

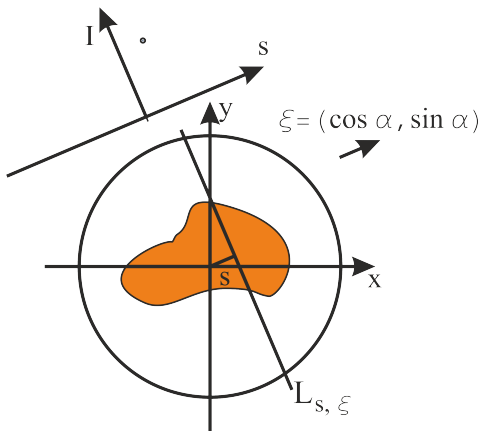
Скалярные и нескаллярные задачи томографии с ограниченными данными

С. В. Мальцева

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет

Про томографию

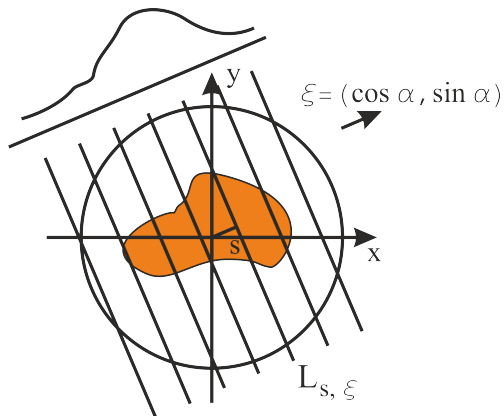
- Исследуемый объект находится в ограниченной области пространства.
- Рассматриваемая область зондируется некоторым физическим полем.
- Регистрируется сигнал после прохождения через область.
- По собранной информации необходимо восстановить внутреннюю структуру (скалярные или нескалярные характеристики) объекта.



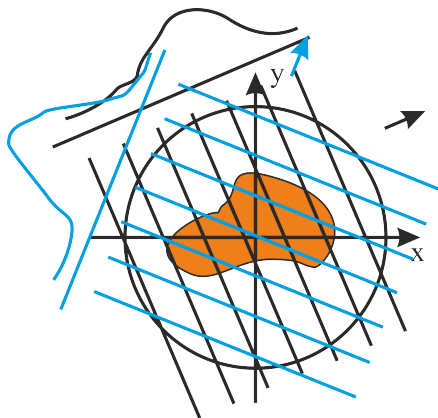
$$L_{s, \xi} : \begin{cases} x = s \cos \alpha - t \sin \alpha, \\ y = s \sin \alpha + t \cos \alpha, \end{cases}$$

$$I = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s \cos \alpha - t \sin \alpha, s \sin \alpha + t \cos \alpha) dt.$$

Сканирование объекта параллельным пучком



Сканирование объекта параллельными пучками



$$(\mathcal{R}f)(s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s \cos \alpha - t \sin \alpha, s \sin \alpha + t \cos \alpha) dt$$

Задачи скалярной томографии

Найти $f(x, y)$, если дано $(\mathcal{R}f)(s, \alpha)$.

Задача с полными данными: $s \in [-1, 1]$, $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

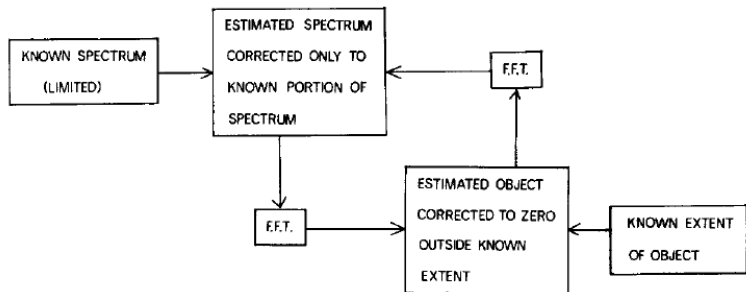
Задача с ограниченным диапазоном углов: $s \in [-1, 1]$,
 $\alpha \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$, $\varphi_{\max} < \pi/2$.

