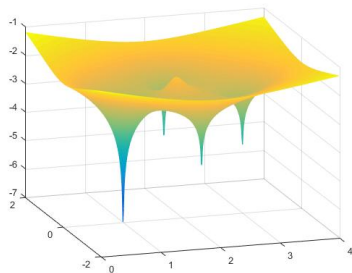
Спектральные портреты, пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



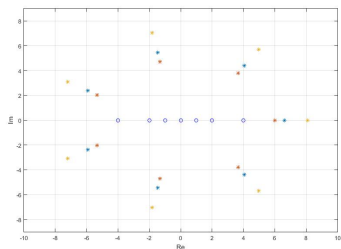
Спектральные портреты, пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



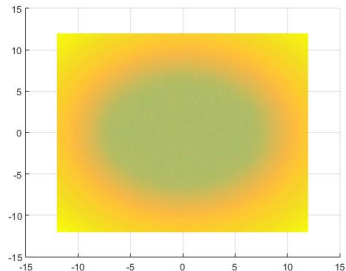
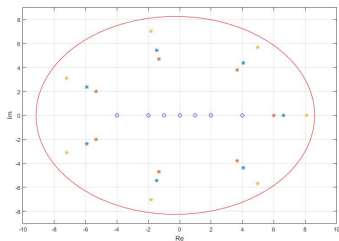
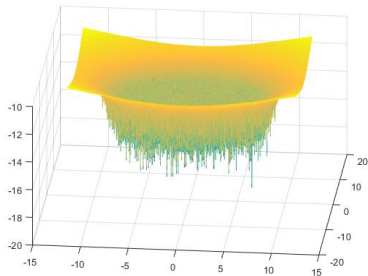
Спектральные портреты, пример

289	2064	336	128	80	32	16
1152	30	1312	512	288	128	32
-29	-2000	756	384	1008	224	48
512	128	640	0	640	512	128
1053	2256	-504	-384	-756	800	208
-287	-16	1712	-128	1968	-30	2032
-2176	-287	-1565	-512	-541	-1152	-289

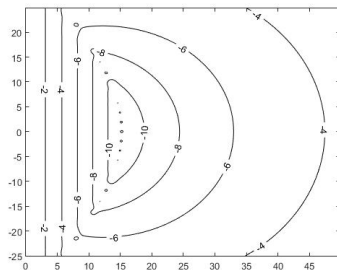
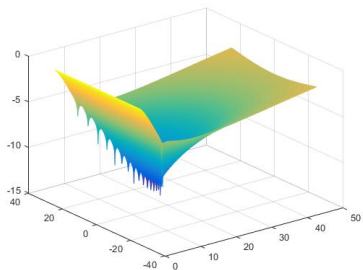


Спектральные портреты, пример

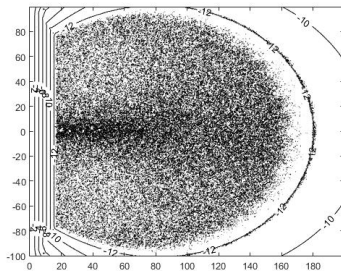
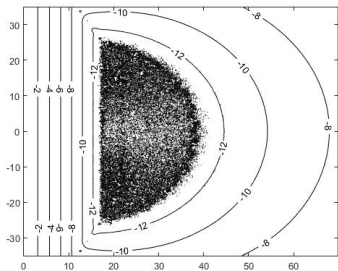
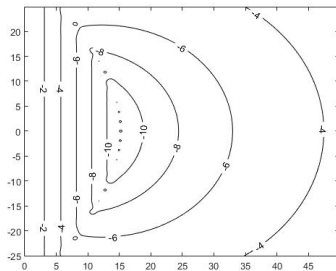
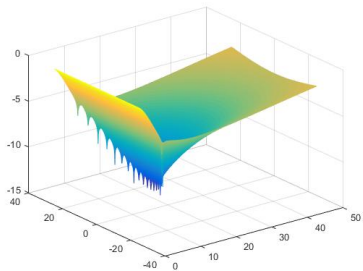
289	2064	336	128	80	32
1152	30	1312	512	288	128
-29	-2000	756	384	1008	224
512	128	640	0	640	512
1053	2256	-504	-384	-756	800
-287	-16	1712	-128	1968	-30
-2176	-287	-1565	-512	-541	-1152



