Конференция
«ЖЕНЩИНЫ В МАТЕМАТИКЕ»
Россия, Новосибирск, 27 – 28 мая 2023 года

аспирант 1-го года обучения
Соколова Галина Константиновна
Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

28 мая 2023 года

1. Зорин И. В. Математические заблуждения о периодических функциях / И. В. Зорин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. – Т. 43, № 4. – С. 74-77.
2. Negishi T. On Periodic Decomposition of Entire Functions of Several Variables / T. Negishi // Aequationes Math. – 2014. – Vol. 88, No. 1-2. – P. 1-34.
3. Mirotin A. R. On Sums and Products of Periodic Functions / A. R. Mirotin, E. A. Mirotin // Real Anal. Exchange. – 2008. – Vol. 34, No. 2. – P. 347-358.
4. Эвнин А. Ю. Период суммы двух периодических функций / А. Ю. Эвнин // Вестн. Южно-Ур. гос. ун–та. Сер. Математика. Физика. Химия. – 2005, № 2. – С. 56-61.
5. Микаелян Л. В. О периодичности суммы периодических функций / Л. В. Микаелян, Н. М. Седракян // Математическое образование. – 2000. – № 2(13). – С. 29-33.
6. Скриганов М. М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов / М. М. Скриганов // Труды МИАН СССР. – 1985. – Т. 171. – С. 3-122.
7. Kern R. Multiply periodic real functions and their period sets / R. Kern // Manuscripta Mathematica. – 1977. – Vol. 20, No. 2. – P. 153-175.
8. Fine N. J. Uniqueness Theorems for Periodic Functions / N. J. Fine, H. S. Wilf // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 16, No. 1. – P. 109-114.
9. Baker H. F. An Introduction to the Theory of Multiply Periodic Functions / H. F. Baker. – Cambridge: University Press, 1907. – 364 p.

Определение 1

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ нескольких переменных называется *периодической* с периодом $\bar{T} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, если для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(\bar{r}+\bar{T}) = f(\bar{r})$.

Если $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ — периоды функции f, то для любых $k, m \in \mathbb{Z}$ таких, что $k^2 + m^2 \neq 0$, вектор $k\bar{T}_1 + m\bar{T}_2$ также является периодом этой функции.

Определение 1

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ нескольких переменных называется *периодической* с периодом $\bar{T} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, если для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(\bar{r}+\bar{T}) = f(\bar{r})$.

Если $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ — периоды функции f, то для любых k, $m \in \mathbb{Z}$ таких, что $k^2 + m^2 \neq 0$, вектор $k\bar{T}_1 + m\bar{T}_2$ также является периодом этой функции.

Пусть $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ — n-мерная прямая с направляющим вектором $\bar{T}$, $\bar{a}$ — радиус-вектор точки, принадлежащей $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$, такой, что

$$\langle \bar{a}, \bar{T} \rangle = 0. \tag{1}$$

Уравнение прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ имеет вид: $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{\mathscr{T}}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $\bar{T} = |\bar{T}|\, \bar{\mathscr{T}}$.

$$f(\bar{r})\Big|_{\bar{r}\in\ell_{\bar{T}}(\bar{a})} = f(\bar{a} + t\bar{\mathscr{T}}) \text{ или } g_{\bar{a}}(t) = f(\bar{a} + t\bar{\mathscr{T}}).$$

Лемма

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — периодической с периодом $\bar{T}$. Тогда данная функция является периодической с периодом $|\bar{T}|$ вдоль каждой прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором $\bar{T}$.

Определение 2

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической с периодом $\bar{T}$, тогда период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным периодом функции f в данном направлении* $\bar{\mathscr{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathscr{T}}$.

Определение 2

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической с периодом $\bar{T}$, тогда период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным периодом функции f в данном направлении* $\bar{\mathscr{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathscr{T}}$.

Пример 1. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x,\ y) \to \sin x \cos y, \tag{2}$$

в направлении орта $\bar{\mathscr{T}} = \bar{i}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{2\pi; 0\}$;
в направлении орта $\bar{\mathscr{T}} = \bar{j}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{0; 2\pi\}$;
в направлении $\bar{\mathscr{T}}\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{\pi; \pi\}$;
в направлении $\bar{\mathscr{T}}\{\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{3\pi; \pi\}$.

Определение 2

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической с периодом $\bar{T}$, тогда период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным периодом функции* f *в данном направлении* $\bar{\mathscr{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathscr{T}}$.

