Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения

Шеметова Валентина Владимировна
аспирант 2-го года обучения

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Демиденко Геннадий Владимирович

6 июня 2022 г.

Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу в четверти плоскости $\mathbb{R}^2$

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, \\ D_t u|_{t=0} &= 0, \\ \big(b_{12} D_x^2 + b_{11} D_x + b_{10}\big) u|_{x=0} &= 0, \\ \big(b_{22} D_x^2 + b_{21} D_x + b_{20}\big) u|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Цель — доказательство существования и единственности решения в соболевском пространстве.

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x).$$

Введем обозначение $L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum\limits_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k$.

Определение 1.

Уравнение называется псевдогиперболическим[1], если оператор $L(D_t, D_x)$ удовлетворяет условиям

1. Символ $L(i\eta, i\xi)$ однороден относительно вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, здесь $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_0 \in \mathbb{N}$ и $1/\alpha_1 \in \mathbb{N}$, то есть

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha_1} i\xi) = cL(i\eta, i\xi), \quad c > 0.$$

2. Оператор $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим, то есть $L_0(i\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.
3. Уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)} (i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi \neq 0,$$

имеет только вещественные корни относительно η.

[1] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.

Задача Коши

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$D_t u|_{t=0} = 0.$$

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 438 с.
2. Demidenko G.V. On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. – Sib. Adv. Math., V. 11. № 4, 2001. – P. 25–40.
3. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений. – Сиб. матем. журн., 56:6, 2015. – С.1289–1303.
4. Умаров Х.Г. Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне. – Сиб. матем. журн., 62:1, 2021. – С. 198—209.
5. Fedotov I., Volevich L. V. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative. – Russ. J. Math. Phys., V. 13. № 3, 2006. – P. 278–292.

Определение 2.

Функция $u(t,x) \in W_2^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)$, если существуют обобщенные производные $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x)$ в области $\mathbb{R}^2_+$, причем

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} \leq 1,$$

и $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x) \in L_2(\mathbb{R}^2_+)$.

$W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)$, $\gamma > 0$ соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, то есть $u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)$, если $e^{-\gamma t} u(t,x) \in W_2^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)$, норма в этом пространстве имеет вид

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)\| = \|e^{-\gamma t} u(t,x), W_2^{2,4}(\mathbb{R}^2_+)\|.$$

$$D_x^4 u(t,x) - D_x^2 D_t^2 u(t,x) + D_t^2 u(t,x) - a^2 D_x^2 u(t,x) = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0.$$

Теорема 1[2]**.**

Пусть $f(t,x) \in W^{0,1}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$ и $\gamma > 0$, тогда существует единственное решение задачи Коши $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$, также справедлива оценка

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)\| \le c(\gamma)\|f(t,x), W^{0,1}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)\|.$$

и $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$.

Теорема 2.

Пусть $f(t,x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$ и $f(t,x)|_{t=0} = 0$, $\gamma > 0$, тогда существует единственное решение задачи Коши $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$, при этом выполнена оценка

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)\| \le c(\gamma)\|f(t,x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)\|.$$

и $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$.

[2] Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений. – Сиб. матем. журн., 56:6, 2015. – 1289–1303 с.

Постановка задачи

Начально-краевая задача имеет вид

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = 0, \\ D_t u|_{t=0} = 0, \\ \big(b_{12} D_x^2 + b_{11} D_x + b_{10}\big) u|_{x=0} = 0, \\ \big(b_{22} D_x^2 + b_{21} D_x + b_{20}\big) u|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Условие Лопатинского

$$\begin{gathered} D_x^4 v - \tau^2 D_x^2 v + \tau^2 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad Re\tau > \gamma > 0, \\ \left(b_{12} D_x^2 + b_{11} D_x + b_{10}\right) v|_{x=0} = \varphi_1, \\ \left(b_{22} D_x^2 + b_{21} D_x + b_{20}\right) v|_{x=0} = \varphi_2, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |v(\tau, x)| < \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Определение 3.

