Квазиконформный анализ на группах Гейзенберга

Исангулова Д. В.

Кафедра математического анализа ММФ НГУ
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

28 мая 2023г.

Квазиконформный анализ в $\mathbb{R}^n$

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in W^1_{n,loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

f — отображение с ограниченным искажением, если

$\exists\ K \geqslant 1\ :\ |Df(x)|^n \leqslant K \cdot \det Df(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

K — *коэффициент искажения*

Свойства отображения f с ограниченным искажением:

- непрерывность, открытость и дискретность;
- дифференцируемость почти всюду;
- $\mathcal{N}$-свойство Лузина и $\mathcal{N}^{-1}$-свойство Лузина;
- $\det Df(x) > 0$ почти всюду.

Конформные отображения в $\mathbb{R}^n$

Теорема Лиувилля (Ю.Г.Решетняк, 1966)

$f \in W_n^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $K = 1$ на Ω $\quad\Longrightarrow\quad$ f — мёбиусово, т.е. композиция следующих отображений:

- сдвиг $\pi_a(x) = a + x$, $a \in \mathbb{R}^n$,
- поворот $R_A(x) = Ax$, $A \in SO(n)$,
- растяжение $\delta_t(x) = tx$, $t > 0$,
- инверсия $j(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$.

M_n — группа мёбиусовых преобразований в $\mathbb{R}^n$

Задача устойчивости в теореме Лиувилля

Если K близко к 1, то найдется $\varphi \in M_n$ такое, что f близко к φ.

Устойчивость в теореме Лиувилля в R^n

Теорема (Ю. Г. Решетняк, 1976)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область Джона, f — отображение с ограниченным искажением на Ω, $K < 1 + \varepsilon$. Тогда $\exists$ конформное отображение φ такое, что

$$|\varphi^{-1} \circ f(x) - x| \leqslant C(K-1) \quad \text{для всех } x \in \Omega,$$

$$\|D(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{p,\Omega} \leqslant C(K-1), \quad p < \frac{C}{K-1}.$$

Следствие

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область Джона, f — отображение с ограниченным искажением на Ω, $K < 1 + \varepsilon$. Тогда $f \in W^1_{p_K}$, где $p_K \to \infty$ при $K \to 1$.

Коэрцитивная оценка

Коэрцитивная оценка (Ю. Г. Решетняк, 1970)

Пусть Q — однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\dim\ker Q < \infty$, Ω — область Джона. Тогда существует проектор $\Pi\colon W_p^1(\Omega,\mathbb{R}^n) \to \ker Q$ такой, что

$$\|D(u-\Pi u)\|_{p,\Omega} \leqslant C\|Qu\|_{p,\Omega} \quad \forall\ u \in W_p^1(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Коэрцитивная оценка

Оператор Q_2

$$Q_2 u = \frac{Du + (Du)^t}{2} - \frac{tr(Du)}{n} I$$

Ядро оператора Q_2

$\ker Q_2 =$ алгебра Ли группы мёбиусовых преобразований.

Алгебра Ли группы мёбиусовых преобразований $Lie(M_n)$

Векторное поле $v \in Lie(M_n) \iff v$ представляется суммой следующих векторные полей:

- a, $a \in \mathbb{R}^n$ ($\pi_{sa}(x) = sa + x$ — сдвиг);
- Kx, $K + K^t = 0$ ($e^{sK}x$ — поворот);
- kx, $k > 0$ ($e^{sk}x$ — растяжение);
- $2(q, x)x + |x|^2 q$, $q \in \mathbb{R}^n$ ($j \circ \pi_{sq} \circ j$ — инверсия со сдвигом).

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$

$(w, t) \in \mathbb{H}^n$, $w \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in \mathbb{R}$

Групповая операция

$$(w, t)(w', t') = \left(w + w', t + t' - 2\sum_{i=1}^{n}(w_i w'_{i+n} - w_{i+n} w'_i)\right).$$

Ортонормированные левоинвариантные векторные поля

$$X_i = \frac{\partial}{\partial w_i} + 2w_{i+n}\frac{\partial}{\partial t},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$X_{i+n} = \frac{\partial}{\partial w_{i+n}} - 2w_i\frac{\partial}{\partial t},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$T = \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{4}[X_i, X_{i+n}],\ i = 1, \ldots, n.$$

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$

Алгебра Ли $V = V_1 \oplus V_2$, где

$V_1 = \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_{2n}\}$ — горизонтальное подрасслоение,

$V_2 = \mathrm{span}\{T\}$.

Расстояние Карно – Каратеодори

$$d(x, y) = \inf\left\{\mathrm{length}(\gamma) \,\middle|\, \frac{d}{ds}\gamma \in V_1(\gamma(s))\right\}$$

$\nu = 2n + 2$ — хаусдорфова размерность

Отображения класса Соболева на $\mathbb{H}^n$

$f\colon \Omega \subset \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

f принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{H}^n)$, если

- $d(f(\cdot), e) \in L_{p,\mathrm{loc}}$
- $f_j \in ACL$ вдоль почти всех интегральных линий горизонтальных векторных полей $\forall j$
- $X_i f(x) \in V_1(f(x))$ п. в., $i = 1, \ldots, 2n$, — условие контактности
- $X_i f_j \in L_{p,\mathrm{loc}}$, $i, j = 1, \ldots, 2n$

$D_h f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (X_j f_i(x))_{i,j=1}^{2n}\colon V_1(x) \to V_1(f(x))$ — горизонтальный дифференциал.
$D_h f(x)$ продолжается до полного диференциала
$Df(x)\colon V(x) \to V(f(x))$ (гомоморфизм алгебр Ли)

Отображения с ограниченным искажением на $\mathbb{H}^n$

$f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{H}^n)$

f — отображение с ограниченным искажением, если

$\exists\ K \geqslant 1\ :\ |D_h f(x)|^\nu \leqslant K \cdot \det Df(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Свойства отображения с ограниченным искажением f:

- непрерывность, открытость и дискретность;
- $\mathcal{P}$-дифференцируемость почти всюду;
- $\mathcal{N}$-свойство Лузина и $\mathcal{N}^{-1}$-свойство Лузина;
- $\det Df(x) > 0$ почти всюду.

