Конференция "Женщины в математике"

Сверхустойчивые гиперболические системы: свойства и приложения

Н. А. Люлько

Институт Математики имени С.Л. Соболева,

г. Новосибирск, 12 мая 2021 г.

X - банахово пространство, A: $X \to X$ - **линейный оператор**

Линейная автономная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0 \in X$$

называется ***экспоненциально устойчивой***, если существуют $\gamma > 0$ и $M = M(\gamma)$:

$$||x(t)|| \le Me^{-\gamma t}||x(0)||, \quad t \ge 0$$

Система называется ***сверхустойчивой*** ***(superstable)***, если она экспоненциально устойчива с любым показателем $\gamma > 0$

Александр Михайлович Ляпунов (1892)

Anant Balakrishnan (1999)

Пусть A - **замкнутый оператор** в банаховом пространстве X

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(X), -\text{ резольвента оператора} A$$

Система сверхустойчива $\Rightarrow$ резольвента $R(\lambda; A)$ - **целая функция** параметра λ и **спектр оператора** $\sigma(A) = \varnothing$

——* **A.V. Balakrishnan**, *On superstability of semigroups.* Systems modelling and optimization, CRC, Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall, 1999, pp. 12-19.

X - **конечномерное** банахово пространство $\Rightarrow$

$$\sigma(A) \neq \varnothing, \qquad \gamma = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

X - **бесконечномерное** банахово пространство

$$A \in L(X) \Rightarrow$$

$$\sigma(A) \neq \varnothing, \qquad \gamma = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Простейший пример сверхустойчивой системы в полуполосе $\Pi = (0,1) \times (0,\infty)$ *

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (x,t) \in \Pi,$$

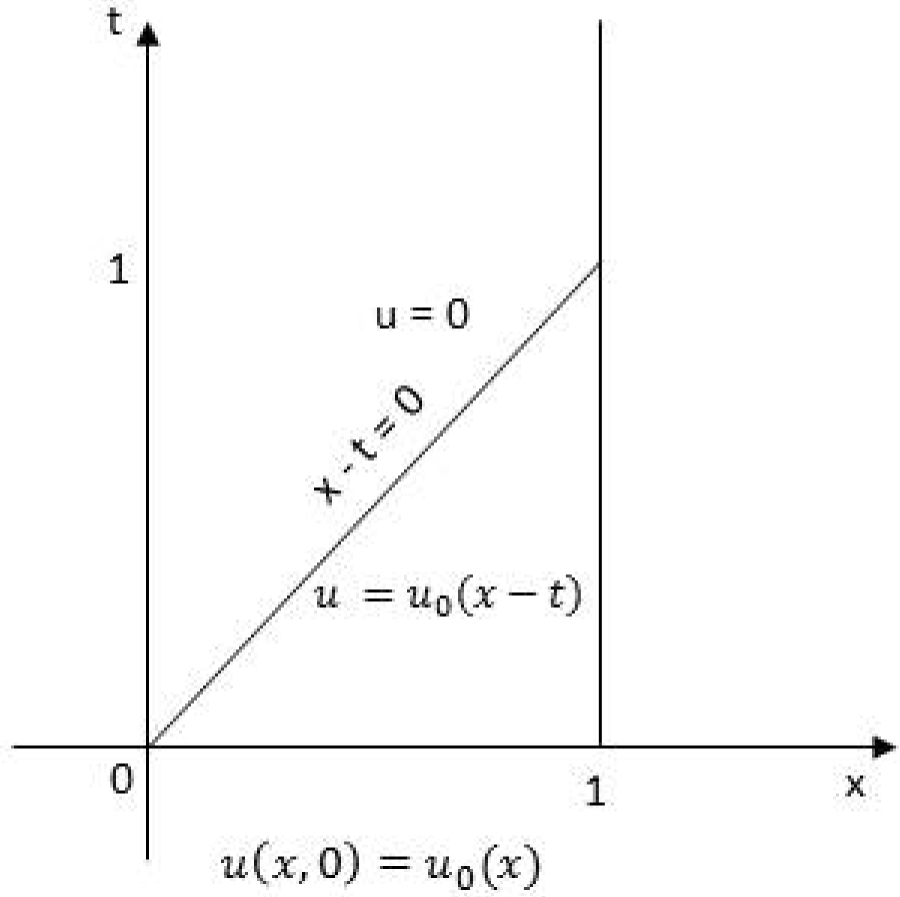
$$u(0,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

