Большие уклонения для ветвящихся процессов в случайной среде

Марина Струлёва

Новосибирский государственный университет

12 мая 2021 г.

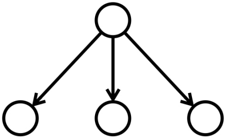
совместная работа с Е. Прокопенко

Определение ВПСС

Определение ВПСС

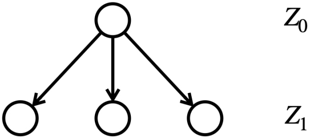
Z_0

Определение ВПСС

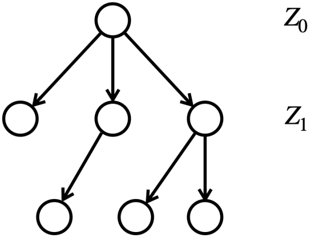


Z_0

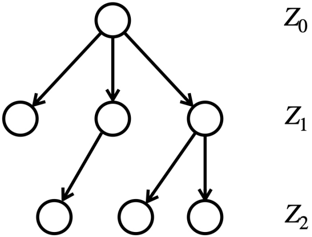
Определение ВПСС



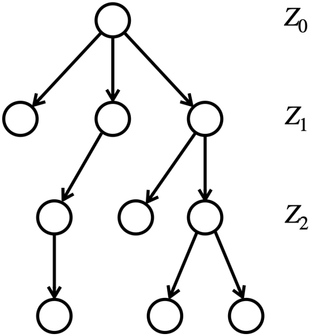
Определение ВПСС



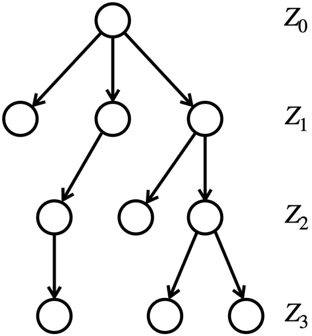
Определение ВПСС



Определение ВПСС



Определение ВПСС



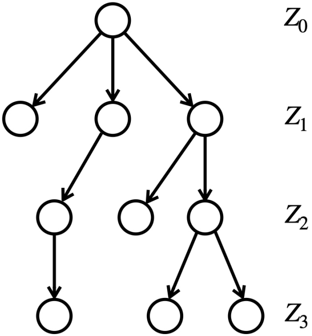
Определение ВПСС

Ветвящийся процесс – это последовательность $(Z_n)_{n\geqslant 0}$:

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} Y_j^{(n)} \quad n \geqslant 0,$$

где $\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ – с.в., н.о.р., не зависящие от Z_n.



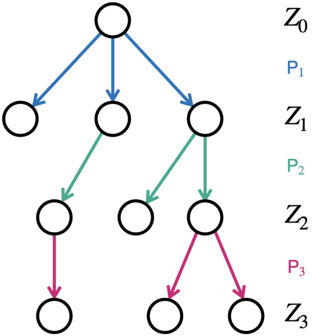
Определение ВПСС

Ветвящийся процесс – это последовательность $(Z_n)_{n\geqslant 0}$:

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} Y_j^{(n)} \quad n \geqslant 0,$$

где $\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ – с.в., н.о.р., не зависящие от Z_n.



Определение ВПСС

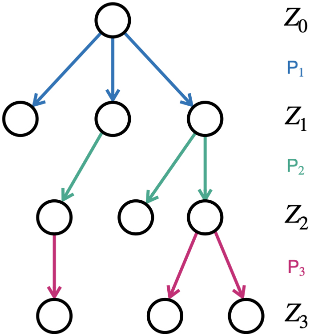
Ветвящийся процесс в меняющейся среде – это последовательность $(Z_n)_{n\geqslant 0}$:

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} Y_j^{(n)} \quad n \geqslant 0,$$

где $\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ – с.в., н.о.р. $\sim \mathsf{P}_n$, где $\mathsf{P} = (\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \dots)$ – последовательность распределений.

$\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ не зависят от Z_n.