Пример 1. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x,\, y) \to \sin x \cos y, \tag{2}$$

в направлении орта $\bar{\mathscr{T}} = \bar{i}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{2\pi; 0\}$;
в направлении орта $\bar{\mathscr{T}} = \bar{j}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{0; 2\pi\}$;
в направлении $\bar{\mathscr{T}}\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{\pi; \pi\}$;
в направлении $\bar{\mathscr{T}}\{\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\}$ имеет основной период $\bar{T}_0\{3\pi; \pi\}$.

Пример 2. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x,\, y) \to (x - y)\sin(x - y), \tag{3}$$

не имеет основного периода. Множество её периодов состоит из векторов

$$\bar{T}\{c;\, c\},\ \ c \in \mathbb{R},$$

среди которых нет вектора наименьшей длины.

Теорема 1

[a] Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.

[a] Соколова Г. К., Орлов С. С. Об основном периоде периодической функции нескольких переменных // Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2018". Воронеж: Научная книга, 2018. С. 312–315.

Теорема 1

[a] Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathscr{T}}$.

[a] Соколова Г. К., Орлов С. С. Об основном периоде периодической функции нескольких переменных // Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2018". Воронеж: Научная книга, 2018. С. 312–315.

Утверждение 1

Если у периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует основной период $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathscr{T}}$, то любой её период $\bar{T}$, коллинеарный $\bar{\mathscr{T}}$, имеет вид $\bar{T} = k\bar{T}_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Иначе говоря, множество периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в направлении $\bar{\mathscr{T}}$ состоит из совокупности точек

$$\mathrm{P}_f = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = k\bar{T}_0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Определение 3

[a] Множество

$$\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m) = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m} n_k \bar{T}_k,\ n_k \in \mathbb{Z}\},$$

называется *n-мерной решёткой ранга m*, где $\bar{T}_k \in \mathbb{R}^n$ являются линейно независимыми векторами и называются *базисными* или *порождающими* векторами данной решётки.

[a] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1999.

Утверждение 2

[a] Пусть множеством периодов P_f периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является n-мерная решётка ранга m, порождённая базисными векторами $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$, тогда все эти векторы являются основными периодами функции f в данных направлениях $\bar{\mathscr{T}}_1, \bar{\mathscr{T}}_2, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_m$ соответственно.

[a] Соколова Г. К., Орлов С. С. Об основных периодах периодической функции нескольких переменных // Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". Саратов: Изд-во Научная книга, 2018. С. 294–297.

Пример 3. Функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x,\ y,\ z) \to \sin x \sin y + z^2 \tag{4}$$

имеет трёхмерную решётку ранга 2 периодов с базисными векторами

$$\bar{T}_1\{\pi;\ \pi;\ 0\} \text{ и } \bar{T}_2\{-\pi;\ \pi;\ 0\},$$

которые являются основными периодами функции в направлениях

$$\bar{\mathscr{T}}_1\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\} \text{ и } \bar{\mathscr{T}}_2\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\}.$$

Однако, пара периодов $\bar{T}_1\{2\pi;\ 0;\ 0\}$ и $\bar{T}_2\{0;\ 2\pi;\ 0\}$ функции f, основных в направлениях ортов $\bar{i}$ и $\bar{j}$ соответственно, не образуют базис решётки её периодов.

Определение 4

[a] *Определителем* n-мерной решётки $\Lambda(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_m)$, порождённой векторами $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2, \ldots$, $\bar{T}_m$, называется число

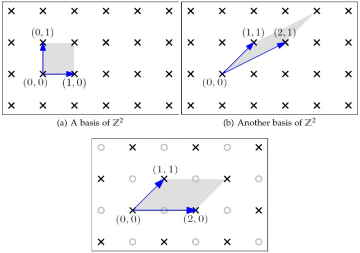
$$\det \Lambda = \sqrt{\det G(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m)},$$

где $G(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m) = \{\langle \bar{T}_i, \bar{T}_j \rangle\}_{i,j=1,\ldots,m}$ — матрица Грама системы линейно независимых векторов $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2, \ldots$, $\bar{T}_m$.

[a] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1999.

Базис решётки определяется неоднозначно, и любой из них строится на векторах, образующих *фундаментальный параллелепипед*, т. е. параллелепипед наименьшей меры Жордана. Её величина совпадает с определителем решётки $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m)$.