решение уравнения

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-t), & \text{если} \quad x > t, \\ 0, & \text{если} \quad t > x. \end{cases} \tag{1}$$

————————— * **Э.Хилле, Р.Филлипс**, Функциональный анализ и полугруппы, Москва, 1962.

u(x,t)=T(t)u_0(x)



$$A : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \qquad Au = -\frac{du}{dx},$$

$$D(A) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\}$$

спектр оператора $\sigma(A) = \varnothing$ и

система имеет конечное время стабилизации **(finite time stabilization - FTS)**, т.е. существует T_0 такое, что для любого u_0

$$u(x,t) = 0, \qquad t > T_0$$

Пример сверхустойчивой системы, но не обладающей свойством FTS

$X = L_1(R_+, e^{-x^2}dx)$ - весовое банахово пространство, $A : X \to X$

$$Au = -\frac{du}{dx},\ D(A) = \{u \in AC_{loc}(R_+) :\ Au \in X,\ u(0) = 0\}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-t), & \text{если} \quad x > t, \\ 0, & \text{если} \quad t > x. \end{cases} \tag{2}$$

$$||u(.,t)||_X \le e^{-t^2}||u_0||_X$$

—- * **Ву Нгуен Шон Тунг**, Примеры суперустойчивых полугрупп в теории обратных задач для эволюционных уравнений, тезисы конференции, Саратов, 2018

Смешанная задача для распавшейся неавтономной гиперболической системы

$$\partial_t u + a(x,t)\partial_x u + b(x,t)u = 0, \quad (x,t) \in \Pi, \quad (3)$$

Диагональная матрица $a \in C^1$ с элементами

$$a_i(x,t) > \Lambda_0, \quad (i = 1,...,m) \quad a_i(x,t) < -\Lambda_0, \ (i = m+1,...,n)$$

$0 \le m \le n$, $n \ge 2$, $b \in C^1$ - диагональная матрица с произвольными коэффициентами b_i $i = 1,....n$; $\Lambda_0 > 0$ - некоторое фиксированное число.

$u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t))$ -**неизвестная вектор-функция**

Граничные условия отражения

$$u_j(0,t) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_k(1,t) + \sum_{k=m+1}^{n} p_{jk} u_k(0,t), \quad 1 \le j \le m, \tag{4}$$

$$u_j(1,t) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_k(1,t) + \sum_{k=m+1}^{n} p_{jk} u_k(0,t), \quad m < j \le n,$$

p_{ij}- произвольные константы.

$$u_{out}(t) = P u_{in}(t), \tag{5}$$

$$u_{out}(t) = (u_1(0,t), ..., u_m(0,t), u_{m+1}(1,t), ..., u_n(1,t)),$$

$$u_{in}(t) = (u_1(1,t), ..., u_m(1,t), u_{m+1}(0,t), ..., u_n(0,t)).$$

Начальные данные $$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1]. \tag{6}$$

Задача Коши

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \qquad u(0) = \varphi \in L_2(0,1) \tag{7}$$

,

$$A(t) : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

$$A(t)v = -(a(x,t)\partial_x v + b(x,t)v), D(A) = \{v \in W_2^1[0,1] : \quad v_{out} = Pv_{in}\}.$$

Определение. Система (7) обладает **свойством стабилизации**, если существует такое число $T_0 \geq 0$, что для любой функции $\varphi \in L_2(0,1)$ L_2-решение u задачи (7)

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in [0,1], \quad t > T_0.$$

Число T_0 называется **конечным временем стабилизации**.

Определение. Система (7) обладает **свойством робаст стабилизации**, если она обладает свойством стабилизации для любых матриц a, b.