Спектральные портреты, пример



Спектральные портреты, пример



Роль спектральных пятен

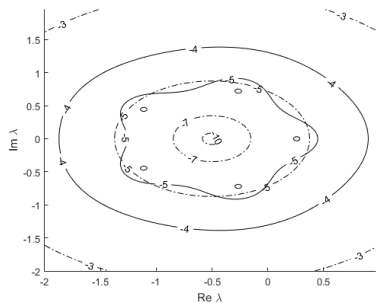
A =

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 15 & & & \\ & -0.5 & 15 & & \\ & & -0.5 & 15 & \\ & & & -0.5 & 15 \\ & & & & -0.5 \end{pmatrix}$$

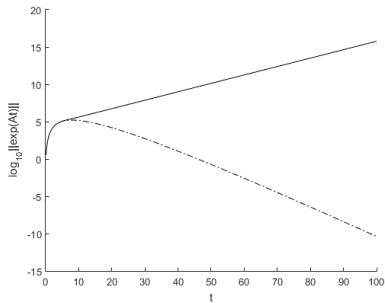
B =

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 15 & & & \\ & -0.5 & 15 & & \\ & & -0.5 & 15 & \\ & & & -0.5 & 15 \\ 5 \cdot 10^{-6} & & & & -0.5 \end{pmatrix}$$

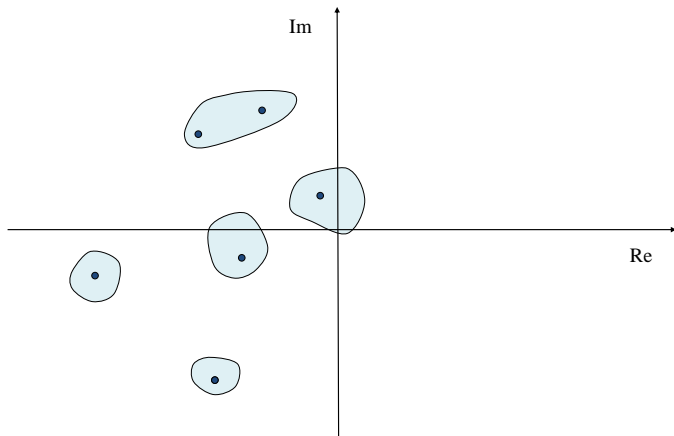
Спектральный портрет



Норма матричной экспоненты



Роль спектральных пятен



НЕ ???устойчивость решений системы $\frac{d}{dt}y = Ay$

Практические вопросы - классические ответы

* Все ли с.зн находятся в области устойчивости?

* Как влияет на устойчивость расположение спектральных пятен?

* Насколько точным может быть ответ?

* Вычисление отдельных собственных значений (всех)

* Не дает информации о спектральных пятнах

$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) < \varepsilon$$

* Нет удовлетворительных оценок точности

ВЫВОД: постановку задачи необходимо менять!

Альтернатива стандартной подстановке

ДИХОТОМИЯ - деление спектра на две части в зависимости от расположения относительно заданной кривой.

Свойства и возможности метода дихотомии

Дихотомия предполагает разделение множества собственных значений $\{\lambda_j(A, B)\}$ заданного матричного пучка $A - \lambda B$ на две части в зависимости от расположения относительно фиксированной кривой γ .

Матричный критерием дихотомии можно представить в виде интеграла

$$H = \int_{\gamma} (A^* - \bar{\lambda}B^*)^{-1} C (A - \lambda B)^{-1} d\lambda, \quad C = C^* > 0$$

«СЛОЖНОСТЬ» базового алгоритма дихотомии

Начальное значение

$$H^{(0)} = (A_0 - B_0)^{-1}(A_0 A_0^* + B_0 B_0^*)(A_0 - B_0)^{-*},$$

где $A_0 - \lambda B_0 = A - \lambda B$.

Итерации

$$V^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} A_k, \quad U^{(k+1)} = I - V^{(k+1)}$$

$$H^{(k+1)} = U^{(k+1)} H^{(k)} U^{(k+1)*} + V^{(k+1)} H^{(k)} V^{(k+1)*}$$

$$\text{qr} \left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}$$

После того, как итерации сошлись, вычисляется проектор

$$P = (A_k - B_k)^{-1} B_k;$$

Свойства и возможности метода дихотомии - базисы инвариантных подпространств

Алгоритмы дихотомии позволяют вычислить матрицу P - проектор на одно из этих подпространств L_1 , то проектором на второе приводящее подпространство L_2 будет матрица $I - P$ (I - единичная матрица). Следы проекторов $l = \text{tr}(P)$ и $m = \text{tr}(I - P)$ совпадают с числом собственных значений пучка, оказавшихся по одну и другую сторону кривой γ соответственно. Сингулярные разложения

$$P = [U_1|W_1] = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_1^*, \quad I - P = [U_2|W_2] = \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_2^*$$

позволяют получить ортогональные базисы U_1 и U_2 в приводящих подпространствах L_1 и L_2 .