Смешанная задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (2) однозначно разрешима при любых φ_1 и φ_2.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \tau^2 \lambda^2 + \tau^2 - a^2 \lambda^2 = 0, \tag{3}$$

не имеет корней на мнимой оси.
Пусть при некотором значении $Re\tau = \sigma_0 > \gamma > 0$ и $\eta_0 \neq 0$ корень $\lambda = ih$ существует, причем $h \neq 0$, подставим в (3)

$$h^4 + (\sigma_0^2 - \eta_0^2)(h^2 + 1) + a^2 h^2 + 2i\sigma_0\eta_0(h^2 + 1) = 0,$$

тогда $2i\sigma_0\eta_0(h^2 + 1) = 0$, противоречие.

Корни характеристического уравнения

Асимптотическое поведение корней имеет вид

$$\lambda_1 = -1 + O\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right), \quad |\tau| \to \infty,$$

$$\lambda_2 = -\tau - \frac{a^2 - 1}{\tau} + O\left(\frac{1}{|\tau|^3}\right), \quad |\tau| \to \infty,$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \qquad \lambda_4 = -\lambda_2.$$

тогда существует $Re\tau = \sigma > \gamma > \gamma_0 > 0$ такое, что

$$c_1 \le |\lambda_1| \le c_3, \quad c_1 \le |\lambda_3| \le c_3,$$

$$c_2|\tau| \le |\lambda_2| \le c_4|\tau|, \quad c_2|\tau| \le |\lambda_4| \le c_4|\tau|.$$

Характеристические многочлены граничных операторов задачи (1) представимы следующим образом

$$\big(b_{11} + b_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)\big)\lambda + \big(b_{10} - \lambda_1\lambda_2 b_{12}\big),$$

$$\big(b_{21} + b_{22}(\lambda_1 + \lambda_2)\big)\lambda + \big(b_{20} - \lambda_1\lambda_2 b_{22}\big).$$

Введем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} b_{10} - \lambda_1\lambda_2 b_{12} & b_{11} + b_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ b_{20} - \lambda_1\lambda_2 b_{22} & b_{21} + b_{22}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Начально-краевая задача (1) однозначно разрешима, если $\det B \neq 0$.

Теорема 3.

Пусть выполнено условие Лопатинского для смешанной задачи (1), тогда существует $\gamma^* > 0$ и если

$$\det B = c_2^*\tau + c_1^* + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right) \quad \text{при} \quad |\tau| \to \infty,$$

тогда задача (1) однозначно разрешима $u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma^*$, для любой

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \ \text{такой что} \ f(t,x)|_{t=0} = 0,$$

причем $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ и справедлива оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \le c(\gamma)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|.$$

Теорема 4.

Пусть выполнено условие Лопатинского для смешанной задачи (1), тогда существует $\gamma^* > 0$ и если

$$\det B = c_2^* \tau + c_1^* + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right) \quad \text{при} \quad |\tau| \to \infty,$$

тогда задача (1) однозначно разрешима $u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma^*$, для любой

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}_{++}^2),$$

причем $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ и справедлива оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma) \|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}_{++}^2)\|.$$

Пример 1

Рассмотрим смешанную задачу

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$D_t u|_{t=0} = 0,$$

$$(2D_x + I)|_{x=0} = 0,$$

$$D_x^2 u|_{x=0} = 0.$$

Матрица Лопатинского будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\det B = 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_1 = \tau - 1 + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \quad |\tau| \to \infty.$$

Из теоремы 3: $\forall f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$ такой что $f(t,x)|_{t=0} = 0$,

$$\exists! u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2).$$

Из теоремы 4: $\forall f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}_{++}^2), \exists! u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Теорема 5.

Пусть выполнено условие Лопатинского для смешанной задачи (1), тогда существует $\gamma^* > 0$ и если

$$\det B = c_1^* + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right) \quad \text{при} \quad |\tau| \to \infty,$$

тогда задача (1) однозначно разрешима $u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma^*$, для любой

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \text{ такой что } f(t,x)|_{t=0} = 0,$$

причем $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$ и справедлива оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \le c(\gamma)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|.$$

Пример 2

Рассмотрим смешанную задачу

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$D_t u|_{t=0} = 0,$$

$$(D_x + I)u|_{x=0} = 0,$$

$$D_x^2 u|_{x=0} = 0.$$

Матрица Лопатинского будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\det B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_1 = -1 + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \quad |\tau| \to \infty.$$

Из теоремы 5: $\forall f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}^2_{++})$ такой что $f(t,x)|_{t=0} = 0$,

$$\exists! u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_{++}).$$

Может ли $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}^2_{++})$?

