Арифметическая разрешимость моделей Эренфойхтовых теорий с арифметическими типами

Хлестова Е.И, студентка Новосибирского государственного университета, группа 20161
Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Е.Е. Витяев

06.06.2022.

Постановка задачи

Известная проблема М. Морли была поставлена в 1976 году [1]: будет ли каждая счётная модель эрефойхтовой теории с разрешимыми типами разрешима?

В 1983 году К. Эш и Т. Миллар [2] ослабили вопрос: являются ли счётные модели эренфойхтовых теорий с арифметическими типами арифметически разрешимы?

На этот вопрос мы частично сможем ответить!

---

[1] Morley, Michael. "Decidable models."Israel Journal of Mathematics 25.3 (1976): 233-240.

[2] C. Ash and T. Millar, "Persistently finite, persistently arithmetic theories," Proc. Am. Math. Soc.,89, 487-492 (1983).

Определения

Напомним что **теория** T это непротиворечивая совокупность предложений (формул без свободных переменных) замкнута относительно вывода.

Сигнатурой называется набор $\sigma = \{\sigma_R, \sigma_F, \sigma_c, \rho\}$ где
σ_R -множество символов для отношений
σ_F -множество символов для операций
σ_c - множество символов для констант
ρ - функция сопостовляющая отношениям и операциям их арность

Будем говорить что $\mathcal{M}$ **модель** заданной сигнатуры σ это пара $\{M, int_{\sigma}^{A}\}$ которая состоит из **основного (непустого) множества** модели M и отображений из множества символов в множество отношений и операций на M и элементов из M (задаёт интерпретацию).

Будем говорить что $\mathcal{M}$ **модель** теории T, $\mathcal{M} \models T$ если и только если для всех $\psi \in T$ $\mathcal{M} \models \psi$

Пример теории
1. Ассоциативность $(\forall x \forall y \forall z)(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
2. Нейтральный элемент $(\forall x) x \times 1 = x$
3. Обратный элемент $(\forall x)(\exists y) x \times y = y \times x = 1$

А пример модели этой теории:
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 0, +)$

Эренфойхтовые теории это теории с *конечным* числом неизоморфных моделей.

[3] Chang, Chen Chung, and H. Jerome Keisler. Model theory. Elsevier, 1990.

Определения

Формула $\varphi(x_1, ...x_n)$ называется **полной** в полной теории T, если она совместна с теорией T и для любой формулы ψ от переменных $x_1, ...x_n$, либо $T \vdash \varphi \to \psi$ либо $T \vdash \varphi \to \neg\psi$ [3].

Типом $p(x_1, ..., x_n)$ теории T над конечным набором свободных переменных $\{x_1, ..., x_n\}$ называется максимальное совместное множество формул с этим набором свободных переменных [3] так что $T \cup p(\bar{x})$ совместно[3].

Тип $p(x_1, \ldots, x_n)$ называется **главным** для теории T если существует формула $\varphi(x_1, ..., x_n)$, совместная с теорией T и для каждой формулы ψ из $p(x_1, \ldots, x_n)$,

$$T \models (\forall \bar{x})(\varphi(x_1, ..., x_n)) \to \psi(x_1, ..., x_n))$$

[3] Chang, Chen Chung, and H. Jerome Keisler. Model theory. Elsevier, 1990.

Определения

Простая модель это модель, которая элементарно вкладывается во все остальные и реализует только главные типы.