Внутренняя задача: $s \in [-a, a]$, $a < 1$, $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Задача с ограниченным числом проекций: $s \in [-1, 1]$,
 $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

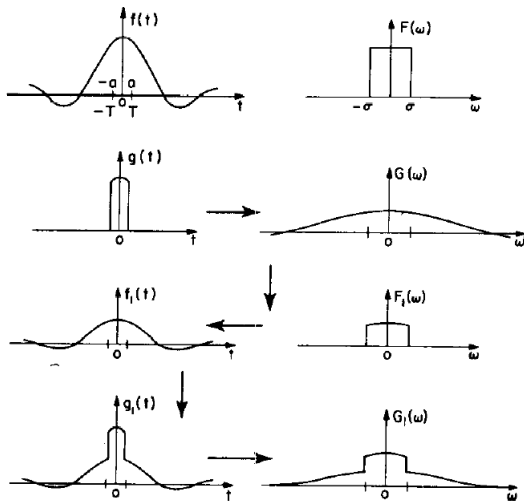
Метод Гершберга-Папулиса

R. W. Gerchberg (1974): Super-resolution through Error Energy Reduction, Optica Acta: International Journal of Optics, 21:9, 709-720

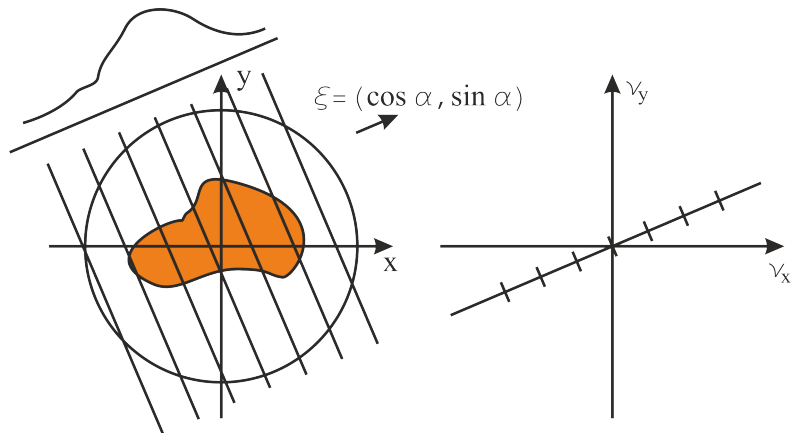


Метод Гершберга-Папулиса

A. Papoulis (1975): A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 22, no. 9, pp. 735-742



Теорема о центральном сечении



$$\mathcal{F}_1[\mathcal{R}_\alpha f](\sigma) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_2[f](\sigma \xi), \quad (\mathcal{R}_\alpha f)(s) = (\mathcal{R}f)(s, \alpha).$$

Пикалов В.В., Мельникова Т.С. Низкотемпературная плазма. Томография плазмы (том 13). Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. 229 с.

Daniil Kazantsev and Valery Pickalov. New iterative reconstruction methods for fan-beam tomography 2018 Inverse Problems in Science and Engineering 26(6):773-791

Пикалов В. В., Д. И. Казанцев, В. П. Голубятников. Обобщение теоремы о центральном сечении на задачу верной томографии // Вычислительные методы и программирование, 2006, Т. 7, с. 180–184.

Метод Гершберга-Папулиса

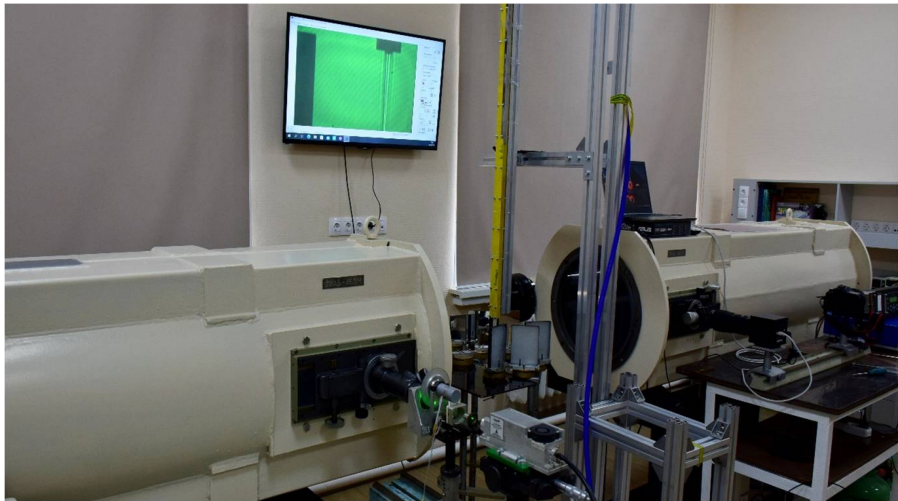
- Итерационный,
- Использует априорную информацию о самом объекте и о его Фурье-образе,
- Дополнить информацию о Фурье-образе,
- Каждая итерация содержит операции как в основном пространстве, так и в пространстве переменных Фурье $\nu = (\nu_x, \nu_y)$.

