Золотое сечение: граница нормальности для задачи open shop с маршрутизацией и пропорциональными длительностями операций

Агзямова Полина Матвеевна
Кафедра теоретической кибернетики

Научный руководитель: к. ф.-м. н. Черных Илья Дмитриевич

Новосибирский государственный университет

6 июня 2022 г.

Содержание

1. Постановка задачи и обозначения

2. Известные результаты

3. $RO2|\,\mathrm{rank}\, P{=}1,\, G{=}K_2|R_{\max}$

- Нормальность примера при $k \geqslant \Phi$
- Контрпример при $1 \leqslant k < \Phi$
- Критичность контрпримера при $1 \leqslant k < \Phi$
- Зависимость границы локализации оптимумов от k

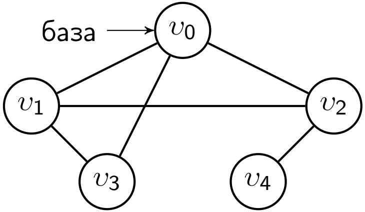
Постановка задачи $RO||R_{\max}$

$J = \{J_1, \ldots, J_n\}$ — работы
$M = \{M_1, \ldots M_m\}$ — машины
$O = \{O_{ij} | i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ — операции
$P = \{p_{ij}\}_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ — матрица длительностей операций

$G = \langle V, E\rangle$ — транспортная сеть
$dist(v_l, v_r)$ — расстояние между вершинами v_l, v_r
$\forall j = \overline{1, n} \;\; \exists! t \;\; | \;\; J_j \in \mathcal{J}_t$
$\forall t \;\; |\mathcal{J}_t| \geqslant 1$

Целевая функция

$R_{\max}(S) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} R_i \to \min\limits_{S}$



Постановка задачи $RO2|\,\text{rank}\,P{=}1,\,G{=}K_2|R_{\max}$

$$\boxed{RO2||R_{\max}}$$

Постановка задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\,P{=}1,\, G{=}K_2|R_{\max}$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{RO2||R_{\max}} \arrow[d] \\
\boxed{RO2|prpt|R_{\max}}
\end{tikzcd}$$

Постановка задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\,P{=}1,\,G{=}K_2|R_{\max}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{RO2||R_{\max}} \arrow[d] & \\
 & \boxed{RO2|prpt|R_{\max}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{RO2|j\text{-}prpt|R_{\max}} & & \boxed{RO2|m\text{-}prpt|R_{\max}}
\end{tikzcd}
$$

$p_{1j} = p_{2j} = p_j$

$p_{1j} = p_1,$
$p_{2j} = p_2$

Постановка задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\,P{=}1,\,G{=}K_2|R_{\max}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{RO2||R_{\max}} \arrow[d] & & \\
 & & \boxed{RO2|prpt|R_{\max}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
p_{1j} = p_{2j} = p_j & \boxed{RO2|j\text{-}prpt|R_{\max}} & & \boxed{RO2|m\text{-}prpt|R_{\max}} & \begin{array}{c} p_{1j} = p_1, \\ p_{2j} = p_2 \end{array} \\
 & & \boxed{RO2|\mathrm{rank}\,P{=}1|R_{\max}} \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[ur] & \begin{array}{c} p_{1j} = kp_j, \\ p_{2j} = p_j,\, 1 \leqslant k \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

Постановка задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\,P{=}1,\,G{=}K_2|R_{\max}$

$$
\begin{tikzcd}
 & RO2||R_{\max} \arrow[d] & \\
 & RO2|prpt|R_{\max} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
RO2|j\text{-}prpt|R_{\max} & & RO2|m\text{-}prpt|R_{\max} \\
 & RO2|\mathrm{rank}\,P{=}1|R_{\max} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] \arrow[d] & \\
 & RO2|\mathrm{rank}\,P{=}1,\,G{=}K_2|R_{\max} &
\end{tikzcd}
$$

$p_{1j} = p_{2j} = p_j$

$p_{1j} = p_1,$
$p_{2j} = p_2$

$p_{1j} = kp_j,$
$p_{2j} = p_j, 1 \leqslant k$

Обозначения

- $l_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ — нагрузка машины M_i
- $l_1 \geqslant l_2$
- $d_j = \sum_{i=1}^{2} p_{ij} = (k+1)p_j$ — длина работы J_j
- $d_{\max} = \max_j d_j$ — максимальная длина работы
- T^* — оптимум задачи коммивояжера на графе G
- $\overline{R}(I) = \max\left\{l_1 + T^*, \max_{v}[d_{\max}(v) + 2dist(v_0, v)]\right\}$ — стандартная нижняя оценка длины расписания
- Пример задачи $RO2||R_{\max}$ называется ***нормальным***, если длина оптимального расписания для него совпадает со стандартной нижней оценкой.

