Совершенные раскраски обобщённого графа Петерсена $G(n, 2)$ — до 10 цветов

6 июня 2022 г.

Кондакова Дарья Алексеевна

Горкунов Евгений Владимирович
Данилко Виталий Романович

Новосибирский государственный университет

*Настоящая наука

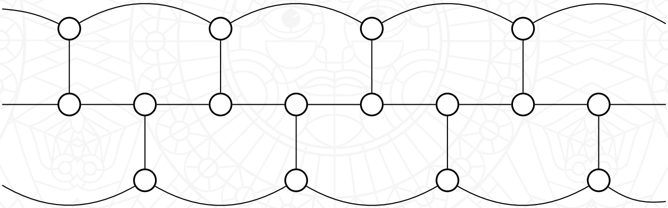
Содержание

- Основные определения
- Полный перебор
- Сокращение перебора
- Результаты
- Додекаэдр

Определения

Обобщённый граф Петерсена

$V = \{0, 1, 2, ..., 2n-1\}$
$E = \{(i, i+1), (i, (i+2) \bmod 2n) \mid i = 0, 2, \ldots, 2n-2\} \cup$
$\cup \{(i, (i+4) \bmod 2n) \mid i = 1, 3, \ldots, 2n-1\}$



Определения

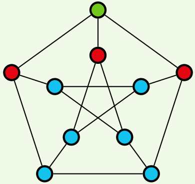
Совершенная раскраска

Раскраска называется *совершенной*, если вершины одного цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Совершенная раскраска может быть задана $(k \times k)$ – матрицей параметров $M = (m_{ij})$, в которой элемент $m_{ij} \in \{1, \dots, k\}$, равен числу соседей цвета j в окружении вершины цвета i.

Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Определения

Допустимая матрица

Матрицу параметров совершенной раскраски назовём *допустимой* матрицей для некоторого графа, если существует совершенная раскраска этого графа с заданными параметрами.

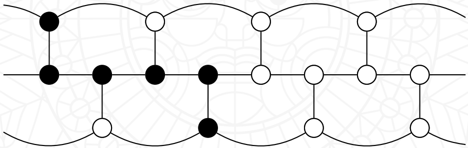
Эквивалентные матрицы

Две матрицы параметров называются *эквивалентными*, если одна получается из другой некоторой перестановкой строк и столбцов, соответствующей переобозначению цветов.

Определения

Локально жёсткий фрагмент

Локально жёстким фрагментом графа называется подмножество его вершин такое, что при их раскраске весь граф дальше раскрашивается однозначно.



Полный перебор

Алгоритм

- Генерируем всевозможные строки длины k с суммой элементов равной 3
- Генерируем всевозможные $(k \times k)$-матрицы параметров и отсекаем эквивалентные
- Проверяем каждую матрицу на допустимость, пытаясь реализовать её раскраску на обобщённом графе Петерсена методом локально жёсткого фрагмента

k	Количество строк	Количество матриц
2	4	16
3	10	1 000
4	20	160 000
5	35	52 521 875
6	56	30 840 979 456
7	84	29 509 034 655 744
8	120	42 998 169 600 000 000
9	165	90 647 430 472 564 453 125
10	220	265 599 227 914 240 000 000 000

Сокращение перебора

Утверждение 1

Нулевые элементы в матрице параметров совершенной раскраски должны располагаться симметрично относительно главной диагонали.

Утверждение 2

В каждом столбце матрицы параметров совершенной раскраски должно быть не более трёх ненулевых элементов.

Сокращение перебора

Утверждение 3

Существует полуканонический вид матрицы параметров совершенной раскраски:

1. Элементы на главной диагонали располагаются по неубыванию.
2. Если два соседних элемента на главной диагонали равны, то столбец над левым элементом лексикографически меньше столбца над правым элементом.
3. Если в пункте 2 достигается равенство столбцов, то строка слева от верхнего элемента лексикографически меньше строки слева от нижнего элемента.
4. Если в пункте 3 достигается равенство строк, то элемент под левым диагональным элементом должен быть больше элемента над правым диагональным элементом.

$$\begin{pmatrix}
m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1(i-1)} & m_{1i} & \cdots & m_{1k} \\
m_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{(i-2)1} & \cdots & \cdots & m_{(i-2)(i-1)} & m_{(i-2)i} & \cdots & \cdots \\
m_{(i-1)1} & \cdots & \cdots & m_{(i-1)(i-1)} & m_{(i-1)i} & \cdots & \cdots \\
m_{i1} & \cdots & \cdots & m_{i(i-1)} & m_{ii} & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{k1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}$$

Сокращение перебора

Граф цветов

Пусть имеется матрица параметров совершенной раскраски обобщённого графа Петерсена M. Заменим в этой матрице все ненулевые элементы на единицы. Полученная матрица может быть рассмотрена как матрица смежности некоторого графа. Такой граф назовём *графом цветов матрицы* M и обозначим через G_M.

Утверждение 4

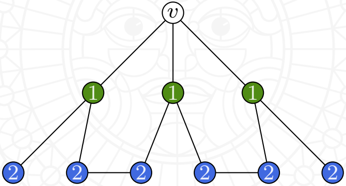
Необходимым условием существования совершенной раскраски обобщённого графа Петерсена в соответствии с матрицей параметров M является связность графа цветов этой матрицы.