Начальное приближение в Фурье пространстве: $\mathcal{F}_2 f^0$.

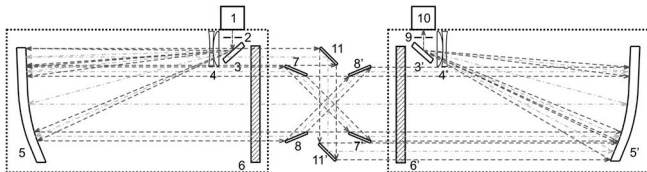
Первая итерация: $\mathcal{F}_2 f^0 \mapsto \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{F}_2 f^0) \mapsto$

$\mapsto \Phi_s \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{F}_2 f^0) \mapsto \mathcal{F}_2 \Phi_s \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{F}_2 f^0) \mapsto \Phi_f \mathcal{F}_2 \Phi_s \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{F}_2 f^0) =: \mathcal{F}_2 f^1.$

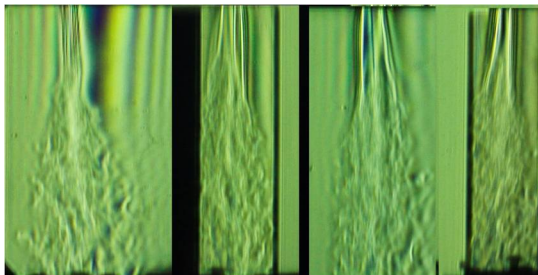
Задача с ограниченным числом проекций



Задача с ограниченным числом проекций. Схема установки

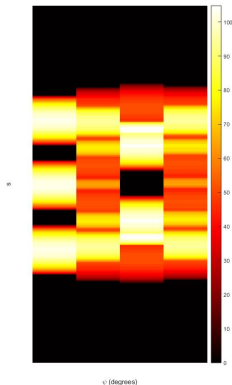
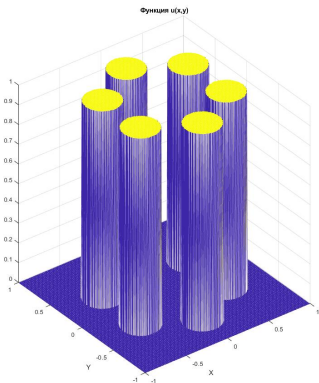


Данные: 4 проекции, $\alpha = -\pi/4, 0, \pi/4, \pi/2$.



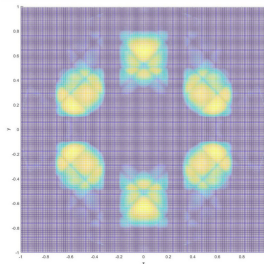
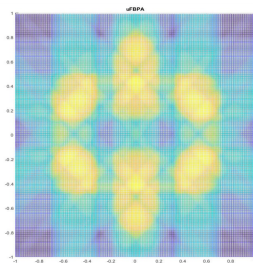
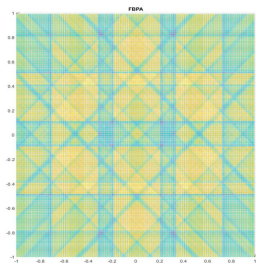
Задача с ограниченным числом проекций. Численное моделирование

Тестовая функция — характеристические функции 6 кругов.
Количество проекций — 4.