Свойства и возможности метода дихотомии - одномерные портреты

Пусть $\gamma(r)$ - однопараметрическое семейство кривых.

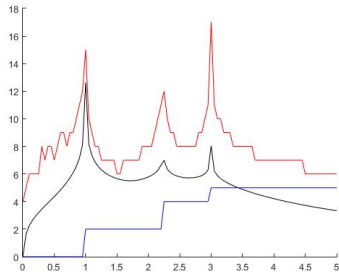
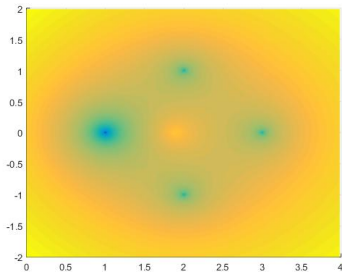
Определим функцию $\omega(r) = \|H(r)\|$.

График этой функции называется одномерным спектральным портретом.

Он позволяет выделить на комплексной плоскости окрестности кривых $\gamma(r_i)$, в которых находятся группы собственных значений. Также можно вычислить проекторы P_i на инвариантные подпространства, соответствующие этим собственным значениям, вычислить базисы инвариантных подпространств, привести подобным преобразованием матрицу A к клеточно-диагональному виду.

Свойства и возможности метода дихотомии - одномерные портреты. Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Преимущества метода дихотомии

- 1) несимметричная спектральная проблема сводится к операциям с ортогональными и симметричными матрицами;
- 2) существует вариант алгоритма, не использующий обращения матриц во время итераций;
- 3) сходимость алгоритма быстрая и прогнозируемая;
- 4) структура алгоритмов позволяет провести оценку точности результата
- 5) метод нечувствителен к кратности, вещественности или комплексности собственных значений

Области применения метода дихотомии

- 1) в задачах линейного управления (Godunov S.K. Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient. AMS. 1997)
- 2) устойчивость симплектических матриц и параметрический резонанс(Godunov S. K., Sadkane M. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 28(4):1083-1096)
- 3) анализ колебаний гидродинамических решеток (Курзин В.Б. Прикладная механика и техническая физика. 2008, т. 49, е 1, с. 104-113.)
- 4) задача о флаттере крыла в постановке М.В.Келдыша (Буньков В.Г., Годунов С.К., Курзин В.Б, Садкейн М. Ученые записки ЦАГИ, XL(6), 3-13)

Области применения метода дихотомии

- 5) разделение многочлена на множители (Бибердорф Э. А. Сиб. журн. индустр. матем., 3:1 (2000), 16-32)
- 6) устойчивость плоско-параллельного течения Пуазейля (Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. СибЖВМ, 2018, т. 21, е 2, с. 139-153.)
- 7) устойчивость пристеночного течения Блазиуса (Блинова М.А., Попова Н.И., Бибердорф Э.А. Труды международной научной конференции «Марчуковские научные чтения», 2017)
- 8) исследование спектральных свойств матриц деления и поглощения, описывающих слабосвязные области, определение локальных коэффициентов эффективности (Бибердорф Э.А., Митенкова Е.Ф., Атомная энергия, в печати)
- 9) устойчивости автоматических систем управления (АСУ) (метод в разработке)

Плоско-параллельное течение полимерной жидкости

Система уравнений, линеаризованная вокруг состояния покоя:

$$U_t + BU_x + CU_y + R_0U + F_0 = 0,$$

$$\Delta_{x,y} \mathcal{P} = -2((\alpha_{22})_{xx} - (\alpha_{12})_{xy}),$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Пусть $U(t, x, y) = \hat{U}(y) \exp(\lambda t + i\omega x)$, тогда $\mathcal{P}(t, x, y) = \hat{\mathcal{P}}(y) \exp(\lambda t + i\omega x)$,

$$\hat{\alpha}'_{12} - \frac{4i\omega\kappa_0^2}{\lambda + W^{-1}} \hat{v}' = \lambda \hat{u} + i\omega \hat{\mathcal{P}}$$

$$\kappa_0^2 \hat{u}' = \lambda \hat{\alpha}_{12} - i\omega \kappa_0^2 \hat{v} + W^{-1} \hat{\alpha}_{12}$$

$$\hat{\mathcal{P}}' = -\lambda \hat{v} + i\omega \hat{\alpha}_{12}$$

$$-\lambda \hat{v}' - i\omega \hat{\alpha}'_{12} - \frac{4\omega^2 \kappa_0^2}{\lambda + W^{-1}} \hat{v}' = \omega^2 \hat{\mathcal{P}}.$$