Известные результаты

- $O||C_{\max}$ — NP-трудна в сильном смысле даже для случая, когда длительности операций целые и не превосходят 2.

  Williamson D.P., Hall L.A., Hoogeveen J.A., Hurkens C.A.J., Lenstra J.K., Sevast'janov S.V., Shmoys D.B., 1997

- $O2||C_{\max}$ — полиномиально разрешима. Длина оптимального расписания совпадает со стандартной нижней оценкой.

  Gonzalez T., Sahni S., 1976

- $O3|j\text{-}prpt|C_{\max}$ — NP-трудна.

  Liu C., Bulfin R., 1987

- $RO2|G = K_2|R_{\max}$ — NP-трудна.

  Averbakh I., Berman O., Chernykh I., 2006

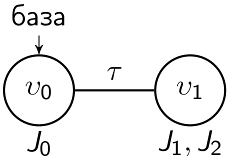
- $RO2|j\text{-}prop, G = K_2|R_{\max}$ — NP-трудна, длина оптимального расписания лежит в интервале $[\bar{R}, \frac{7}{6}\bar{R}]$

  Pyatkin A., Chernykh I., 2022

Цель

Определить, при каких значениях коэффициента пропорциональности k можно гарантировать нормальность примера для задачи $RO2|\operatorname{rank} P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$.

$RO2|\ \text{rank}\ P{=}1,\ G{=}K_2|R_{\max}$



$$J_0 = \begin{pmatrix} ka \\ a \end{pmatrix}, J_1 = \begin{pmatrix} kb \\ b \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} kc \\ c \end{pmatrix}, b \geqslant c$$

- $l_1 = k(a + b + c)$
- $l_2 = a + b + c$
- $T^* = 2\tau$
- $\bar{R} = \max\{l_1 + 2\tau, (1 + k)a, (1 + k)b + 2\tau\}$

Нормальность примера при $k \geqslant \Phi$

Лемма 1

Для любого примера задачи $RO2|\operatorname{rank} P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$ с коэффициентом пропорциональности $k \geqslant \Phi$ существует допустимое расписание длины $\bar{R}$.

$$\begin{tikzcd}
 & ka \arrow[r, "\tau"] & kb \arrow[r] & kc \arrow[dr, "\tau"] & \\
s \arrow[ur] \arrow[dr, "\tau"'] & & & & f \\
 & b \arrow[uur] \arrow[r] & c \arrow[uur, dashed] \arrow[r, "\tau"] & a \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & ka \arrow[r, "\tau"] & kc \arrow[r] \arrow[dd] & kb \arrow[dr, "\tau"] & \\
s \arrow[ur] \arrow[dr, "\tau"'] & & & & f \\
 & b \arrow[r] & c \arrow[r, "\tau"] & a \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Нормальность примера при $k \geqslant \Phi$

Лемма 1

Для любого примера задачи $RO2|\operatorname{rank} P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$ с коэффициентом пропорциональности $k \geqslant \Phi$ существует допустимое расписание длины $\bar{R}$.

Φ — золотое сечение.

$$\Phi^2 - \Phi = 1$$

$$\Phi \approx 1.618$$

Контрпример при $1 \leqslant k < \Phi$

Лемма 2

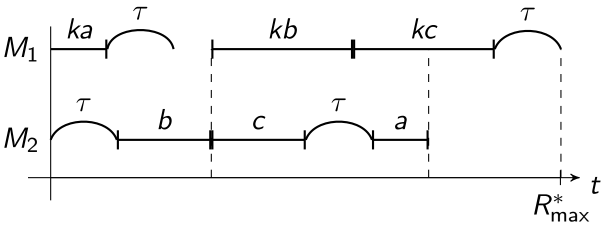
Для любого коэффициента пропорциональности $1 \leqslant k < \Phi$ для задачи $RO2|\operatorname{rank} P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$ существует пример, для которого длина любого допустимого расписания $R^*(I) \geqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}(I) > \bar{R}(I)$.

Контрпример при $1 \leqslant k < \Phi$

Лемма 2

Для любого коэффициента пропорциональности $1 \leqslant k < \Phi$ для задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\,P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$ существует пример, для которого длина любого допустимого расписания $R^*(I) \geqslant \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}(I) > \bar{R}(I)$.