Задача с ограниченным числом проекций. Численное моделирование

Восстановление двумя стандартными методами и методом Гершберга-Папулиса, адаптированный для случая обозначенных 4 проекций.



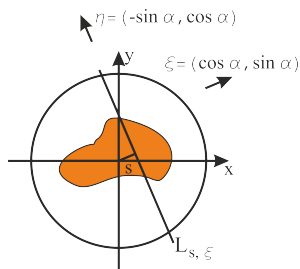
Количество итераций — 137, ошибка — 35%.

Задача с ограниченными углами. Скалярный случай

Defrise M and De Mol C 1983 A regularized iterative algorithm for limited-angle inverse Radon transform *Opt. Acta: Int. J. Opt.* **30** 403–8

1. Постановка задачи восстановления функции (скалярного поля) $f(x, y)$ по ее преобразованию Радона в ограниченном диапазоне углов, $(\mathcal{R}f)(s, \alpha)$, $s \in [-1, 1]$, $\alpha \in [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$, $\varphi_{\max} < \pi/2$.
2. Итерационный алгоритм на основе метода Гершберга-Папулиса.
3. Численное моделирование.

Задача с ограниченными углами. Векторный случай



$$(\mathcal{P}v)(s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} v_i(s \cos \alpha - t \sin \alpha, s \sin \alpha + t \cos \alpha) \eta^i dt,$$

$$(\mathcal{P}^\perp v)(s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} v_i(s \cos \alpha - t \sin \alpha, s \sin \alpha + t \cos \alpha) \xi^i dt.$$

Задача с ограниченными углами. Векторный случай

Разложение векторного поля: $v = d\varphi + d^\perp\psi$, где $d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$,
 $d^\perp\psi = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$.

Ядра операторов лучевых преобразований векторных полей:
ненулевые. В ядре $\mathcal{P}$ лежат все **потенциальные** поля с потенциалами, обращающимися в 0 на границе области. В ядре $\mathcal{P}^\perp$ лежат все **соленоидальные** поля с потенциалами, обращающимися в 0 на границе области.

Таким образом, по **одному** преобразованию можно восстановить только **одну** из двух частей векторного поля. Для восстановления всего поля необходимо знать оба его лучевых преобразования.

E. Yu. Derevtsov, I. E. Svetov, Tomography of tensor fields in the plane, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 3:2 (2015), 25–69

Задача с ограниченными углами. Векторный случай

Maltseva, S.V., Svetov, I.E., Louis, A.K. An iterative algorithm for reconstructing a 2D vector field by its limited-angle ray transform // Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1715(1), 012037

Векторный случай

Потенциалы:

$$\psi_0(x, y) = \exp \{ -24(x^2 + y^2) \},$$

$$\psi_k(x, y) = \begin{cases} (4(0.25 - x^2 - y^2))^{6-k}, & x^2 + y^2 < 0.25, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, 5.$$

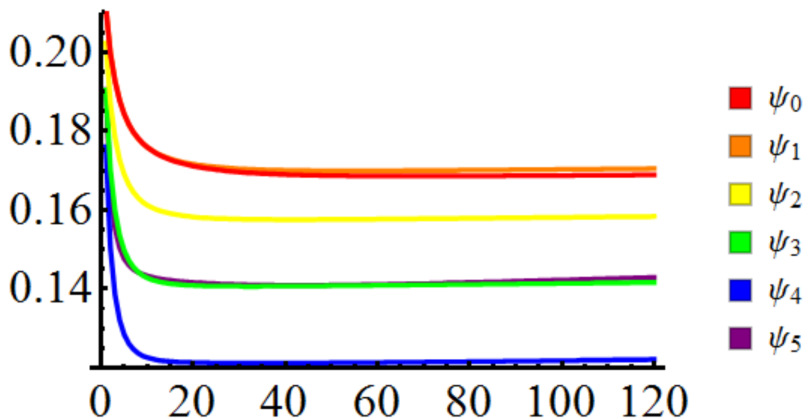
Тестовые соленоидальные векторные поля:

$$v = d^\perp \psi_k = \left(-\frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right), \quad k = 0, \dots, 5.$$

