ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Ма Синь
Новосибирский государственный университет

В докладе речь пойдет о задаче Коши для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени:

$$(\Delta - \alpha I)u_{tt} + \omega^2 u_{x_n x_n} = 0, \quad t > 0, \quad x \in R^n \quad (n = 2, 3), \tag{1}$$

$\alpha > 0$, Δ — оператор Лапласа по x.

При $\alpha = 0$ уравнение

$$\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_n x_n} = 0 \tag{2}$$

является уравнением Соболева. При $n = 3$ уравнение (2) описывает малые колебания вращающейся жидкости.

Наша цель —изучение асимптотического поведения решения задачи Коши для уравнения (1) при $t \to \infty$.

Систематическое изучение свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, было начато в работах С. Л. Соболева (см. [1, 2]) и его учеников.

[1] Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т.18, N 1. С. 3–50.

[2] Соболев С. Л. Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003. С. 333–393.

Рассмотрим задачу Коши ($n = 3$)

$$\begin{aligned} &\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_3 x_3} = 0, \quad t > 0,\, x \in R^3, \\ &u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ &D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Из результатов В.Н. Масленниковой [3] вытекает оценка на бесконечности решения задачи (3) в случае, когда $\varphi_2(x) \equiv 0$. Имеем

$$|u(t,\, x)| \leq \frac{c_1}{t}$$

при $t \gg 1$.

[3] Масленникова В. Н. *Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева.* // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1968. Т. 103. С. 117–141.

Поведение решения задачи Коши для уравнения Соболева при любом $n \geq 2$ и $\varphi_2(x) \not\equiv 0$ изучено в [4]. В частности, для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_n x_n} = 0, \quad t > 0,\, x \in R^n, \\ &u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ &D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{4}$$

было получено: Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in S(R^n)$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x',\, x_n)\, dx_n \equiv 0, \tag{5}$$

то для решения задачи Коши (4) на любом компакте $K \subset R^n$ имеет место оценка

$$\sup_{x \in K} |u(t,\, x)| \leq \frac{c(K)}{t^{(n-1)/2}}, \quad t \gg 1. \tag{6}$$

[4] Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. *Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.* Новосибирск: Научная книга, 1984.

$$
\begin{aligned}
&\Delta u_{tt} + \omega^2 u_{x_n x_n} = 0, \quad t > 0,\, x \in R^n,\\
&u|_{t=0} = \varphi_1(x),\\
&D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Если условие

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x',\, x_n)\, dx_n \equiv 0, \tag{5}
$$

не выполнено, то решение не стремится к нулю при $t \to \infty$.

В этом случае решение выходит на некоторую функциию, не зависящую от последней переменной x_n, при этом можно указать явный вид предельной функции.

Условие (5) на начальную функцию $\varphi_2(x)$ является необходимым и достаточным для стремления решения задачи Коши (4) к нулю.

$$
\begin{aligned}
&(\Delta - \alpha I)u_{tt} + \omega^2 u_{x_n x_n} = 0, \quad t > 0,\, x \in R^n,\, n = 2, 3,\\
&u|_{t=0} = \varphi_1(x),\\
&D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Будем преполагать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$. С.А. Гальперном доказана однозначная разрешимость задачи Коши (7) в классе гладких функций, убывающих при $|x| \to \infty$.

Обозначим через $\widehat{\varphi}(\xi', \xi_n)$, $(\xi', \xi_n) \in R^n$, преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in S(R^n)$.

Сформулируем теоремы об асимптотическом поведении решений задачи Коши (7) при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in S(R^n)$, $n = 2, 3$, *причем*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x', x_n) dx_n = 0, \tag{5}$$

тогда для решения задачи Коши (7) на любом компакте $K \subset R^n$ *имеет место оценка*

$$\sup_{x \in K} |u(t, x)| \leq \frac{c(K)}{t^{(n-1)/2}}, \quad t \gg 1, \tag{8}$$

где $c(K)$ *— константа, зависящая от* α, ω, φ_1, φ_2 *и diam* K.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in S(R^2)$, *при этом условие (5) не выполняется. Тогда для любого* $x = (x_1, x_2) \in R^2$ *имеет место сходимость*

$$u(t, x) \to v(x_1), \quad t \to \infty,$$

где

$$v(x_1) = \int\limits_0^{\infty} e^{ix_1\xi_1} \frac{\sqrt{|\xi_1|^2 + \alpha}}{\omega} \widehat{\varphi}_2(\xi_1, 0)\, d\xi_1. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^3)$, *при этом условие (5) не выполняется. Тогда для любого* $x = (x', x_3) \in R^3$ *имеет место сходимость*

$$u(t, x) \to v(x'), \quad t \to \infty,$$

где

$$v(x') = \frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{R^2} e^{ix'\xi'} \frac{\sqrt{|\xi'|^2 + \alpha}}{\omega} \widehat{\varphi}_2(\xi', 0)\, d\xi'. \tag{10}$$

Теорема 4. *Для решения задачи Коши (7) на любом компакте* $K \subset R^n$ *имеет место оценка*

$$|u(t, x) - v(x')| \le \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1,$$

где $c(K)$*— константа, зависящая от* α, ω, φ_1, φ_2 *и diam* K, $v(x')$ *определена в (9) или (10).*

Из теорем 1–4 вытекает следующая

Теорема 5. *Для стремления решения задачи Коши к нулю при* $t \to \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5)*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x', x_n)\, dx_n \equiv 0, \quad n = 2, 3.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

感谢您的聆听！