В работе ***I. Kmit, N. Lyul‘ko, Finite time stabilization of nonautonomous first-order hyperbolic systems*** для системы (7) найдены

- **спектральный критерий стабилизации** (автономная система) ;

- **алгебраический критерий робаст стабилизации** (неавтономная система) ;

- **комбинаторный критерий робаст стабилизации** (неавтономная система).

Спектральный критерий стабилизации (автономный случай $a(x,t) \equiv a(x)$, $b(x,t) = b(x)$)

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad - \text{характеристическое уравнение для } \lambda \in \sigma(A)$$

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{M} e^{-\lambda r_k} R_k -$$ **полином Дирихле**

$0 < r_1, ... < r_M$ - определяются через элементы матрицы a, b; R_k определяются через элементы матриц a, b, P.

Теорема (критерий стабилизации). Система (7) обладает свойством FTS $\Leftrightarrow \sigma(A) = \varnothing \Leftrightarrow \Delta(\lambda) \equiv 1$.

Следствие. **Система (7) сверхустойчива $\Leftrightarrow$ когда она обладает конечным временем стабилизации.**

Неустойчивость критерия стабилизации по отношению изменения матрицы a

$u_t + u_x = 0, \qquad v_t - v_x = 0,$ - невозмущенная система

$$u(0,t) = u(1,t) - v(0,t), \qquad v(1,t) = u(1,t) - v(0,t),$$

$$\Delta(\lambda) = \det(I_2 - diag(e^{-\lambda}, e^{-\lambda})P) = 1 - e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda} \equiv 1 \Rightarrow \sigma(A) = \emptyset,$$

$u_t + (1+\varepsilon)u_x = 0, \qquad v_t - v_x = 0,$ - возмущенная система

$$u(0,t) = u(1,t) - v(0,t), \qquad v(1,t) = u(1,t) - v(0,t)$$

$$\Delta(\lambda) = \det(I_2 - diag(e^{\frac{-\lambda}{1+\varepsilon}}, e^{-\lambda})P) = 1 + e^{-2\lambda} - e^{\frac{-2\lambda}{1+\varepsilon}} \Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$$

Неустойчивость критерия стабилизации по отношению изменения матрицы b

$u_t + u_x = 0, \qquad v_t - v_x = 0,$ - невозмущенная система

$$u(0,t) = u(1,t) - v(0,t), \qquad v(1,t) = u(1,t) - v(0,t),$$

$$\Delta(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda} \equiv 1 \Rightarrow \sigma(A) = \emptyset,$$

$u_t + u_x + \varepsilon u = 0, \qquad v_t - v_x = 0,$ - возмущенная система

$$u(0,t) = u(1,t) - v(0,t), \qquad v(1,t) = u(1,t) - v(0,t),$$

$$\Delta(\lambda) = 1 + e^{-\lambda} - e^{-\lambda+\varepsilon} \Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$$

Алгебраический критерий робаст стабилизации

Теорема. Для неавтономной системы (7)

$$\partial_t u + a(x,t)\partial_x u + b(x,t)u = 0, \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$u_{out} = P u_{in}, \qquad u(0) = \varphi \in L_2(0,1)$$

следующие свойства эквивалентны:

i) **система обладает свойством робаст стабилизации;**

ii) **все главные миноры матрицы P нулевые;**

iii) **матрица P_{abs}, составленная из абсолютных значений матрицы P, является нильпотентной, т.е. $P_{abs}^n = 0$.**

Комбинаторный критерий робаст стабилизации

Направленный граф

$$P = (p_{jk})_{1\le j,k\le n} \to G_P - \text{направленный граф:}$$

- $\{1, 2, .., n\}$ - множество вершин графа;

- вершины j и k связаны звеном (j, k) в $G_P \Leftrightarrow p_{jk} \neq 0$

Ацикличный направленный граф - направленный граф без циклов

Теорема. Неавтономная система (7) обладает свойством робаст стабилизации $\Leftrightarrow$ **направленный граф G_P, соответствующий матрице P , является ацикличным**.