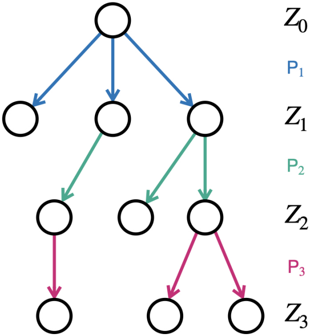
Определение ВПСС

Ветвящийся процесс в случайной среде – это последовательность $(Z_n)_{n\geqslant 0}$:

$$Z_0 = 1,$$
$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} Y_j^{(n)} \quad n \geqslant 0,$$

где $\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ – с.в., н.о.р. $\sim \mathsf{P}_n$, где $\mathsf{P} = (\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \dots)$ – последовательность случайных распределений.

$\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ не зависят от Z_n при фиксации среды P.



Определение ВПСС

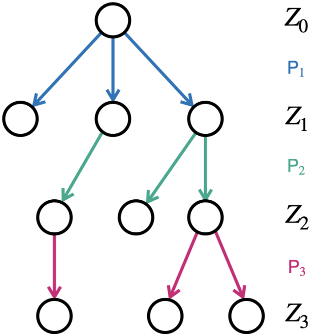
Ветвящийся процесс в случайной среде – это последовательность $(Z_n)_{n\geqslant 0}$:

$$Z_0 = 1,$$

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} Y_j^{(n)} \quad n \geqslant 0,$$

где $\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ – с.в., н.о.р. $\sim \mathsf{P}_n$, где $\mathsf{P} = (\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \dots)$ – последовательность случайных распределений.

$\{Y_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ не зависят от Z_n при фиксации среды P.



Smith, Wilkinson (1969) и Athreya, Karlin (1971).

Пример 1 (не математический)

Каждый год урожай случайный, но зависит от погоды, которая тоже случайна!

Пример 2 (математический)

$Y_j^{(n)} \sim \mathrm{Geom}(p)$,

$$p = \begin{cases} 0.1 & \text{с вероятностью } 0.5, \\ 0.8 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 2 (математический)

$Y_j^{(n)} \sim \mathrm{Geom}(p)$,

$$p = \begin{cases} 0.1 & \text{с вероятностью } 0.5, \\ 0.8 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 3 (приложения)

- популяционная динамика
- генетика
- физика, ...

Сопутствующее случайное блуждание

Для $n \geqslant 0$ положим

$$m_n = \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Y_1^{(n)} := \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \mid \mathsf{P}\right)$$

– это среднее число потомков одной особи n-го поколения.

Сопутствующее случайное блуждание

Для $n \geqslant 0$ положим

$$m_n = \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Y_1^{(n)} := \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \mid \mathsf{P}\right)$$

– это среднее число потомков одной особи n-го поколения.

Заметим, что

$$\log \mathbb{E}_{\mathsf{P}}\left(Z_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \log m_{i-1}$$

Сопутствующее случайное блуждание

Для $n \geqslant 0$ положим

$$m_n = \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Y_1^{(n)} := \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \mid \mathsf{P}\right)$$

– это среднее число потомков одной особи n-го поколения.
Заметим, что

$$\log \mathbb{E}_{\mathsf{P}}\left(Z_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \log m_{i-1} =: \sum_{i=1}^{n} X_i$$

– сумма н.о.р. с.в.

Сопутствующее случайное блуждание

Для $n \geqslant 0$ положим

$$m_n = \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Y_1^{(n)} := \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \mid \mathsf{P}\right)$$

– это среднее число потомков одной особи n-го поколения.
Заметим, что

$$\log \mathbb{E}_{\mathsf{P}} (Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \log m_{i-1} =: \sum_{i=1}^{n} X_i$$

– сумма н.о.р. с.в.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – сопутствующее случайное блуждание процесса $(Z_n)_{n \geqslant 0}$.

Сопутствующее случайное блуждание

Для $n \geqslant 0$ положим

$$m_n = \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Y_1^{(n)} := \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \mid \mathsf{P}\right)$$

– это среднее число потомков одной особи n-го поколения.
Заметим, что

$$\log \mathbb{E}_{\mathsf{P}}\left(Z_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \log m_{i-1} =: \sum_{i=1}^{n} X_i$$

– сумма н.о.р. с.в.
$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ – сопутствующее случайное блуждание процесса $(Z_n)_{n \geqslant 0}$.
Пусть

$$\mu = \mathbb{E} X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{D} X_1.$$

Классификация ВПСС

ВПСС (Z_n) называется

- *докритическим*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п.н.,
- *критическим*, если $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n = -\limsup\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п.н.,
- *надкритическим*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п.н.