Плоско-параллельное течение полимерной жидкости

$$Az' = Bz, \text{ где } z = (\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{\alpha}_{12} \quad \hat{\mathcal{P}})^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} \kappa_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4i\omega\kappa_0^2 & \lambda + W^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda + W^{-1}) + 4\omega^2\kappa_0^2 & i\omega(\lambda + W^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega\kappa_0^2 & \lambda + W^{-1} & 0 \\ \lambda(\lambda + W^{-1}) & 0 & 0 & i\omega(\lambda + W^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2(\lambda + W^{-1}) \\ 0 & -\lambda & i\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{u} = \hat{v} = 0, \hat{\mathcal{P}}'(y) = i\omega\hat{\alpha}_{12} \text{ при } y = 0, 1.$$

$$\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{u}}_2 \cdots \hat{\mathbf{u}}_{N-1} \mid \hat{\mathbf{v}}_2 \cdots \hat{\mathbf{v}}_{N-1} \mid (\hat{\alpha}_{12})_1 \cdots (\hat{\alpha}_{12})_N \mid \hat{\mathcal{P}}_1 \cdots \hat{\mathcal{P}}_N)^T.$$

$$\mathcal{A}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{z}} = \mathcal{B}\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & A_3 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & B_0 & B_1 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \\ 0 & B_5 & B_6 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратичный матричный пучок

$$\mathcal{A}\hat{D} - \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{B}_1 + \lambda^2\mathcal{C}_1.$$

$$\det(\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{B}_1 + \lambda^2\mathcal{C}_1) = \det \left[\left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ 0 & \mathbf{I} \end{array} \right) - \lambda \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{I} & 0 \end{array} \right) \right]$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ 0 & \mathbf{I} \end{array} \right), \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{I} & 0 \end{array} \right)$$

Радиальный портрет исходного пучка

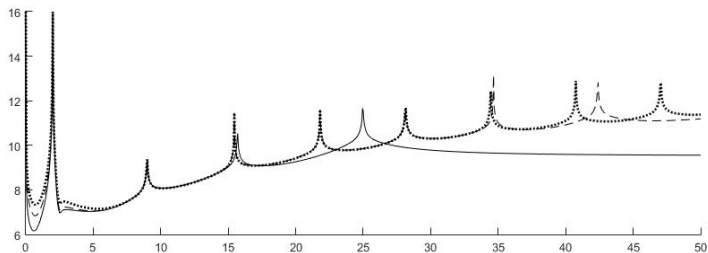
$$W = 1/2, \text{Re} = 2$$

$$A - \lambda B$$

$N = 10$ - сплошная линия

$N = 20$ - штрих

$N = 30$ - пунктир



Идея локализации спектра исходного пучка относительно мнимой оси

СТАНДАРТНЫЙ шаг:

$$A - \lambda B \Rightarrow B^{-1}A - \lambda I \Rightarrow e^{B^{-1}A} - \lambda I$$

ПРОБЛЕМА в том, что $\det B = 0$

РЕШЕНИЕ проблемы: дихотомия единичной окружностью

$$A = T \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S, \quad B = T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} S$$

Свойства спектров $\lambda(\Lambda) = \lambda(A, B)$, если $|\lambda(A, B)| < 1$

$\lambda(M) = \lambda^{-1}(A, B)$, если $|\lambda(A, B)| > 1$

ЗАДАЧА следующего шага: локализации спектра Λ и M относительно мнимой оси.