Критерий робаст стабилизации для неавтономной системы с неавтономными граничными условиями

Матрица смежности W направленного графа G с n вершинами

$$W = (w_{jk})_{1 \le j,k \le n}: \quad w_{jk} = 0 \text{ или } w_{jk} = 1$$

$$w_{jk} = 1, \quad \text{если вершины } j \text{ и } k \text{ связаны звеном}$$

$$w_{jk} = 0, \quad \text{в противном случае.}$$

Известно: граф G ацикличен $\Leftrightarrow$ W нильпотентна $(W^n = 0)$.

Теорема. Пусть $W = (w_{jk})$ -$n \times n$ матрица из 0 и 1. Для любых $g_{jk} \in C^1(R_+)$, где $1 \le j, k \le n$, задача (7) с $p_{jk} = g_{jk}(t)w_{jk}$ робаст FTS $\Leftrightarrow$ матрица W нильпотентна.

Примеры матриц W, порождающих робаст стабилизируемые гиперболические системы

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1... & 1 \\ 0 & 0 & 1... & 1 \\ .. & .. & ..... & .. \\ 0 & 0 & 0... & 1 \\ 0 & 0 & ..... & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ..... & 0 \\ 1 & 0 & 0... & 0 \\ 1 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & ..... & .. \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задачи Коши

Невозмущенная: $\frac{du}{dt} = A(t)u, \qquad u(0) = \varphi \in L_2(0,1),$

$$A(t) : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

$$A(t)u = -(a(x,t)\partial_x u + b(x,t)u), \quad u_{out} = Pu_{in}$$

Возмущенная: $\frac{du}{dt} = \tilde{A}(t)u, \qquad u(0) = \varphi \in L_2(0,1),$

$$\tilde{A}(t) : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$$

$$\tilde{A}(t)u = -(a(x,t) + \tilde{a}(x,t))\partial_x u + (b(x,t) + \tilde{b}(x,t))u), \quad u_{out} = Pu_{in}$$

Свойства возмущенных систем в случае, когда невозмущенная система обладает свойством стабилизации

I. Kmit, N. Lyul‘ko, Perturbations of superstable linear hyperbolic systems, Journal of Mat. Anal.and Appl., v.460, N 2, p. 838-862, (2018).

Пусть BC^1 - пространство непрерывно дифференцируемых в полуполосе П функций $u(x,t)$, ограниченнных вместе со своими первыми производными, причем $||u||_{BC^1} = \sup_{(x,t)\in \Pi}(|u|, |u_x|, |u_t|)$.

Теорема 1. **Пусть невозмущенная задача обладает свойством робаст стабилизации.** Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0$ и $M = M(\gamma)$ такие, что для любых матриц $\tilde{a}, \tilde{b} \in BC^1$, $||\tilde{a}||_{BC^1} < \varepsilon$, $||\tilde{b}||_{BC^1} < \varepsilon$, **возмущенная задача** будет **экспоненциально устойчива**, т.е. для любой функции $\varphi \in L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$||u(.,t)||_{L_2(0,1)} \leq Me^{-\gamma t}||\varphi||_{L_2(0,1)}, \quad t \geq 0,$$

где $u(x,t)$ - решение **возмущенной задачи**.

Теорема 2. Пусть невозмущенная задача обладает конечным временем стабилизации. Тогда для любой матрицы $\tilde{b} \in BC^1$, чьи диагональные элементы нулевые и которая удовлетворяет условию типа Леви:

для всех $1 \leq j \neq k \leq n$

существуют $\beta_{jk} \in BC^1 : \tilde{b}_{jk} = \beta_{jk}(a_k - a_j)$,

соответствующая **возмущенная задача** обладает **свойством повышения гладкости решений** из пространства $L_2(0,1)$ в пространство $C^1[0,1]$.

