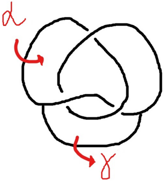
Существование гиперболической структуры на узле трилистник с мостом

Л. А. Грюнвальд

Новосибирский государственный университет, Россия

Трехмерным коническим многообразием называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной секционной кривизны k, путем изометрического отождествления их граней. Топологическое пространство, образованное в результате такого отождествления, является многообразием — *пространство-носитель*. В носитель вложено *сингулярное множество* представляющее собой замыкание всех 1-клеток. Каждая точка такого множества обладает *коническим углом*, который есть сумма всех двугранных углов 3-симплексов, содержащих эту точку.

Если $k = 0$, то соответствующее коническое многообразие допускает евклидову структуру. Если $k = 1$, то соответствующее коническое многообразие допускает сферическую структуру и наконец, если $k = -1$, то коническое многообразие допускает гиперболическую структуру.

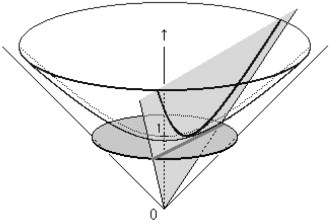


Обозначим $3_1(\alpha, \gamma)$ — трехмерное коническое многообразие, носителем которого является трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$, а сингулярным множеством Σ — узел трилистник 3_1 с мостом. Конический угол вокруг узла — α, а конический угол вокруг его моста — γ.

Известные результаты

1. Riley R. An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure // Topology of Low–Dimension manifolds. : Springer-Verl., 1979. P. 99–133. (Lect. Notes Math.; V. 722).
2. Thurston W. The geometry and topology of 3-manifold. Lecture notes. : Princeton Univ., 1980.
3. Mednykh A., Rasskazov A. Volumes and Degeneration of Cone-structures on the Figure-eight knot // Tokyo J. Math.. 2006. V. 29, N 2. P. 445–464.
4. Shmatkov R. N. Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds // Sib. Adv. Math.. 2003. V. 13, N 1. P. 55–86.
5. Соколова Д. Ю. О существовании евклидовой структуры на узле трилистник с мостом // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, No 1. С. 128–140.

Модель на гиперболоиде



$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$H_- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, \ x_0 > 0\},$$

где $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \ \mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$.

Рассмотрим $S^3 \backslash 3_1$ — дополнение к узлу трилистник с мостом. Его фундаментальная группа $\pi_1(S^3 \backslash 3_1)$ может быть найдена с помощью алгоритма Виртингера. Она имеет два порождающих элемента:

$$\pi_1(S^3 \backslash 3_1) = \langle s, t \mid stst^{-1}s^{-1}t^{-1} = 1 \rangle.$$

Отображение голономии $\varphi : \pi_1(S^3 \backslash 3_1) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ переводит порождающие элементы s and t группы $\pi_1(S^3 \backslash 3_1)$ в следующие изометрии гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$

$$\mathscr{S}(\mathsf{x}) = \mathbf{r}\,\mathbf{S}\,\mathbf{R}\,\mathbf{x}, \;\; \mathscr{T}(\mathsf{x}) = \mathbf{R}\,\mathbf{T}\,\mathbf{r}\,\mathbf{x}$$

соответственно.

Матрицы вращения **S** и **T** имеют вид

$$\mathbf{S} = \frac{1}{M^2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2+X^2-Y^2 & 2XY & -2MY \\ 0 & 2XY & M^2-X^2+Y^2 & 2MX \\ 0 & 2MY & -2MX & -1+M^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{M^2+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2+X^2-Y^2 & -2XY & 2MY \\ 0 & -2XY & M^2-X^2+Y^2 & 2MX \\ 0 & -2MY & -2MX & -1+M^2 \end{bmatrix},$$

где $M = \cot\frac{\alpha}{2}, X = \cos\frac{\theta}{2}, Y = \sin\frac{\theta}{2}$, и θ — угол относительного поворота между сингулярными компонентами.

Матрица **R**, осуществляющая сдвиг в пространстве $\mathbb{H}^3$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cosh\frac{a}{2} & 0 & 0 & \sinh\frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\frac{a}{2} & 0 & 0 & \cosh\frac{a}{2} \end{bmatrix},$$

где a — это расстояние между сингулярными компонентами. Матрица **r** является обратной к **R**.

При этом учтем, что отображение голономии переводит элемент $stst^{-1}s^{-1}t^{-1}$ во вращение на угол γ вокруг сингулярной компоненты, которая соответствует мосту рассматриваемого узла.

Теорема

Пусть $\pi/3 < \alpha < \pi$, *и* γ *определено следующим уравнением*

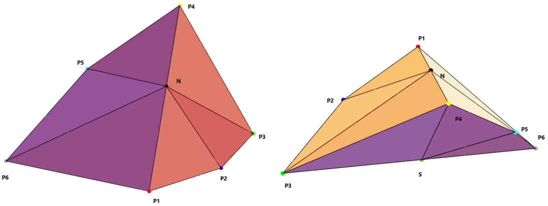
$$2\sin^2\frac{\gamma}{4} =$$

$$\frac{(Y - X + 3XY - 3X^2 + 4X^2Y)(X - Y - 3XY + 3Y^2 + 4XY^2)}{(Y - X + 2XY)^3},$$

где $Y = \cosh a,\ X = \cos\theta$. *Более того, для* $X > 1$ *выполняется оценка* $\dfrac{X}{X+1} < Y < 1$. *Тогда коническое многообразие* $3_1(\alpha, \gamma)$ *допускает гиперболическую структуру.*

[redacted]

В $\mathbb{H}^3$ существует двенадцатигранник, который является фундаментальным множеством конического многообразия $3_1(\alpha, \gamma)$. Его можно визуализировать в модели Клейна:



Отождествление криволинейных граней многогранника осуществляется изометрическими преобразованиями $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$ по правилам:

$$\mathscr{S} : P_1P_6P_5P_4 \to P_1P_2P_3P_4$$

$$\mathscr{T} : P_1P_2P_5P_3 \to P_5P_4P_3P_3$$

Гиперболический объем конического многообразия $3_1(\alpha, \gamma)$

$\alpha,\ \gamma$	X	*Volume*
$2\pi/3,\ 2\pi/2$	1.11124	0.264774
$2\pi/4,\ 2\pi/2$	1.61803	1.83193
$2\pi/5,\ 2\pi/2$	2.32419	2.97947
$2\pi/6,\ 2\pi/2$	3.22138	3.46256
$2\pi/7,\ 2\pi/2$	4.30426	3.73303
$2\pi/3,\ 2\pi/5$	1.26927	2.2983
$2\pi/4,\ 2\pi/5$	1.86962	3.53971
$2\pi/5,\ 2\pi/5$	2.69991	4.12611

Благодарю за внимание!