Элементарное вложение модели $\mathcal{N}$ в модель $\mathcal{M}$, это отображение $f : N \to M$ и для всех формул $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ и элементов $a_0, \dots, a_n \in N$ формула выполняется в модели $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда она выполняется на образах в модели $\mathcal{M}$

$$\mathcal{N} \models \psi(a_0, \dots, a_n) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(f(a_0), \dots, f(a_n))$$

Почти простая модель $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}$ это модель которая будет простой моделью $\mathcal{N}_{p(\bar{a})}$ над реализацией $\bar{a}$ типа p$(\bar{x})$ $p(\bar{a}) \rightleftharpoons [p(\bar{x})]^{x_0, \dots, x_n}_{a_0, \dots, a_n}$. Так что если $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}$ в сигнагуре σ, то для $\mathcal{N}_{p(\bar{a})}$ понадобится расширить её до $\sigma* \rightleftharpoons \sigma \cup \{a_0, \dots, a_n\}$ и уже в новой сигнатуре эта модель будет простая.

Определения

Счётная модель $\mathcal{M}$ называется **счётно однородной,** если для любых двух наборов $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$ и $\{b_1, ..., b_n\}$ из основного множества из условия $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n) \equiv (\mathcal{M}, b_1, \ldots, b_n)$, следует существование элемента такого, что $c \in M$ $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathcal{M}, b_1, \ldots, b_n, c)$.[3]

$\bigcup \mathcal{M}_{p(\bar{a}_i)}$ **предельная модель**, если существует почти простая модель $\mathcal{M}_p$ такая что

$$\mathcal{M}_{p(\bar{a}_\mathbf{0})} \prec \mathcal{M}_{p(\bar{a}_\mathbf{1})} \prec \ldots \prec \mathcal{M}_{p(\bar{a}_n)} \prec \ldots$$

где $\bigcup \mathcal{M}_{p(\bar{a}_i)} \ncong \mathcal{M}_{p(\bar{a}_i)}$ а $\mathcal{M}_{p(\bar{a}_i)} \cong \mathcal{M}_{p(\bar{a}_{i+\mathbf{1}})} \forall i \in \mathbb{N}$. [4]

---

[3] Chang, Chen Chung, and H. Jerome Keisler. Model theory. Elsevier, 1990.

[4] Судоплатов, С.В. "Полные теории с конечным числом счетных моделей. I."Алгебра и логика 43.1 (2004): 110-124.

Определения

Теория T называется **разрешимой**, если существует алгоритм, позволяющий для любой формулы ψ выяснить принадлежит ли ψ теории T или нет. Модель $\mathcal{A}$ называется **разрешимой**, если её основное множество A вычислимо, и существует алгоритм который вычисляет для каждой формулы $\theta(x_0,\ldots,x_{n-1})$ и каждого набора $(a_{i_0},\ldots,a_{i_{n-1}}) \in A^n$, выполняет ли $\mathcal{A} \models \theta(a_{i_0},\ldots,a_{i_{n-1}})$.

Арифметически разрешимая модель это модель, у которой основное множество арифметическое и проблема истинности всех формул разрешима с оракулом относительно арифметического множества.

Что же такое арифметическое множество? И что значит быть вычислимым относительно арифметическому множеству?

Множество $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ называется **арифметическим**, если оно определенно в арифметики Пеано:

$$X = \{n \in N \mid (\mathbb{N}, +, \times, =) \models \psi(n)\}$$

Эквивалентно, множество A **арифметическое** если найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что степень Тьюгинга этого множества $\emptyset^{(n)}$

[5] Rogers Jr, Hartley. Theory of recursive functions and effective computability. MIT press, 1987.

Множество A **вычислимо**, если существует вычислимая функция $f(x)$ такая что для всех $x \in A \to f(x) = 1$ и для всех $x \in \overline{A} \to f(x) = 0$. [5]

Будем говорить что множество A **вычислимо перечислимо** (в.п.), если множество пустое, либо существует всюду определённая вычислимая функция f, такая что A область определение этой функции $A = \mathrm{Range}\ f$.[5]

[5] Rogers Jr, Hartley. Theory of recursive functions and effective computability. MIT press, 1987.