Теорема 3. **Пусть невозмущенная задача обладает свойством робаст стабилизации** и матрица $\tilde{b} \in BC^1$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0$ и $M = M(\gamma)$ такие, что для любых матриц $\tilde{a}, \tilde{b} \in BC^1$, $||\tilde{a}||_{BC^1} < \varepsilon$, $||\tilde{b}||_{BC^1} < \varepsilon$, **возмущенная задача** будет **экспоненциально устойчива** из $L_2(0,1)$ в $C^1[0,1]$, т.е. существует $T > 0$ такое, что

$$||u(.,t)||_{C^1[0,1]} \leq Me^{-\gamma t}||\varphi||_{L_2(0,1)}, \quad t \geq T,$$

где $u(x,t)$ - решение **возмущенной задачи**.

Приложения

Каталитические процессы в химическом реакторе

1. Химическая реакция нулевого порядка (скорость реакции не зависит от количества реагирующего вещества)

$$\beta\partial_t\Theta + \partial_x\Theta = QKe^{\Theta} - \gamma(\Theta - \Theta_r),$$

$$\partial_t\Theta_r - \partial_x\Theta_r = \gamma(\Theta - \Theta_r), \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$\Theta(0,t) = \Theta_r(0,t), \quad \Theta_r(1,t) = \vartheta_0, \quad t > 0,$$

Θ, Θ_r - температура в реакторе и, соответственно, в холодильнике; β, γ, K, Q, ϑ_0 - положительные параметры; $\Theta(x,0)$ и $\Theta_r(x,0)$ заданы.

При малых γ стационарное решение экспоненциально устойчиво

2. Химическая реакция первого порядка порядка (скорость реакции линейно зависит от количества реагирующего вещества)

$$\beta\partial_t\Theta + \partial_x\Theta = QKe^{\Theta} - \gamma(\Theta - \Theta_r),$$

$$\partial_t C + \partial_x C = K(1 - C)e^{\Theta}, \quad (x, t) \in \Pi,$$

$$\partial_t\Theta_r - \partial_x\Theta_r = \gamma(\Theta - \Theta_r),$$

$$\Theta(0, t) = \Theta_r(0, t), \quad C(0, t) = 0, \quad \Theta_r(1, t) = \vartheta_0, \quad t > 0,$$

Θ, Θ_r - температура в реакторе и, соответственно, в холодильнике; C - концентрация реагента, β, γ, K, Q, ϑ_0 - положительные параметры; $\Theta(x, 0)$, $C(x, 0)$ и $\Theta_r(x, 0)$ заданы.

При малых γ, K стационарное решение экспоненциально устойчиво

Смешанные задачи для волнового уравнения

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} + c(x,t)w = 0, \quad (x,t) \in \Pi,$$

$$w(0,t) = p(w_t + aw_x)(0,t), \quad (w_t + aw_x)(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$

или

$$w(1,t) = q(w_t - aw_x)(1,t), \quad (w_t - aw_x)(0,t) = 0, \qquad t > 0.$$

$a > 0$, p, q - произвольные константы, $c \in BC^2$; $w(0,t)$, $w_t(0,t)$ - заданы.

$c = 0$ - задачи сверхустойчивы, $||c||_{BC^2} < \varepsilon$ - задачи экспоненциально устойчивы.

Обратная задача с финальным переопределением *

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathbf{A}x(t) + f \quad (0 \le t \le T), \tag{8}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

A - линейный замкнутый оператор, порождающий сверхустойчивую C_0 полугруппу $V(t)$, x_0, $x_T \in D(A)$. **Решение задачи - пара** (x, f) : $x \in C^1([0,T], X)$, $x(t) \in D(\mathbf{A})$, $t \in [0,T]$, $f \in X$.

—-* **Ву Нгуен Шон Тунг**, Разрешимость линейной обратной задачи с суперустойчивой полугруппой, Вестник РУДН, 2018.

Квазилинейные гиперболические системы

$$\partial_t u_i + f_i(x,t,u)\partial_x u_i = 0, \quad (x,t) \in \Pi, \tag{9}$$

$$u_{out} = P u_{in}$$

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i = 1,...,n.$$


gelio.livejournal.com | gelio@inbox.ru

Спасибо за внимание !

Всем творческих успехов !