Матрица перехода от одного базиса решётки к произвольному другому *унимодулярна*, т. е. её определитель равен ± 1, поэтому $\det \Lambda$ не зависит от выбора базиса.



(a) A basis of $\mathbb{Z}^2$

(b) Another basis of $\mathbb{Z}^2$

(c) Not a basis of $\mathbb{Z}^2$

Определение 5

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, постоянная вдоль каждой прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, называется *постоянной в направлении* $\bar{\mathscr{T}}$.

Определение 5

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, постоянная вдоль каждой прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, называется *постоянной в направлении* $\bar{\mathscr{T}}$.

Утверждение 3

Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянна в направлении $\bar{\mathscr{T}}$, то она является периодической с периодом $\alpha\bar{\mathscr{T}}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

З а м е ч а н и е 1. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является постоянной вдоль каждого из линейно независимых направлений $\bar{\mathscr{T}}_1, \bar{\mathscr{T}}_2, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_k$, где $k \leq n$, то множеством её периодов является линейная оболочка $\mathrm{span}\{\bar{\mathscr{T}}_1, \bar{\mathscr{T}}_2, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_k\}$ векторов $\bar{\mathscr{T}}_1, \bar{\mathscr{T}}_2, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_k$.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^{n}$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \tag{5}$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \leq n$.

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^{n}$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad (5)$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \le n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \tag{5}$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \leq n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad (5)$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \leq n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad (5)$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \le n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;
- Плоскость $(m_1 = 0, m_2 = 2)$;

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \tag{5}$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \le n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \dots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;
- Плоскость $(m_1 = 0, m_2 = 2)$;
- Прямую $(m_1 = 0, m_2 = 1)$;

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^{n}$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad (5)$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \le n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \dots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;
- Плоскость $(m_1 = 0, m_2 = 2)$;
- Прямую $(m_1 = 0, m_2 = 1)$;
- Счётное семейство параллельных плоскостей $(m_1 = 1, m_2 = 2)$;

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \tag{5}$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \leq n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;
- Плоскость $(m_1 = 0, m_2 = 2)$;
- Прямую $(m_1 = 0, m_2 = 1)$;
- Счётное семейство параллельных плоскостей $(m_1 = 1, m_2 = 2)$;
- Счётное семейство параллельных прямых в пространстве $(m_1 = 2, m_2 = 1)$, на плоскости $(m_1 = 1, m_2 = 1)$;

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[1] Пусть система линейно независимых единичных векторов $\{\bar{\mathscr{T}}_k\}_{k=1}^n$ есть базис пространства $\mathbb{R}^n$. Множество P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Big\{\bar{T} \in \mathbb{R}^n : \bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathscr{T}}_k,\ n_k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad (5)$$

где $\bar{T}_k$ — порождающие векторы n-мерной решётки ранга m_1 периодов, $\bar{\mathscr{T}}_k$ — направления постоянства, $m_1 + m_2 \le n$. Имеет место представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}\{\bar{\mathscr{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathscr{T}}_{m_1+m_2}\}.$$

Пример 4. Периодическая функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ может иметь множеством периодов

- Всё пространство $(m_1 = 0, m_2 = 3)$;
- Плоскость $(m_1 = 0, m_2 = 2)$;
- Прямую $(m_1 = 0, m_2 = 1)$;
- Счётное семейство параллельных плоскостей $(m_1 = 1, m_2 = 2)$;
- Счётное семейство параллельных прямых в пространстве $(m_1 = 2, m_2 = 1)$, на плоскости $(m_1 = 1, m_2 = 1)$;
- Трёхмерную решётку ранга 1 $(m_1 = 1, m_2 = 0)$, ранга 2 $(m_1 = 2, m_2 = 0)$ или ранга 3 $(m_1 = 3, m_2 = 0)$.

[1] Соколова Г. К. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

Теорема 2

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — периодические функции. Тогда для того, чтобы функция $f+g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ была периодической необходимо и достаточно, чтобы существовали периодические функции $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что $f+g = f_1 + g_1$ и $P_{f_1} \cap P_{g_1} \neq \varnothing$.