Конформные отображения в $\mathbb{H}^n$

Теорема Лиувилля (С.К. Водопьянов, 1999)

$f \in W^1_\nu(\Omega, \mathbb{H}^n)$, $K = 1$ на Ω $\quad\Longrightarrow\quad$ f — мёбиусово, т.е. композиция следующих отображений:

- левый сдвиг $\pi_a(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{H}^n$,
- поворот $R_A(z,t) = (Az, t)$, $A \in SU(n)$, $z \in \mathbb{C}^n$,
- растяжение $\delta_s(w,p) = (sw, s^2 t)$, $s > 0$,
- инверсия $j(z,t) = \left(\dfrac{z}{|z|^2 - it}, \dfrac{-t}{|z|^4 + t^2}\right)$.

M_n — группа мёбиусовых преобразований в $\mathbb{H}^n$

Задача устойчивости в теореме Лиувилля

Если K близко к 1, то найдется $\varphi \in M_n$ такое, что f близко к φ.

Устойчивость в теореме Лиувилля в H^n, $n > 1$

Теорема

Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}^n$, $n > 1$, — область Джона, f — отображение с ограниченным искажением на Ω, $K < 1 + \varepsilon$. Тогда $\exists$ мёбиусово преобразование φ такое, что

$$d(\varphi^{-1} \circ f(x), x) \leqslant C\sqrt{K-1} \quad \text{для всех } x \in \Omega,$$

$$\|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{p,\Omega} \leqslant C(K-1), \quad p < \frac{C}{K-1}.$$

Следствие

Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ — область Джона, f — отображение с ограниченным искажением на Ω, $K < 1 + \varepsilon$. Тогда $f \in W^1_{p_K}$, где $p_K \to \infty$ при $K \to 1$.

Коэрцитивная оценка на $\mathbb{H}^n$

Коэрцитивная оценка

Пусть Q — однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\dim\ker Q < \infty$, Ω — область Джона. Тогда существует проектор $\Pi\colon W_p^1(\Omega, \mathbb{H}^n) \to \ker Q$ такой, что

$$\|D_h(u - \Pi u)\|_{p,\Omega} \leqslant C\|Qu\|_{p,\Omega} \quad \forall\ u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{H}^n).$$

Н. Н. Романовский, 2002, на областях, удовлетворяющих условию конуса
С. К. Водопьянов и И., 2010, на областях Джона на всех группах Карно

Коэрцитивная оценка на $\mathbb{H}^n$, $n > 1$

$$D_h f = \lambda S \text{ или } \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} S, \; S \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$$

Оператор Q_2

$u \colon \Omega \subset \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $u \in W^1_{1,loc}$

$$Q_2 u = \begin{pmatrix} \dfrac{D_h u + (D_h u)^t}{2} - \dfrac{tr(D_h u)}{2n} I \\ \dfrac{D_h u + J D_h u J}{2} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Коэрцитивная оценка на $\mathbb{H}^n$, $n > 1$

Ядро оператора Q_2

$\ker Q_2 =$ первые $2n$ кординатных функций алгебры Ли группы мёбиусовых преобразований.

Алгебра Ли группы мёбиусовых преобразований $Lie(M_n)$

Векторное поле $v = (u, p) \in Lie(M_n) \iff v$ представляется суммой следующих векторные полей:

- $(a, b + 4\,\mathrm{Im}(a, z))$, $(a, b) \in \mathbb{H}^n$ ($\pi_{(sa,sb)}(x)$ — левый сдвиг);
- $(Kz, 2\,\mathrm{Im}(Bz, z)$, $K + K^* = 0$ ($R_{sK}(x)$ — поворот);
- $(kz, 2kt)$, $k > 0$ ($\delta_{sk}(x)$ — растяжение);
- $((|z|^2 - it)(idz + c) - 2(z, c)z, d(|z|^4 + t^2) - 4|z|^2\,\mathrm{Im}(z, c) - 4t\,\mathrm{Re}(z, c))$, $(c, d) \in \mathbb{H}^n$ ($j \circ \pi_{(sc,sd)} \circ j$ — инверсия со сдвигом).

Устойчивость изометрий

f — L-квазииметрия на области Джона в $\mathbb{H}^n$, если

- $f \in W^1_{1,loc}(\Omega, \mathbb{H}^n)$,
- $\det Df(x)$ не меняет знак на Ω,
- $\dfrac{|\xi|}{L} \leqslant |D_h f(x)\xi| \leqslant L|\xi| \ \forall\ \xi \in V_1(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.

Теорема ($n > 1$, Водопьянов-И., 2013; $n = 1$, И., 2022)

Пусть f — L-квазииметрия на области Джона в $\mathbb{H}^n$.
Тогда $\exists$ изометрия ψ такая, что

$$d(f(x), \psi(x)) \leqslant C\sqrt{L-1} \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\|D_h f - D_h \psi\|_{p,\Omega} \leqslant C(L-1) \quad \forall p \in [1, \infty).$$