

Алгоритм решения задачи о рюкзаке для прямоугольных объектов при ограничениях на расположение центра тяжести

Шперлинг Софья Михайловна
Научный руководитель:
Кочетов Юрий Андреевич

6 июня 2022

Дано:

- прямоугольник(рюкзак) с шириной W и высотой H ;
- множество прямоугольных объектов I ;
- ширина w_i , высота h_i и масса m_i для каждого объекта $i \in I$;
- максимально допустимое отклонение центра тяжести упакованных объектов от геометрического центра рюкзака δ_x и δ_y по каждой из координат.

Нужно найти поднабор объектов и их расположение в рюкзаке таким образом, что бы пустое пространство было бы минимальным.

При условии, что упакованные объекты не наслаиваются друг на друга. Допускается поворот объектов на 90° . Отклонение центра тяжести упакованных объектов от геометрического центра рюкзака не превышает заданных величин.

Математическая модель. Переменные

(x_i, y_i) – неотрицательные координаты левого нижнего угла объекта i .

(c_i^x, c_i^y) – неотрицательные координаты центра тяжести объекта i .

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ левее объекта } j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ ниже объекта } j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ повернут на } 90^\circ \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если объект } i \text{ упакован} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$B \geq \sum_{i \in I} (w_i + h_i)$ – достаточно большое число.

$$H \cdot W - \sum_{i \in I} h_i w_i z_i \rightarrow \min$$

$$x_i + w_i(1 - r_i) + h_i r_i \leq H + (1 - z_i)B, \quad i \in I \quad (1)$$

$$y_i + h_i(1 - r_i) + w_i r_i \leq W + (1 - z_i)B, \quad i \in I \quad (2)$$

$$x_i + w_i(1 - r_i) + h_i r_i \leq x_j + (1 - l_{ij})B + (1 - z_j)B, \quad i, j \in I \quad (3)$$

$$y_i + h_i(1 - r_i) + w_i r_i \leq y_j + (1 - b_{ij})B + (1 - z_j)B, \quad i, j \in I \quad (4)$$

$$l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} \geq 1, \quad i, j \in I, \quad i \neq j \quad (5)$$

$$c_i^x = x_i + \frac{w_i}{2}(1 - r_i) + \frac{h_i}{2}(r_i) - (1 - z_i)B, \quad i \in I \quad (6)$$

$$c_i^y = y_i + \frac{h_i}{2}(1 - r_i) + \frac{w_i}{2}(r_i) - (1 - z_i)B, \quad i \in I \quad (7)$$

$$c_i^x \leq z_i B; \quad c_i^y \leq z_i B, \quad i \in I \quad (8), (9)$$

$$\frac{W}{2} - \delta_x \leq \frac{\sum_{i \in I} m_i c_i^x}{\sum_{i \in I} z_i m_i} \leq \frac{W}{2} + \delta_x \quad (10)$$

$$\frac{H}{2} - \delta_y \leq \frac{\sum_{i \in I} m_i c_i^y}{\sum_{i \in I} z_i m_i} \leq \frac{H}{2} + \delta_y \quad (11)$$

Skyline алгоритм

- Задана полоса с известной шириной и набор объектов с предопределёнными шириной и высотой.
- Каждое состояние представляется набором горизонтальных и вертикальных линий, определяющих верхний уровень упакованных объектов.
- На каждом шаге выбирается самая нижняя левая горизонтальная прямая. Для этого места выбирается объект с наибольшим значением функции соответствия.



функция



функция



функция

соответствия = 3 соответствия = 2 соответствия = 1



функция



функция

соответствия = 1 соответствия = 0

Алгоритм имитации отжига

Input: T - начальная температура, $T = rT$ - закон уменьшения температуры.

Построить начальное решение S

Вычислить $F(S)$, $F^*(S) = F(S)$, $S^* = S$

while не выполнен критерий остановки **do**

 Выбрать S' случайным образом из окрестности $N(S)$

if $F(S') \leq F(S)$ **then**

$S = S'$

else $S = S'$ с вероятностью $\exp(F(S) - F(S')/T)$

end if

if $F^*(S) > F(S)$ **then**

$F^*(S) = F(S)$, $S^* = S$

end if

 Понизить температуру $T = rT$

end while

Выдать лучшее найденное решение S^*

- Представим список входных объектов в виде перестановки.
- Будем применять skyline алгоритм для того, что бы получить поднабор объектов и их расположение в рюкзаке для каждой перестановки.
- Добавим к целевой функции штраф, что бы минимизировать отклонение центра тяжести от разрешённой зоны.
- Нужно найти перестановку для которой получается лучшая упаковка объектов.