Дихотомия единичной окружностью

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{B}$$

Относительная точность - параметр сходимости итераций $\varepsilon = 10^{-10}$

Число итераций - 5

Результат: каноническое разложение

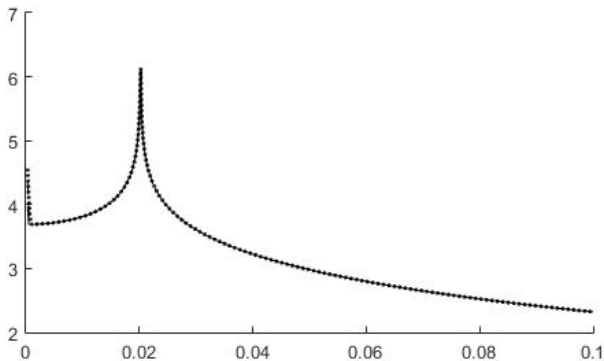
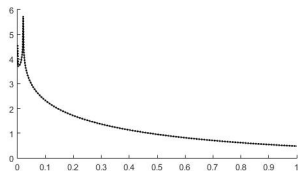
$$\mathbb{A} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \mathbb{S}, \quad \mathbb{B} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} \mathbb{S}$$

Радиальный портрет матрицы Λ

$N = 10$ - сплошная линия

$N = 20$ - штрих

$N = 30$ - пунктир

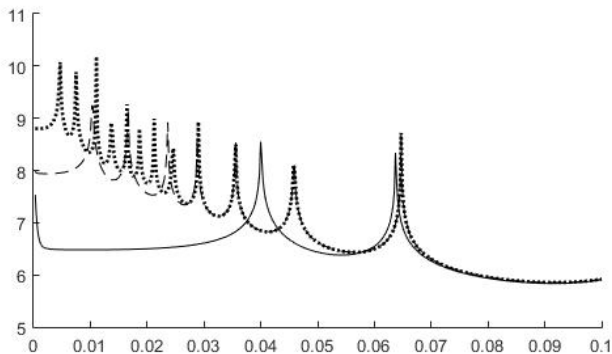
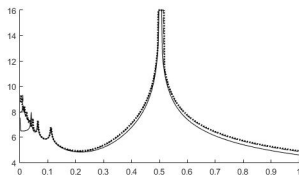


Радиальный портрет матрицы М

$N = 10$ - сплошная линия

$N = 20$ - штрих

$N = 30$ - пунктир



Локализации спектра Λ и M относительно мнимой оси

ЗАДАЧА следующего шага: локализации спектра Λ и M относительно мнимой оси.

ПРОБЛЕМА: априори известно, что есть нулевые собственные значения

РЕШЕНИЕ проблемы: с помощью дихотомии окружностью малого радиуса ρ получаем

$$\Lambda = T_\Lambda \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_\rho \end{pmatrix} T_\Lambda^{-1}, \quad M = T_M \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_\rho \end{pmatrix} T_M^{-1}$$

$$|\lambda(\Lambda_0)| < \rho, \quad |\lambda(M_0)| < \rho$$

Далее исследуем расположение относительно мнимой оси спектра Λ_ρ, M_ρ .

Дихотомия окружностью малого радиуса

Матрицы Λ, M ; окружность радиуса $\rho = 0.003$

Относительная точность - параметр сходимости итераций $\varepsilon = 10^{-10}$

Число итераций - 6, 7

Результат:

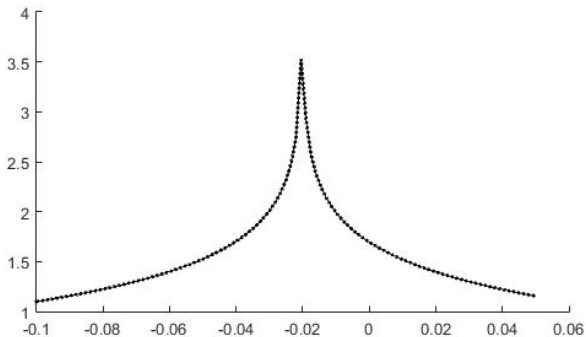
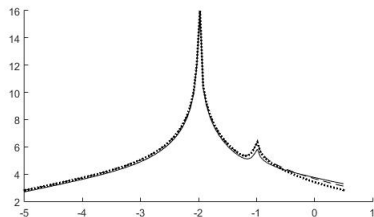
$$\Lambda = T_\Lambda \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_\rho \end{pmatrix} T_\Lambda^{-1}, \quad M = T_M \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M_\rho \end{pmatrix} T_M^{-1}$$

Линейные портреты матриц Λ_ρ и M_ρ

$N = 10$ - сплошная линия

$N = 20$ - штрих

$N = 30$ - пунктир



Результат

Дихотомия мнимой осью спектров Λ_ρ и M_ρ

Относительная точность - параметр сходимости итераций $\varepsilon = 10^{-10}$

Число итераций - 4,5

РЕЗУЛЬТАТ: 0 собственных значений в правой полуплоскости.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!