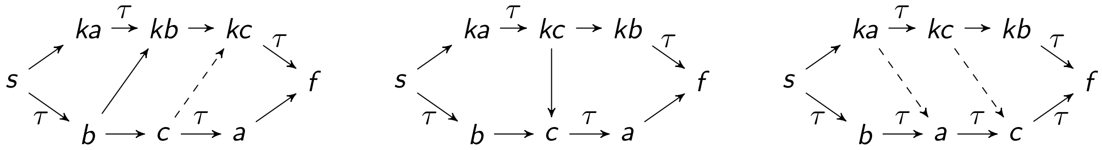
$$
\begin{aligned}
&a = k,\\
&b = c = k + 1,\\
&2\tau = 2k^2 - 1.\\
&l = 3 + 2k\\
&\bar{R} = kl + 2\tau = 5k^2 + 2k - 1\\
&R^*_{\max} = 4k^2 + 3k
\end{aligned}
$$



Критичность контрпримера при $1 \leqslant k < \Phi$

Лемма 3

Для любого примера задачи $RO2|\,\mathrm{rank}\, P{=}1,\, G{=}K_2|R_{\max}$ с коэффициентом пропорциональности $1 \leqslant k < \Phi$ существует допустимое расписание, длина которого не превосходит $\frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}\bar{R}$.



Зависимость границы локализации оптимумов от k

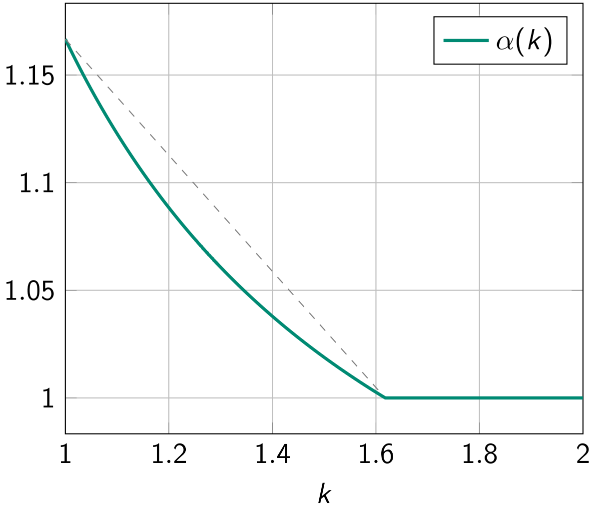
Теорема

Для задачи $RO2|\operatorname{rank} P{=}1, G{=}K_2|R_{\max}$ точная верхняя оценка на величину $\frac{R^*_{\max}(I)}{\bar{R}(I)}$ в зависимости от коэффициента пропорциональности $k \geqslant 1$ выглядит следующим образом

$$\alpha(k) = \begin{cases} \frac{4k^2+3k}{5k^2+2k-1}, & 1 \leqslant k < \Phi \\ 1, & \Phi \leqslant k \end{cases} \tag{1}$$

Более того, для любого примера I данной задачи расписание длины $R^*(I) \leqslant \alpha(k)\bar{R}(I)$ можно построить за линейное время.

Зависимость границы локализации оптимумов от k



Литература

[1] Averbakh I., Berman O., Chernykh I. The Routing Open Shop Problem on a Network: Complexity and Approximation // European Journal of Operational Research. 2006. V. 173, No. 2. P. 531-539.

[2] Chernykh I. Sufficient Conditions of Polynomial Solvability of the Two-Machine Preemptive Routing Open Shop on a Tree // Communications in Computer and Information Science, V. 974: collection of reports of the 9th International Conference on Optimization and Applications «OPTIMA 2018». Petrovac, Montenegro, oct. 1—5, 2018. Springer-Verlag GmbH and Co. KG, 2019. P. 97-110.

[3] Chernykh I., Lgotina E. Two-machine routing open shop on a tree: instance reduction and efficiently solvable subclass // Optimization Methods and Software. 2020.

[4] Gonzalez T., Sahni S. Open shop scheduling to minimize finish time // Journal of the Association for Computer Machinery. 1976. V. 23, No. 4. P. 665-679.

[5] Pyatkin, A., Chernykh, I.: The open shop problem with routing at a two-node network and allowed preemption. Journal of Applied and Industrial Mathematics 6(3), 346-354 (2012).

[6] Pyatkin A., Chernykh I. On complexity of two-machine routing propotionate open shop. Принято в печать в журнал Сибирские Электронные Математические Известия. 2022.

Спасибо за внимание!