Пример 5. Рассмотрим функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x,y) \to x + \sin y, \quad (x,y) \to y + \sin x \tag{6}$$

с множествами периодов

$$\mathrm{P}_f = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{0;2\pi\},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

$$\mathrm{P}_g = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{2\pi;0\},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Заметим, что $f+g$ является периодической с множеством периодов

$$\mathrm{P}_{f+g} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{2\pi;-2\pi\},\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

хотя $\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g = \varnothing$. Выберем периодические функции $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что $f+g = f_1 + g_1$, следующим образом

$$(x,y) \to x + y, \quad (x,y) \to \sin x + \sin y, \tag{7}$$

тогда

$$\mathrm{P}_{f_1} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = \alpha\{1;-1\},\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

$$\mathrm{P}_{g_1} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n_1\{2\pi;0\} + n_2\{0;2\pi\},\, n_1,\, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

причём $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} \neq \varnothing$ и более того $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} = \mathrm{P}_{f+g}$.

Теорема 3

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — периодические функции. Тогда для того, чтобы функция $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ была периодической необходимо и достаточно, чтобы существовали периодические функции $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что $f \cdot g = f_1 \cdot g_1$ и $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} \neq \varnothing$.

Пример 6. Рассмотрим $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x, y) \to x(2 + \sin y), \quad (x, y) \to \frac{\sin x}{(2 + \sin y)(2 + \sin \sqrt{2} y)}. \tag{8}$$

с множествами периодов

$$\mathrm{P}_f = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{0; 2\pi\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

$$\mathrm{P}_g = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{2\pi; 0\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Заметим, что $f \cdot g$ является периодическим с множеством периодов

$$\mathrm{P}_{f \cdot g} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n\{0; \sqrt{2}\pi\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

хотя $\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g = \varnothing$. Выберем периодические функции $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что $f \cdot g = f_1 \cdot g_1$, следующим образом

$$(x, y) \to x \sin x \ \text{ и } \ (x, y) \to \frac{1}{2 + \sin \sqrt{2} y}, \tag{9}$$

тогда

$$\mathrm{P}_{f_1} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = \alpha\{1; -1\}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

$$\mathrm{P}_{g_1} = \{\bar{T} \in \mathbb{R}^2 : \bar{T} = n_1\{2\pi; 0\} + n_2\{0; 2\pi\}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

Причём $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} \neq \varnothing$ и более того $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} = \mathrm{P}_{f \cdot g}$.

З а м е ч а н и е 2. [2] В условиях этих теорем 2 и 3 множества периодов суммы P_{f+g} и произведения $P_{f\cdot g}$ периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ разные и содержат, по крайней мере, пересечение $P_f \cap P_g$ в общем случае, но не всегда совпадают с ним. Справедливы оценки

$$P_f \cap P_g \subseteq P_{f+g}, \quad P_f \cap P_g \subseteq P_{f\cdot g}.$$

[2] Соколова Г. К. Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных // Сборник материалов Междунар. конф. "XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018)". Секции 1-3. Симферополь: Полипринт, 2018. С. 28–31.

Теорема 4

[a] Пусть функция $f \in C_{[0;+\infty)}$ является периодической с периодом T, тогда

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \omega_T[f]x + \varepsilon(x), \tag{10}$$

где $\omega_T[f] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$ — среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом T.

[a] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника», 1979. 744 с.

[3] Малютина М. В., Орлов С. С. Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

Теорема 4

[a] Пусть функция $f \in C_{[0;+\infty)}$ является периодической с периодом T, тогда

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \omega_T[f]x + \varepsilon(x), \tag{10}$$

где $\omega_T[f] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$ — среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом T.

[a] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника», 1979. 744 с.

[3] Если $f \in C_{[0;+\infty)}$, то $\varepsilon \in C^1_{[0;+\infty)}$ и

$$\varepsilon'(x) = f(x) - \omega_T[f], \ \ \varepsilon(0) = 0.$$

[3] Малютина М. В., Орлов С. С. Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

Теорема 4

[a] Пусть функция $f \in C_{[0;+\infty)}$ является периодической с периодом T, тогда

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \omega_T[f]x + \varepsilon(x), \tag{10}$$

где $\omega_T[f] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$ — среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом T.

[a] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника», 1979. 744 с.

[3] Если $f \in C_{[0;+\infty)}$, то $\varepsilon \in C^1_{[0;+\infty)}$ и

$$\varepsilon'(x) = f(x) - \omega_T[f], \ \ \varepsilon(0) = 0.$$

Если f является T_0-периодической, то $T = kT_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и

$$\omega_T[f] = \omega_{T_0}[f]. \tag{11}$$

[3] Малютина М. В., Орлов С. С. Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

Теорема 4

[a] Пусть функция $f \in C_{[0;+\infty)}$ является периодической с периодом T, тогда

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \omega_T[f]x + \varepsilon(x), \tag{10}$$

где $\omega_T[f] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt$ — среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом T.