Скачок по Тьюрингу определяется $A' = \{x \mid \varphi_x^A(x)\downarrow\}$ где A множество а $\varphi_x^A(x)$ это частичная функция вычислима на x-той машине Тьюринга с оракулом A, а $\downarrow$ значит, что эта функция определена.
Иначе говоря, это проблема остановки: остановится ли машина Тьюринга на данном входе? Это множество определяет относительно сводимости по Тьюрингу алгоритмически строго более сложное множество.

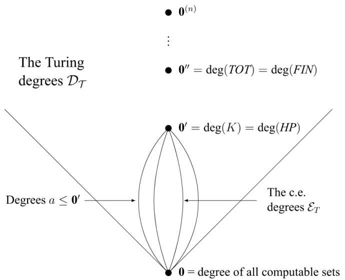


FIGURE 2: The Turing degrees $\mathcal{D}_T$. [A extended text-based description of figure 2 is in the supplement.]

[5] Rogers Jr, Hartley. Theory of recursive functions and effective computability. MIT press, 1987.

Арифметическая Иерархия

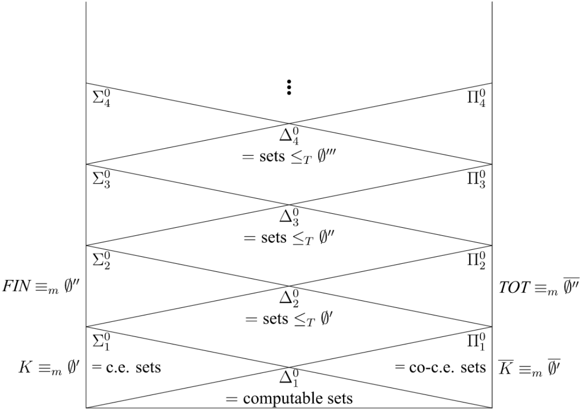


FIGURE 3: The Arithmetical Hierarchy. [A extended text-based description of figure 3 is in the supplement.]

[6] Dean, Walter, "Recursive Functions The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2021/entries/recursive-functions/>.

Предварительные результаты

Из эффективной версии теоремы об опускании рекурсивных типов разрешимых теории следует, что *простая модель эренфойхтовых разрешимых теорий будет разрешима*.[7]

[7] Перетятькин, М. Г. (1973). О полных теориях с конечным числом счётных моделей. Алгебра и логика, 12(5), 550-576.

Арифметическая вычислимость семейства всех типов

Theorem

Семейство всех типов эренфойхтовых теории с арифметическими типами $\emptyset^{(n)}$ вычислимо для подходящего n.

Можем воспользоваться релятивизацией теоремы Ю.Л. Ершова [6].
Идея: все типы в этих моделях будут разрешимы относительно прямой суммой арифметических множеств.
$S(\mathcal{M}_i) = A = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \ldots \bigoplus A_n$, а $S(\mathcal{M}_1), \ldots, S(\mathcal{M}_n)$, а моделей будет только конечное число, а значит $S = \bigcup_{i=1}^{n} S(\mathcal{M}_i)$ тоже будет A-вычислимо.

[8] Гончаров, С. С., Ершов, Ю. Л. (1999). Конструктивные модели. Научная Книга.

Theorem

Если семейство всех разрешимых конечных типов S теории вычислимо и $\mathcal{M}$ это счётная однородная модель с вычислимым семейством типов которые реализованы в $\mathcal{M}$, то модель $\mathcal{M}$ будет разрешима.[8]

Theorem

Если T эренфойхтовая теория с арифметическими типами, то все её однородные модели арифметически разрешимы.

[9]Goncharov, S. S. (1978). Strong constructivizability of homogeneous models. Algebra and Logic, 17(4), 247-263.

Арифметическая разрешимость почти простых моделей

Theorem

Если теория T A-разрешима и семейство всех её A-разрешимых типов A-вычислимо, то тип $p(\bar{x})$ - A-разрешим и в обогащении константами $p(\bar{c}) \rightleftharpoons [p(\bar{x})]^{x_0,\dots,x_n}_{c_0,\dots,c_n}$ имеет простую модель $\mathcal{N}_{p(\bar{c})}$ теории $p(\bar{c})$, то модель $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}$ является A- разрешимой почти простой моделью теории T.