Классификация ВПСС

ВПСС (Z_n) называется

- *докритическим*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ п.н., $\mu < 0$,
- *критическим*, если $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n = -\limsup\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п.н., $\mu = 0$,
- *надкритическим*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ п.н., $\mu > 0$.

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$.

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$. Мы предполагаем, что

(P) $p_0 = 0, p_1 \neq 1 \quad \mathbb{P}$ -п.н.

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$. Мы предполагаем, что

$\mathbf{(P)}$ $p_0 = 0, p_1 \neq 1 \quad \mathbb{P}$ -п.н.

В этом случае процесс надкритический и $\mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n > 0$ п.н. для всех n.

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$. Мы предполагаем, что

(P) $p_0 = 0, p_1 \neq 1 \quad \mathbb{P}$ -п.н.

В этом случае процесс надкритический и $\mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n > 0$ п.н. для всех n.

$$\boxed{\log Z_n = S_n + \log W_n} \tag{1}$$

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$. Мы предполагаем, что

$\mathbf{(P)}$ $p_0 = 0, p_1 \neq 1$ $\mathbb{P}$ -п.н.

В этом случае процесс надкритический и $\mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n > 0$ п.н. для всех n.

$$\boxed{\log Z_n = S_n + \log W_n} \tag{1}$$

где $W_n = Z_n / \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n$ – неотрицательный мартингал, и поэтому $\exists \lim\limits_{n\to\infty} W_n := W$ п.н.

Основное разложение

Пусть $p_i = \mathbb{P}_{\mathsf{P}}\left(Y_1^{(n)} = i\right)$. Мы предполагаем, что

(P) $p_0 = 0, p_1 \neq 1$ $\mathbb{P}$ -п.н.

В этом случае процесс надкритический и $\mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n > 0$ п.н. для всех n.

$$\boxed{\log Z_n = S_n + \log W_n} \tag{1}$$

где $W_n = Z_n / \mathbb{E}_{\mathsf{P}} Z_n$ – неотрицательный мартингал, и поэтому
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} W_n := W$ п.н.
Пусть также

(W) существует $p_* = \sup\left\{p : \mathbb{E} Z_1^p < \infty\right\} > 1$.

Базовые утверждения

Теорема (Усиленный закон больших чисел)

Пусть для ВПСС $\mu < \infty$ и выполнены условия $(\mathbf{P})$ и $(\mathbf{W})$. Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{\log Z_n}{n} \to \mu \quad \text{п.н.}$$

Базовые утверждения

Теорема (Усиленный закон больших чисел)

Пусть для ВПСС $\mu < \infty$ и выполнены условия $(\mathbf{P})$ и $(\mathbf{W})$. Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{\log Z_n}{n} \to \mu \quad \text{п.н.}$$

Действительно,

$$\frac{\log Z_n}{n} = \frac{S_n}{n} + \frac{\log W_n}{n} \to \mu + 0 = \mu$$

в силу УЗБЧ для S_n и того, что $\log W_n \to \log W$.

Базовые утверждения

Аналогично получается

Теорема (Центральная предельная теорема)

Пусть для ВПСС $\mu < \infty, \sigma^2 \in (0, \infty)$ и выполнены условия $(\mathbf{P})$ и $(\mathbf{W})$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$– ф.р. $\mathcal{N}_{0,1}$.

Большие уклонения для случайных блужданий

Задача: оценить вероятность $\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n)$.

Большие уклонения для случайных блужданий

Задача: оценить вероятность $\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n)$.

- Если $x_n \sim C\sqrt{n}$, то

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n) \sim 1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Большие уклонения для случайных блужданий

Задача: оценить вероятность $\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n)$.

- Если $x_n \sim C\sqrt{n}$, то

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n) \sim 1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

- Если же $x_n \gg \sqrt{n}$ из ЦПТ следует лишь

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant x_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Большие уклонения для случайных блужданий

Задача: оценить вероятность $\mathbb{P}\left(S_n \geqslant x_n\right)$.