[a] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника», 1979. 744 с.

[3] Если $f \in C_{[0;+\infty)}$, то $\varepsilon \in C^1_{[0;+\infty)}$ и

$$\varepsilon'(x) = f(x) - \omega_T[f], \;\; \varepsilon(0) = 0.$$

Если f является T_0-периодической, то $T = kT_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и

$$\omega_T[f] = \omega_{T_0}[f]. \tag{11}$$

Представление (2) однозначно и инвариантно относительно выбора периода T функции f, а функция ε наследует её основной период T_0.

[3] Малютина М. В., Орлов С. С. Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

Пример 7. Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$x \to 1 - \cos x. \tag{12}$$

Справедливо равенство

$$\int\limits_0^x f(t)dt = x - \sin x,$$

здесь в обозначениях теоремы 4

$$\varepsilon(x) = -\sin x, \text{ и } \omega_T[f] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos x)dx = 1.$$

Пример 7. Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$x \to 1 - \cos x. \tag{12}$$

Справедливо равенство

$$\int\limits_0^x f(t)dt = x - \sin x,$$

здесь в обозначениях теоремы 4

$$\varepsilon(x) = -\sin x, \quad \text{и} \quad \omega_T[f] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos x)dx = 1.$$

Следствие 1

Всякая непрерывно дифференцируемая T-периодическая функция имеет T-периодическую производную.

Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и периодической с решёткой периодов, порождённой векторами $\bar{T}_i = T_i\bar{e}_i$, где $i\in J_n$, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{P_{J_n}} f(t_1,\, t_2,\ldots,\, t_n)\, dt_1 dt_2\ldots dt_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\ \prod_{i\in J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1,\ldots,i_k}} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} dt_{i_1}\ldots dt_{i_k} +$$

$$+(-1)^{n-1}\prod_{i\in J_n} x_i\ \ S_{J_n}+\varepsilon(\bar{r}),\quad \bar{r}\in\mathbb{R}^n, \qquad (14)$$

где $P_{i_1,\ldots,i_k}=[0;x_{i_1}]\times\ldots\times[0;x_{i_k}],\ \ J_n=\{1,2,\ldots,n\}$,

$$S_{i_1,\ldots,i_k}=\frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots\bar{T}_{i_k})})}\int\limits_{P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k},$$

$P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1},\ldots,\bar{T}_{i_k})}$ — фундаментальный параллелепипед решётки $\Lambda(\bar{T}_{i_1},\bar{T}_{i_2},\ldots,\bar{T}_{i_k})$, функция $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов $\mathrm{P}_\varepsilon\supseteq\mathrm{P}_f$.

Если функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имеет непрерывную на $\mathbb{R}^n$ смешанную производную $\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon$ и является решением задачи типа Гурса

$$\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon = f(\bar r) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} - (-1)^{n-1}S_{J_n},$$

$$\varepsilon|_{x_j=0} = \varepsilon|_{x_i=0} = 0,\ i,j\in J_n. \tag{15}$$

В случае $f(\bar r)=\mathrm{const}$ или $f(\bar r)=f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n)$ уравнение задачи типа Гурса (15) окажется однородным

$$\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon = 0,\ \ \varepsilon|_{x_j=0} = \varepsilon|_{x_i=0} = 0,\ i,j\in J_n,$$

т. е. $\varepsilon(\bar r)\equiv 0$.

Представление (14) инвариантно относительно выбора периодов по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и однозначно.

$$\iint\limits_{\substack{0\le t\le x\\ 0\le\tau\le y}} f(t,\tau)dtd\tau =$$

$$= \frac{x}{T_x}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T_x\\ 0\le\tau\le y}} f(t,\tau)dtd\tau + \frac{y}{T_y}\iint\limits_{\substack{0\le t\le x\\ 0\le\tau\le Ty}} f(t,\tau)dtd\tau -$$

$$- \frac{xy}{T_xT_y}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T_x\\ 0\le\tau\le T_y}} f(x,y)dydx + \varepsilon(x,y)$$

Пример 8. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$(x, y) \to \sin x + \cos y.$$

Множеством периодов данной функции является решётка, порождённая векторами $\bar{T}_1 = \{2\pi;\ 0\}$ и $\bar{T}_2 = \{0;\ 2\pi\}$. Справедливо равенство

$$\iint\limits_{\substack{0 \le t \le x \\ 0 \le \tau \le y}} (\sin t + \cos \tau) dt d\tau = y(1 - \cos x) + x \sin y. \tag{16}$$