Идея доказательства:
Заметим что для любого A-разрешимого типа формы $p(\bar{c}, \bar{x})$тип $p(\bar{y}, \bar{x})$ является A-разрешимым и принадлежит множеству A-разрешимых типов теории T. Для изучение A- разрешимости почти простых моделей рассмотрим все такие A-разрешимые типы $p(\bar{y}, \bar{x})$ и вместо переменных подставим набор констант $\bar{c}$. Таким образом мы получим семейство типов $p_i(\bar{c}, \bar{x})$. Это семейство по построению будет A-вычислимо и будет содержать все A-вычислимые типы теории $p(\bar{c})$.

Следствие

Если T эренфойхтовой теория и все её типы разрешимы, то любая её почти простая модель разрешима

Следствие

Если T эренфойхтовой теория и все её типы арифметические, то любая её почти простая модель арифметически разрешима.

Арифметическая вычислимость собственного элементарного вложения почти простых моделей

Theorem

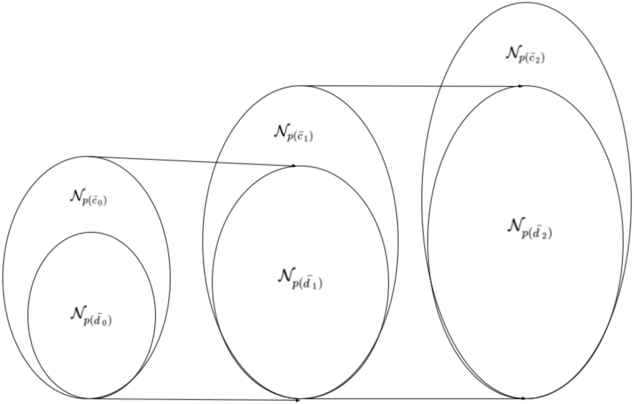
Если $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}(\bar{c})$ простая модель в обогащении константами для элементов из набора $\bar{c}$ реализующий тип $p(\bar{x})$, а набор $\bar{d}$ в $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}(\bar{c})$ тоже реализует тип $p(\bar{x})$, но $\bar{d}$ реализует главный тип над $\bar{c}$, а $\bar{c}$ реализует неглавный тип над $\bar{d}$, и $\mathcal{N}_{p(\bar{x})}(\bar{c})$ A- разрешимая модель, то существует собственное элементарное вложение

$$f : \mathcal{N}_{p(\bar{c})} \prec \mathcal{N}_{p(\bar{c})}$$

которое A'-вычислимо и

$$f(\bar{c}) = \bar{d}$$

такое что $f(\mathcal{N}_{p(\bar{c})}) \prec \mathcal{N}_{p(\bar{c})}$ и $f(\mathcal{N}_{p(\bar{x})}, \bar{c}) = \mathcal{N}_p(\bar{x}, \bar{d})$ а $\mathcal{N}_{p(\bar{c})}$ и $\mathcal{N}_{p(\bar{d})}$ простые модели над наборами $\bar{c}$ и $\bar{d}$ и $\mathcal{N}_{p(\bar{d})}$ подмодель в $\mathcal{N}_{p(\bar{c})}$.