Пример 2

Рассмотрим смешанную задачу

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$D_t u|_{t=0} = 0,$$

$$(D_x + I)u|_{x=0} = 0,$$

$$D_x^2 u|_{x=0} = 0.$$

Матрица Лопатинского будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\det B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_1 = -1 + O\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \quad |\tau| \to \infty.$$

Из теоремы 5: $\forall f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$ такой что $f(t,x)|_{t=0} = 0$,

$$\exists! u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2).$$

Может ли $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}_{++}^2)$?

$\exists f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(\mathbb{R}_{++}^2)$, такая что $u(t,x) \notin W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$

$f(t,x) = \sin(x)\big(\theta(x) - \theta(x-\pi)\big) \cdot (e^{-t}\theta(t-a)\big).$

Теорема 6.

Пусть выполнено условие Лопатинского для смешанной задачи (1), тогда существует $\gamma^* > 0$ и если

$$\det B = O\left(\frac{1}{|\tau|}\right) \quad \text{при} \quad |\tau| \to \infty,$$

тогда задача (1) однозначно разрешима $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma^*$, для любой

$$f(t,x) \in W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}), \text{ такой что } D_t f(t,x)|_{t=0} = f(t,x)|_{t=0} = 0,$$

причем $D_x^2 D_t^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$ и справедлива оценка

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \leq c(\gamma)\|f(t,x), W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|.$$

Пример 3

Рассмотрим смешанную задачу

$$D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$D_t u|_{t=0} = 0,$$

$$(D_x + I)u|_{x=0} = 0,$$

$$(D_x^2 + D_x)u|_{x=0} = 0.$$

Матрица Лопатинского будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & 1+\lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\det B = \lambda_2 + \lambda_1 + 1 + \lambda_1\lambda_2 = O\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \quad |\tau| \to \infty.$$

Из теоремы 6: $\forall f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$ такой что

$$D_t f(t,x)|_{t=0} = f(t,x)|_{t=0} = 0, \exists! u(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2).$$

Постановка задачи

Начально-краевая задача имеет вид

$$
\begin{gathered}
D_x^4 u - D_x^2 D_t^2 u + D_t^2 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\
u|_{t=0} = 0, \\
D_t u|_{t=0} = 0, \\
\big(b_{13} D_x^3 + b_{12} D_x^2 + b_{11} D_x + b_{10}\big) u|_{x=0} = 0, \\
\big(b_{23} D_x^3 + b_{22} D_x^2 + b_{21} D_x + b_{20}\big) u|_{x=0} = 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Условие Лопатинского

$$\begin{gathered}
D_x^4 v - \tau^2 D_x^2 v + \tau^2 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad Re\tau > \gamma > 0, \\
\left(b_{13} D_x^3 + b_{12} D_x^2 + b_{11} D_x + b_{10}\right) v|_{x=0} = \varphi_1, \\
\left(b_{23} D_x^3 + b_{22} D_x^2 + b_{21} D_x + b_{20}\right) v|_{x=0} = \varphi_2, \\
\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |v(\tau, x)| < \infty.
\end{gathered} \tag{6}$$

Определение 3.

Смешанная задача (5) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (6) однозначно разрешима при любых φ_1 и φ_2.

Введем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} b_{10} - \lambda_1\lambda_2\left(b_{12} + b_{13}(\lambda_1 + \lambda_2)\right) & b_{11} + b_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + b_{13}(\tau^2 + a^2 + \lambda_1\lambda_2) \\ b_{20} - \lambda_1\lambda_2\left(b_{22} + b_{23}(\lambda_1 + \lambda_2)\right) & b_{21} + b_{22}(\lambda_1 + \lambda_2) + b_{23}(\tau^2 + a^2 + \lambda_1\lambda_2) \end{bmatrix}$$

Начально-краевая задача (5) однозначно разрешима, если $\det B \neq 0$.

Спасибо за внимание!