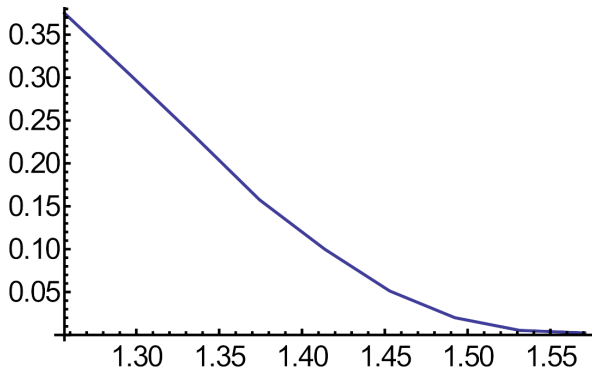
$$\delta = \frac{\sum_{i=0}^{63} \sum_{j=0}^{63} \left((v_{ij}^1 - u_{ij}^1)^2 + (v_{ij}^2 - u_{ij}^2)^2 \right)}{\sum_{i=0}^{63} \sum_{j=0}^{63} \left((u_{ij}^1)^2 + (u_{ij}^2)^2 \right)},$$

где $u = (u^1, u^2)$ — точное поле, $v = (v^1, v^2)$ — восстановленное поле, v_{ij}^k (u_{ij}^k) — значение k -й компоненты реконструкции (точного поля) в точке (x_1^i, x_2^j) , $x_1^i = -1 + i/32$, $x_2^j = -1 + j/32$, $i, j = 0, \dots, 63$.

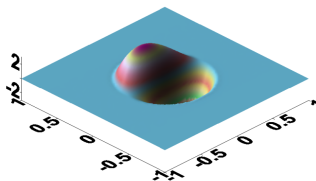
Влияние гладкости поля на δ .



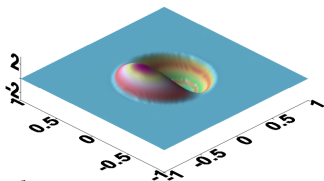
Влияние величины $\varphi_{\max}$ на δ .



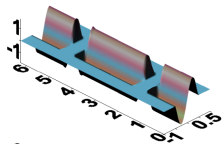
$v = d^\perp \psi_4$, дискретизация лучевого преобразования: 300×300 ,
 $\varphi_{\max} = \pi/2.22 \approx 1.4137$.



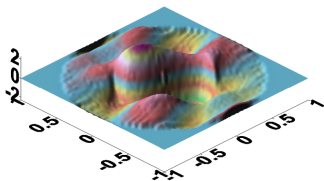
a



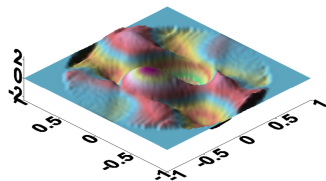
b



c



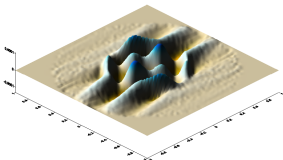
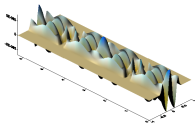
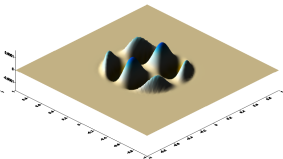
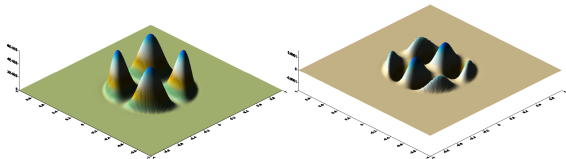
d



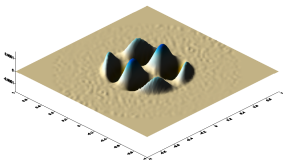
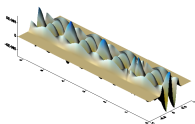
e

Maltseva, S.V. An iterative method to solving the problem of reconstructing a 2-tensor field from limited data // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 2022, 10(2), pp. 42–54

Тензорный случай



$\pi/2.22 = 1.4137,$
0.5663 (75%)



$\pi/2, 0.0079$ (8.88%)

Спасибо за внимание!