Об асимптотике вероятности невыхода неоднородного обобщенного процесса восстановления за невозрастающую границу

Шелепова Анастасия

Новосибирский Государственный Университет, ММФ

Конференция "Женщины в математике"

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, профессор А. И. Саханенко

Введение

Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ — бесконечная последовательность независимых пар случайных величин таких, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{E}X_k = 0, \quad 0 < \sigma_k^2 := \mathbf{D}X_k < \infty \quad \text{и} \quad v_k > 0 \quad \text{п.н.}. \tag{1}$$

Положим $S_0 = V_0 = A_0 = B_0 = 0$ и

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad V_n = v_1 + \ldots + v_n, \quad A_n = \mathbf{E}V_n, \quad B_n^2 = \mathbf{D}S_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

При $t \geq 0$ рассмотрим случайный процесс

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad \text{где} \quad N(t) = \max\{k \geq 0 \ : V_k \leq t\}.$$

$N(t)$ — простой процесс восстановления, построенный по случайным величинам $v_1, v_2, \ldots$, а $S(t)$ называют обобщенным процессом восстановления (ОПВ) [1].

[1] A.A. Borovkov, **Compound Renewal Processes**, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020, p. 455

Пример (работа страховой компании)
Пусть $V_1, V_2, \ldots$ — моменты наступления крупных выплат по страховым случаям, а $X_1, X_2, \ldots$ — соответственно, размеры этих выплат. И пусть r — средняя "скорость"поступления страховых взносов. Тогда, если x - начальный капитал компании, то ее капитал в момент времени t будет равен $x + rt - S(t)$. Это значит, что если $\inf_{u \leq t}(x + ru - S(u)) < 0$, то компания к моменту t разорится. Другими словами, вероятность разорения за время t равна $\mathbf{P}(\sup_{u \leq t}(S(u) - ru) > x)$.
Задачи такого рода называются граничными для ОПВ.

Пусть $g(t)$ — функция, определенная при $t \geq 0$. Рассмотрим случайную величину

$$\tau := \inf\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\} = \inf\{t > 0 : Z(t) := S(t) - g(t) \leq 0\}, \tag{2}$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим обобщенным процессом восстановления $S(t)$.
Основная цель — найти асимптотику для вероятности

$$\mathbf{P}(\tau > T) = \mathbf{P}\Big(\underline{Z}(T) := \inf_{0<t\leq T}(S(t) - g(t)) > 0\Big) \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{3}$$

когда

$$g(0) < 0 \quad \text{и} \quad g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{4}$$

и

$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{при всех} \quad T > 0. \tag{5}$$

Предшествующие результаты

В частном случае, если пары в управляющей последовательности одинаково распределены и $\mathbf{E}X_1^2 = 1 = \mathbf{E}\nu_1$, $\mathbf{E}\nu_1^{3/2} < \infty$, то, как показано в [2],

$$\sqrt{T}\,\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\,U_{\lfloor T \rfloor} \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{6}$$

где

$$U_n := \mathbf{E}\left[S_n - g(V_n); \tau > V_n\right], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

При этом $U_{\lfloor T \rfloor}$ является монотонно неубывающей положительной функцией, которая медленно меняется при $T \to \infty$.

---

[2] A.I. Sakhanenko, V.I. Wachtel, E.I. Prokopenko, A.D. Shelepova, **On the asymptotics of the distribution of the exit time beyond a non-increasing boundary for a compound renewal process**, Siberian Electronic Mathematical Reports, 18:1 (2021), 9—26.

В еще более частном случае, если все $v_i \equiv 1$ не случайны, наш процесс $S(t) = S_{\lfloor t \rfloor} = X_1 + \ldots + X_{\lfloor t \rfloor}$ — это случайное блуждание. И если $g(t) = g(\lfloor t \rfloor)$ — невозрастающая кусочно-постоянная функция, то $\tau = \tilde{\tau}$, где

$$\tilde{\tau} = \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g(k)\}.$$

Как показано в [3]

$$\sqrt{n}\mathbf{P}(\tilde{\tau} > n) \sim \sqrt{2/\pi}\, \widetilde{U}(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{U}(t) = \mathbf{E}\left[S(t) - g(t); \tilde{\tau} > t\right]$$

медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$.

---

[3] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, **First-passage times for random walks with non-identically distributed increments**, Ann. Probab., 46:6 (2018), 3313—3350.

Результаты

(**A**) Величины $\{X_i\}$ удовлетворяют классическому условию Линдеберга, и при некоторых $c \in (0, \infty)$ и $q \in (3/2, 2]$ верно

$$A_n \sim c^2 B_n^2, \quad \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbf{E} v_k^q \Big/ A_n^{q-1/2} \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty.$$

(**G**) функция $g(\cdot)$ – монотонно невозрастающая,

$$g(0) < 0 \quad \text{и} \quad g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

При $0 \le T < \infty$ обозначим

$$n(T) := \max\{n > 0 : A_n \le T\}. \tag{8}$$

Теорема 1

Пусть выполнены условия (1), *(A), (G). Тогда*

$$B_{n(T)}\,\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\,U_{n(T)} \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \tag{9}$$

Кроме того, функция $U_{n(T)} \ge U_1 > 0$ монотонно не убывает и является медленно меняющейся при $T \to \infty$.

[1] A.A. Borovkov, **Compound Renewal Processes**, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020, p. 455

[2] A.I. Sakhanenko, V.I. Wachtel, E.I. Prokopenko, A.D. Shelepova, **On the asymptotics of the distribution of the exit time beyond a non-increasing boundary for a compound renewal process**, Siberian Electronic Mathematical Reports, 18:1 (2021), 9—26.

[3] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, **First-passage times for random walks with non-identically distributed increments**, Ann. Probab., 46:6 (2018), 3313—3350.

[4] A.D. Shelepova, A.I. Sakhanenko, **On the asymptotics of the probability to stay above a non-increasing boundary for a non-homogeneous compound renewal process**, Siberian Electronic Mathematical Reports, 18:2 (2021), 1667—1688.