Утверждение 5

Если в графе цветов G_M нет компонент связности мощностей $1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, то этот граф связный.

Утверждение 6

Для любой вершины $v \in V\Pi(n)$ в обобщённом графе Петерсена имеется подграф, представленный на рисунке ниже.



Сокращение перебора

n	Строка
1	00003
2	00021
...	...
34	21000
35	30000

$$n_1 = \{14, 32, 1, 1, 1\} \quad \rightarrow \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = \{14, 32, 1, 1, 2\},\ n_3 = \{14, 32, 1, 1, 3\},\ \ldots,\ n_{1225} = \{14, 32, 1, 35, 35\}$$

$$n_{1226} = \{14, 32, 2, 1, 1\}$$

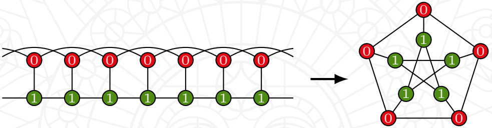
Сокращённый перебор

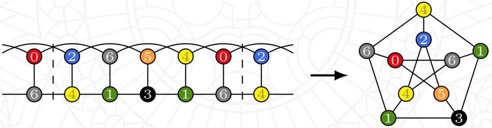
k	Полный перебор	Сокращённый перебор
2	16	13
3	1 000	328
4	160 000	6 758
5	52 521 875	136 977
6	30 840 979 456	2 816 973
7	29 509 034 655 744	60 886 446
8	42 998 169 600 000 000	1 399 486 560
9	90 647 430 472 564 453 125	36 259 479 363
10	265 599 227 914 240 000 000 000	904 116 864 117

Результаты

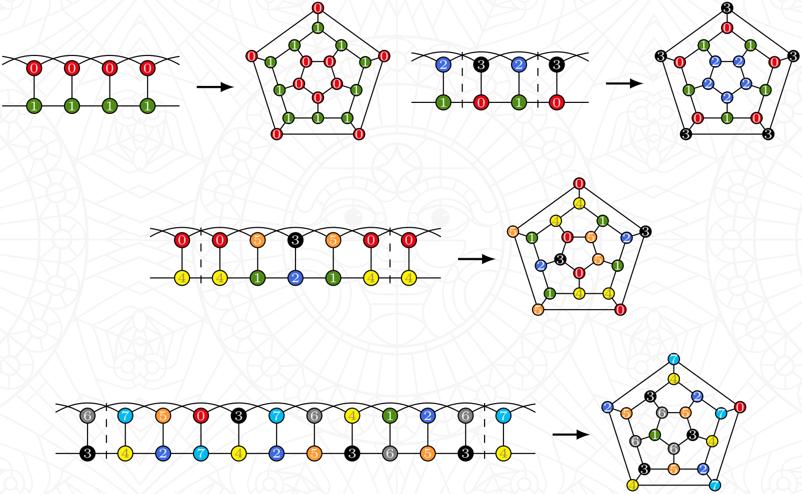
Кол-во цветов	Допустимые м-цы
2	3
3	5
4	7
5	2
6	5
7	2
8	5
9	0
10	4

Граф Петерсена $\Pi(5)$





Додекаэдр П(10)



Определения

Уникальный цвет

Цвет называется *уникальным*, если он встречается в совершенной раскраске ровно один раз.

Антиподальный граф

Граф называется *антиподальным*, если для любой его вершины существует ровно одна другая на расстоянии диаметра графа от неё.

Плюс-/минус-антиподальность

Если цвета диаметрально противоположных вершин совпадают, то раскраска будет *плюс-антиподальной*. Если цвета различны — *минус-антиподальной*. Если присутствуют оба варианта, то раскраска будет *смешанной*.

Додекаэдр П(10)

Утверждение 7

Если $k \geq 11$, то существуют цвета i и i' такие, что $|\varphi^{-1}(i)| = |\varphi^{-1}(i')| = 1$.

Утверждение 8

Пусть цвет i является уникальным. Тогда остальные цвета совершенной раскраски разбиваются по слоям относительны вершины цвета i.

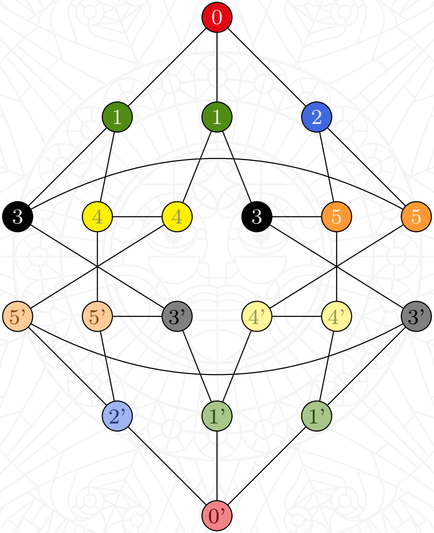
Утверждение 9

Совершенная раскраска в $11 \leq k \leq 20$ цветов минус-антиподальна.

Утверждение 10

Совершенных раскрасок в нечётное $k \geq 11$ цветов не существует. Совершенные раскраски в чётное $k \geq 11$ цветов существуют только для 12 и 20 цветов.

Додекаэдр П(10)



Спасибо за внимание!

Новосибирский государственный университет
*Настоящая наука