$\mathcal{N}_{p(\bar{c}_2)}$
$\mathcal{N}_{p(\bar{c}_1)}$
$\mathcal{N}_{p(\bar{c}_0)}$
$\mathcal{N}_{p(\bar{d}_2)}$
$\mathcal{N}_{p(\bar{d}_1)}$
$\mathcal{N}_{p(\bar{d}_0)}$

Следствие

Если $\mathcal{N}_{p(\bar{c})} \prec \mathcal{N}_{p(\bar{c})}$ собственное элементарное вложение описано ранее, и наборы $\bar{c}$ и $\bar{d}$, такие, что набор $\bar{d}$ в $\mathcal{N}_{p(\bar{c})}$ реализует главный тип над $\bar{c}$, а $\bar{c}$ реализует неглавный тип над $\bar{d}$, то для любого набора $\bar{a}$ элементов из подмодели $\mathcal{N}_{p(\bar{d})}$ набор $\bar{c}$ так же будет реализовать неглавный тип над $\bar{a}$.

Арифметически разрешимое представление предела элементарных вложений

$$\mathcal{M}_0 \underset{f_0}{\preceq} \mathcal{M}_1 \underset{f_1}{\preceq} \mathcal{M}_2 \underset{f_2}{\preceq} \ldots \underset{f_n}{\preceq} \mathcal{M}_{n+1} \ldots$$

Theorem

Если $\mathcal{M}_i$ арифметически вычислимое семейство арифметически разрешимых моделей и $\{ f_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ арифметически вычислимое семейство элементарных вложений, то предел этой последовательности имеет арифметически разрешимое представление.

Арифметически разрешимое представление предельной модели

Следствие

Если $f : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ A' - вычислимая функция , $\mathcal{N}$ A- разрешимая модель, выберем подпоследовательность моделей ей изоморфных который реализуют один и тот же тип на наборах $\bar{d}_{ij}$ и построена последовательность такая, что $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}$ а $f_i = f$. Тогда последовательность $\{\mathcal{N}_i, i \in \mathbb{N}\}$ -A- вычислимая последовательность и $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ A'-вычислимая последовательность элементарных вложений и предельная модель которую обозначим $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{N}_i$ имеет A'-вычислимое представление.

$$\mathcal{N}_0 \underset{g_0}{\prec} \mathcal{N}_1 \underset{g_1}{\prec} \mathcal{N}_2 \underset{g_2}{\prec} \dots \underset{g_n}{\prec} \mathcal{N}_{n+1} \dots$$

Если $\mathcal{N}_p$ почти простая арифметически разрешимая модель с собственным элементарным вложением, то, повторяя вложение описанное ранее, можно построить арифметически разрешимое семейство моделей $\mathcal{N}_i$ такое что, $\forall i \in \mathbb{N}\ \mathcal{N}_i \cong \mathcal{N}_p$, и собственное элементарное вложение $g_i = f$, которые в пределе дадут **предельную модель** $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i$ с A'-вычислимым представлением, такую что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i \not\cong \mathcal{N}_i$, но $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}_i$ будут эквивалентны (будут реализовывать то же семейство типов).

СЕР: свойство согласованного расширения цепей простых над кортежами моделей [7], это свойство гарантирует эквивалентность между любыми двумя предельными моделями построенными над типом. Иными словами, в этих моделях будет только один класс эквивалентности.

Следствие

Если T арифметическая эренфойхтова теория с арифметическими типами и выполняется условие CEP, то все счетные модели у этой теории будут арифметически разрешимы.

Следствие

Если T арифметическая эренфойхтовая теория с арифметическими типами , то хотя бы одна счетная модель в каждом классе эквивалентности у этой теории будет арифметически разрешима.

[4] Судоплатов, С.В. "Полные теории с конечным числом счетных моделей. I."Алгебра и логика 43.1 (2004): 110-124.

Заключение

1. Однородные модели эренфойтовых теорий с (арифметическими) разрешимыми типами (арифметически) разрешимы.

2. Почти простые модели эренфойтовых теорий с (арифметическими) разрешимыми типами (арифметически) разрешимы.

3. С точностью до эквивалентности по типам, все предельные модели тоже будут арифметически разрешимы.

Предполагается построить классификацию предельных моделей в точности до изоморфизма и ответить на вопрос Эша и Миллера о них.

Спасибо за внимание!