КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ РЕШЕТКАМИ

О.А.Кадырова, М.В.Швидефски

Подпорядки

Пусть $(A, \leq)$ является частично упорядоченным множеством. Для удобства рассматриваем вместо ≤ строгий порядок $<$ = $\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in A^2 | x \leq y, x \neq y\}$ на A. Отношение $<' \subseteq <$ называется *подпорядком* в $\leq$, если $(A, <')$ также является (строго) частично упорядоченным множеством.

Решетка подпорядков

Множество подпорядков в $(A,<)$ образует полную решётку по включению. Она обозначается $O(A,<)$. Будем называть эту решетку *решеткой подпорядков* $(A,<)$.

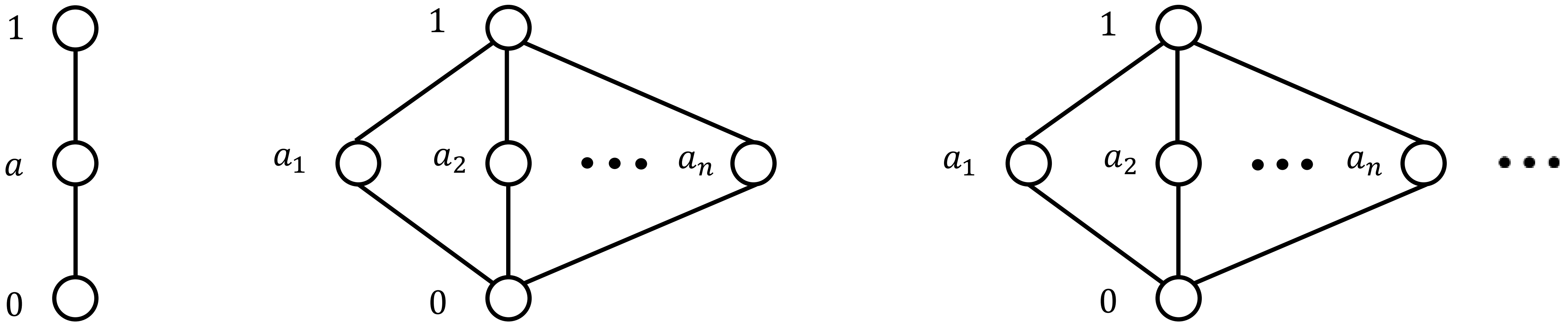
$$\bigwedge_{i\in I} R_i = \bigcap_{i\in I} R_i$$