Алгоритм подсчёта штрафной функции

Input: Упаковка и количество r итераций подряд с решением, не удовлетворяющим условиям

Вычислить значение центра тяжести для упаковки.

if условия (10) или (11) не выполнены **then**

$r+ = 1$; Δ = общее отклонение из условий (10),(11)

$\text{штраф} = 10\Delta r$

else

$r = 0$; $\text{штраф} = 0$

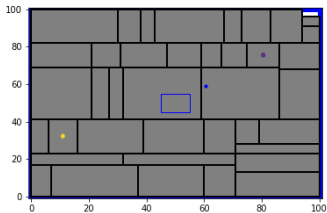
end if

return r , штраф

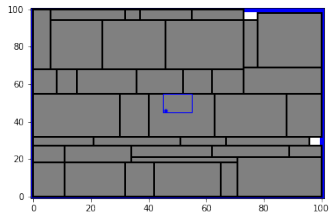
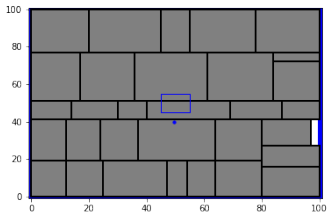
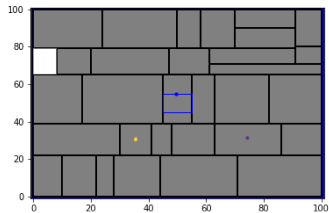
Поиск соседних решений

Центр тяжести находится

вне разрешённой зоны



в разрешённой зоне



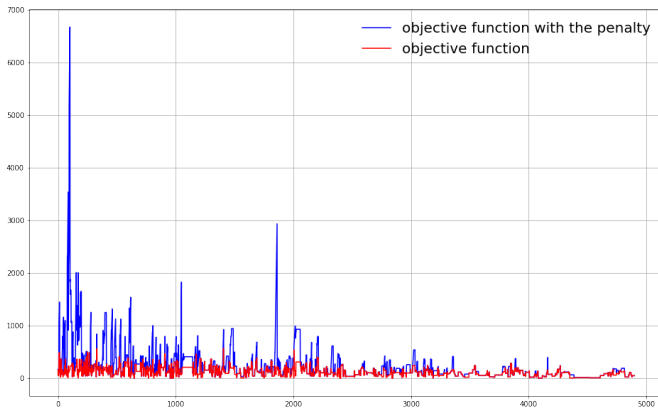
Вычислительные результаты работы модели

		Gurobi		SA alg		
$ I $	$\sigma_x = \sigma_y$	F	Time	F	$E(Time)$	$D(Time)$
10	25	6840.0	7.166	6840.0	0.288	0.009
10	15	7151.0	4.133	7151.0	0.293	0.010
10	5	6927.0	13.081	6927.0	0.329	0.007
20	25	3962.0	173.4	3962.0	1.298	0.018
20	15	4157.0	212.884	4157.0	1.379	0.020
20	5	3877.0	166.55	3877.0	0.669	0.00042
50	25	1495.0	428.354	361.0	10.880	7.162
50	15	1160.0	328.271	766.0	11.669	0.115
50	5	1464.0	390.213	519.0	12.648	0.068

Вычислительные результаты работы алгоритма имитации отжига

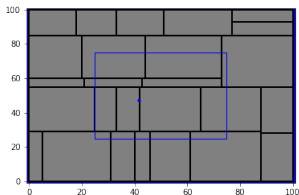
		SA alg		Basic SA alg	
$ I $	$\sigma_x = \sigma_y$	$E(Time)$	$D(Time)$	$E(Time)$	$D(Time)$
20	25	0.128	0.013	0.0844	0.0044
20	15	0.251	0.047	0.1061	0.0083
20	5	0.220	0.036	0.1205	0.0209
50	25	1.967	1.892	2.745	3.045
50	15	1.996	2.562	4.035	6.502
50	5	2.319	4.853	4.445	3.499
100	25	3.225	3.305	4.126	8.091
100	15	1.585	1.491	4.425	15.874
100	5	5.401	8.661	7.088	31.536
200	25	0.473	0.386	1.224	0.566
200	15	0.469	0.316	1.167	0.422
200	5	1.054	0.722	1.898	1.987
300	25	0.546	1.123	1.399	1.187
300	15	1.435	1.313	17.237	12.353
300	5	2.540	3.094	3.569	6.140

Типичное поведение алгоритма имитации отжига

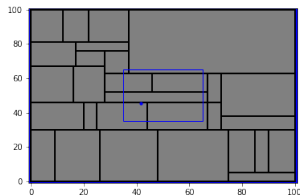


$$|I| = 100, \sigma = 5$$

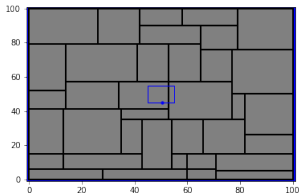
Примеры упаковок, полученных с помощью SA алгоритма в случаях со 100 прямоугольниками в начальном наборе



$$\sigma = 25$$



$$\sigma = 15$$



$$\sigma = 5$$

Результаты

- Построена математическая модель.
- Разработан алгоритм имитации отжига.
- Получены вычислительные результаты для модели и для алгоритма имитации отжига при разных размерностях входных данных.

Перспективы

- Разработка математической модели и оптимизационного алгоритма для решения задачи об упаковке в контейнеры при ограничениях на расположение центра тяжести для каждого контейнера.
- Другим направлением дальнейших исследований является трехмерная задача о рюкзаке или об упаковке в контейнеры.