- Если $x_n \sim C\sqrt{n}$, то

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant x_n\right) \sim 1 - \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

- Если же $x_n \gg \sqrt{n}$ из ЦПТ следует лишь

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant x_n\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теория больших уклонений позволяет получать в явном виде функции $P(n, x_n)$ такие, что

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant x_n\right) = P\left(n, x_n\right)(1 + o(1)).$$

Большие уклонения для ВПСС

$(\mathbf{C}_0)$ существует $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{\lambda X} = \mathbb{E}m_0^{\lambda} < \infty$.

Большие уклонения для ВПСС

$(\mathbf{C}_0)$ существует $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{\lambda X} = \mathbb{E}m_0^\lambda < \infty$.

Это условие позволяет ввести

$$\psi(\lambda) := \mathbb{E}e^{\lambda X}, \quad \lambda_+ := \sup\left\{\lambda : \mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty\right\}, \quad \alpha_+ := \frac{\psi'(\lambda_+ - 0)}{\psi(\lambda_+ - 0)}.$$

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\alpha\lambda - \log\psi(\lambda)\}$$

– *функция уклонений* для S_n.

Большие уклонения для ВПСС

$(\mathbf{C}_0)$ существует $\lambda > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{\lambda X} = \mathbb{E}m_0^{\lambda} < \infty$.

Это условие позволяет ввести

$$\psi(\lambda) := \mathbb{E}e^{\lambda X}, \quad \lambda_+ := \sup\left\{\lambda : \mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty\right\}, \quad \alpha_+ := \frac{\psi'(\lambda_+ - 0)}{\psi(\lambda_+ - 0)}.$$

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}}\{\alpha\lambda - \log\psi(\lambda)\}$$

– *функция уклонений* для S_n. Пусть также

$$\alpha_* := \sup\left\{\alpha < \alpha_+ : \Lambda'(\alpha) < p_*\right\}.$$

S_n нерешетчато, если не существует $h > 0, a$: $\sum\limits_k \mathbb{P}(X_1 = kh + a) = 1$.

S_n нерешетчато, если не существует $h > 0, a$: $\sum_k \mathbb{P}(X_1 = kh + a) = 1$.

Теорема (интегро-локальная теорема)

Пусть для ВПСС Z_n выполнены условия $(\mathbf{P})$, $(\mathbf{W})$, $(\mathbf{C}_0)$ и S_n нерешетчато. Пусть $x = x(n)$ – такая последовательность, что $\alpha = x/n \in [\mu, \alpha_*)$ при $n \to \infty$.
Тогда для $\Delta_n \to 0$ достаточно медленно,

$$\mathbb{P}\left(\log Z_n \in [x, x + \Delta_n)\right) = \frac{C(\alpha)\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n\Lambda(\alpha)}(1 + o(1)),$$

где $o(1)$ равномерен по $\alpha \in [\mu, \alpha_1]$ при любом фиксированном $\alpha_1 \in (\mu, \alpha_*)$, $C(\alpha) > 0$ - некоторая непрерывная функция.

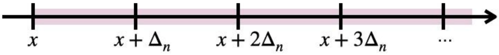
Замечание 1

Интегральную теорему, т.е. асимптотику для $\mathbb{P}(\log Z_n \geqslant x)$ в тех же предположениях, можно получить из интегро-локальной.

Замечание 1

Интегральную теорему, т.е. асимптотику для $\mathbb{P}(\log Z_n \geqslant x)$ в тех же предположениях, можно получить из интегро-локальной.
Идея:

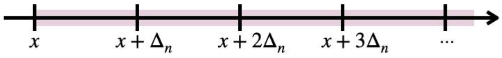
$$\mathbb{P}(\log Z_n \geqslant x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\log Z_n \in [x + k\Delta_n, x + (k+1)\Delta_n)).$$



Замечание 1

Интегральную теорему, т.е. асимптотику для $\mathbb{P}(\log Z_n \geqslant x)$ в тех же предположениях, можно получить из интегро-локальной.
Идея:

$$\mathbb{P}(\log Z_n \geqslant x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\log Z_n \in [x + k\Delta_n, x + (k+1)\Delta_n)).$$



Замечание 2

И *интегро-локальная*, и *интегральная* теоремы для $\log Z_n$ отличаются от аналогичных теорем для S_n на множитель $C(\alpha)$.

Спасибо!