$$\bigvee_{i\in I} R_i = (\bigcup_{i\in I} R_i)^t,$$

где t – транзитивное замыкание

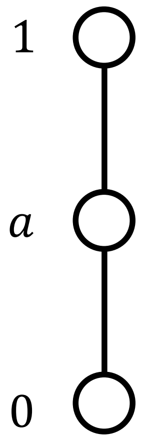
Решетки M_n

Решетки высоты 2 с n атомами, $1 \leq n \leq \omega$

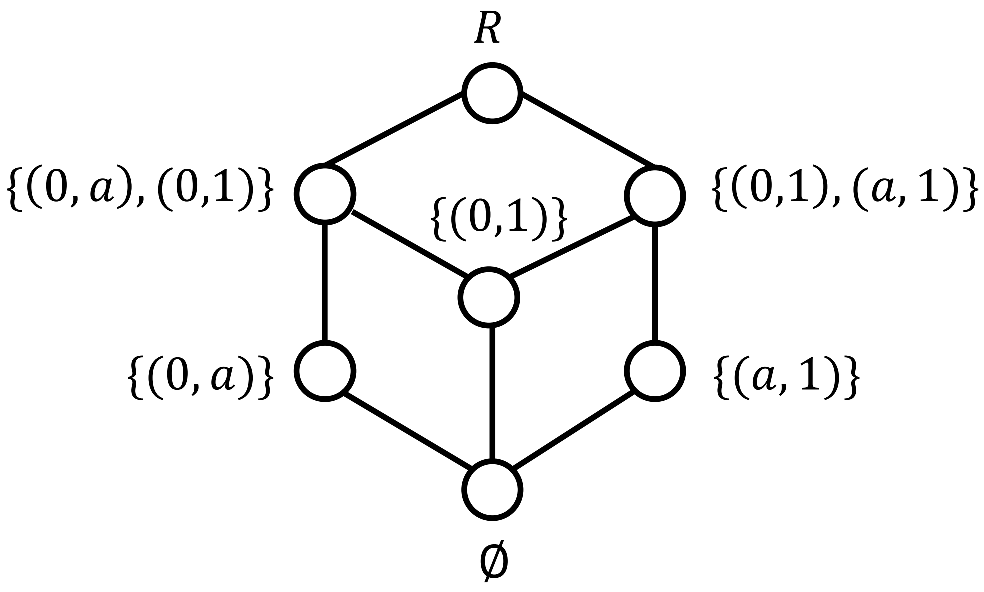


M_1 $\quad$ M_n $\quad$ M_ω

Пример. $O(M_1)$



M_1



$O(M_1)$

Квазимногообразия

Квазимногообразие – это класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры, аксиоматизируемый *квазитождествами*, т.е. предложениями вида

$$\forall\overline{x}A_0(\overline{x})\& \ldots \& A_n(\overline{x}) \rightarrow A(\overline{x}),$$

где $A_0(\overline{x}), \ldots, A_n(\overline{x}), A(\overline{x}) - \text{атомарные формулы.}$

$Q(K)$ - наименьшее квазимногообразие, порождённое классом K

Многообразия

Многообразие – это класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры, аксиоматизируемый *тождествами*, т.е. предложениями вида

$$\forall \overline{x} A(\overline{x}),$$

где $A(\overline{x}) -$ атомарная формула.

$V(K)$ - наименьшее многообразие, порождённое классом K

$S(K)$ - класс решёток, вложимых в решётки из K

$P(K)$ - класс декартовых произведений решёток из K

Теорема *Мальцева*:
Если L – конечная решётка, то $Q(L) = SPP_u(L) = SP(L)$

Теорема *Биркгофа*:
Для класса K алгебраических систем $V(K) = HSP(K)$

Базис $\boldsymbol{SP(O(M_n))}$

Теорема. Для любого натурального $n > 0 \quad SP\big(O(M_n)\big)$ является многообразием, а $\Sigma_n = \{(D_2), (C_n), (P)\}$ образует его базис тождеств.

Базис $\boldsymbol{SPP_u(O(M_\omega))}$

Теорема. $Q\big(O(M_\omega)\big) = SPP_u\big(O(M_\omega)\big)$ является многообразием.

$\Sigma = \{(D_2), (P)\}$ образует его базис тождеств.

Тождество $(\boldsymbol{D_n})$

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee \cdots \vee y_n) = \bigvee_{i \leq n} \left[x \wedge \bigvee_{j \neq i} y_j \right].$$

Тождество утверждает, что любое несократимое покрытие любого неразложимого элемента в решетке содержит не более, чем n элементов

Тождество $(\boldsymbol{D_2})$

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) = (x \wedge (y_0 \vee y_1)) \vee \big(x \wedge (y_1 \vee y_2)\big) \vee (x \wedge (y_0 \vee y_2).$$

Тождество $(\boldsymbol{C_n})$

$$x \wedge \bigwedge_{i \le n} (y_i \vee z_i) = \bigvee_{i \le n} \left[x \wedge y_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} \left(y_j \wedge z_j \right) \right] \vee \bigvee_{i \le n} \left[x \wedge z_i \wedge \bigwedge_{j \ne i} \left(y_j \wedge z_j \right) \right] \vee$$

$$\vee \bigvee_{i < j \le n} \left[x \wedge \left(\left(y_i \wedge y_j \right) \vee \left(z_i \wedge z_j \right) \right) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} (y_k \vee z_k) \right] \vee$$

$$\vee \bigvee_{i < j \le n} \left[x \wedge \left(\left(y_i \wedge z_j \right) \vee \left(y_j \wedge z_i \right) \right) \wedge \bigwedge_{k \notin \{i,j\}} (y_k \vee z_k) \right].$$

Тождество утверждает, что любой неразложимый элемент в решетке имеет не более, чем n минимальных покрытий.

Тождество $(\boldsymbol{P})$

$$x \wedge \left[\left(y_0 \wedge (z_0 \vee z_1)\right) \vee y_1\right] =$$
$$= [x \wedge y_0 \wedge (z_0 \vee z_1)] \vee [x \wedge y_1] \vee \bigvee_{i<2}\left[x \wedge \left((y_0 \wedge z_i) \vee y_1\right)\right].$$

Тождество утверждает, что для любого неразложимого элемента решетки его минимальное покрытие состоит из простых элементов