Здесь в обозначениях теоремы 5

$$S_x[f] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le \tau \le y}} (\sin t + \cos \tau) dt d\tau = \sin y,$$

$$S_y[f] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le x \\ 0 \le \tau \le 2\pi}} (\sin t + \cos \tau) dt d\tau = 1 - \cos x,$$

$$S_{xy}[f] = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le \tau \le 2\pi}} (\sin t + \cos \tau) dt d\tau = 0, \qquad \varepsilon(x, y) \equiv 0.$$

Рассмотрим многомерную задачу типа Гурса[4]

$$\partial_{x_1 \dots x_n} u(\bar{r}) = f(\bar{r}),\ \bar{r} \in \mathbb{R}^n_+;\ \ u(\bar{r})\big|_{x_i=0} = a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \qquad (17)$$

Функции $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ и $a_i : \mathbb{R}^{n-1}_+ \to \mathbb{R}$, $i \in J_n$ являются непрерывными по совокупности переменных. В этих предположениях и при выполнении **условий сопряжения**

$$a_i|_{x_j=0} = a_j|_{x_i=0},\ \ i, j \in J_n,$$

многомерная задача типа Гурса имеет единственное решение вида

$$u(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{i+1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\big|_{x_{i_1}=0, \dots, x_{i_k}=0} +$$

$$+ \int\limits_{P_{J_n}} f(t_1, t_2, \dots, t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

[4] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.

Пусть

1. функция $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных и является периодической с прямоугольной решёткой периодов P_f, порождённой векторами $\bar{T}_j = T_j \bar{\mathrm{e}}_j$, $j \in J_n$;

Пусть

1. функция $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных и является периодической с прямоугольной решёткой периодов P_f, порождённой векторами $\bar{T}_j = T_j \bar{\mathrm{e}}_j$, $j \in J_n$;

2. функции $a_i : \mathbb{R}^{n-1}_+ \to \mathbb{R}$ являются периодическими с периодами $T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_n$ по соответствующим переменным, имеют непрерывные по совокупности переменных смешанные производные $\partial_{x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n} a_i$ и удовлетворяют условию

$$a_i|_{x_j=0} = a_j|_{x_i=0}, \quad i, j \in J_n.$$

Пусть

1. функция $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных и является периодической с прямоугольной решёткой периодов P_f, порождённой векторами $\bar{T}_j = T_j \bar{\mathrm{e}}_j$, $j \in J_n$;

2. функции $a_i : \mathbb{R}^{n-1}_+ \to \mathbb{R}$ являются периодическими с периодами $T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_n$ по соответствующим переменным, имеют непрерывные по совокупности переменных смешанные производные $\partial_{x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n} a_i$ и удовлетворяют условию

$$a_i|_{x_j=0} = a_j|_{x_i=0}, \quad i, j \in J_n.$$

Тогда для того чтобы решение $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ многомерной задачи Гурса являлось периодическим по всем переменным, **необходимо и достаточно**, чтобы для всех $j \in J_n$ выполнялись соотношения

$$\int\limits_0^{T_j} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, \ldots, x_n)\, dt = 0$$

при всех $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$, причём

$$\mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{a_1} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_{a_n} \cap \mathrm{P}_f.$$

Для периодических функций нескольких действительных переменных

Для периодических функций нескольких действительных переменных

- изучена структура множества периодов;

Заключение

Для периодических функций нескольких действительных переменных

- изучена структура множества периодов;
- получены оценки множеств периодов суммы и произведения;

Заключение

Для периодических функций нескольких действительных переменных

- изучена структура множества периодов;
- получены оценки множеств периодов суммы и произведения;
- доказаны теоремы интегрального исчисления;

Заключение

Для периодических функций нескольких действительных переменных

- изучена структура множества периодов;
- получены оценки множеств периодов суммы и произведения;
- доказаны теоремы интегрального исчисления;
- исследована проблема существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных на примере задачи Гурса.

Конференция
«ЖЕНЩИНЫ В МАТЕМАТИКЕ»
Россия, Новосибирск, 27 – 28 мая 2023 года

аспирант 1-го года обучения
Соколова Галина Константиновна
Механико-математический факультет
Новосибирский государственный университет

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

28 мая 2023 года