Новосибирский государственный университет
*НАСТОЯЩАЯ НАУКА

Анализ идентифицируемости и устойчивости решения диффузионно-логистической модели, возникающей при описании распространения информации в онлайн социальных сетях

Звонарева Татьяна Александровна,
Криворотько Ольга Игоревна
E-mail: t.zvonareva@g.nsu.ru, krivorotko.olya@mail.ru

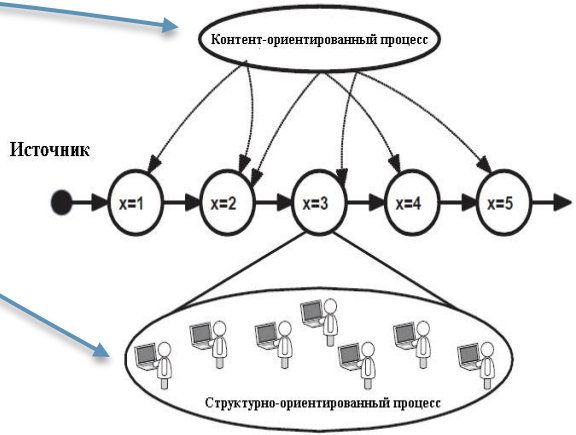
Новосибирск, 2023

Постановка обратной задачи в случае соц. процессов

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 - \dfrac{u}{K}\right) r(t) u \\ u(x,1) = \varphi(x), \quad l_1 \le x \le l_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l_1, t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l_2, t) = 0, \quad t \ge 1 \end{cases}$$

$$+$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} u(x_i, t_k) = f_k \qquad k = 1, \dots, N_2$$



$$\min_q J(q) = \min_q \left(\frac{(T-1)}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} \left| \sum_{i=1}^{N_1} u(x_i, t_k; q) - f_k \right|^2 \right)$$

u	плотность активных пользователей
d	популярность информации
r	скорость роста числа активных пользователей
K	пропускная способность
φ	начальная функция плотности

Где $q = (\varphi_1, \dots, \varphi_6)$ – вектор параметров.

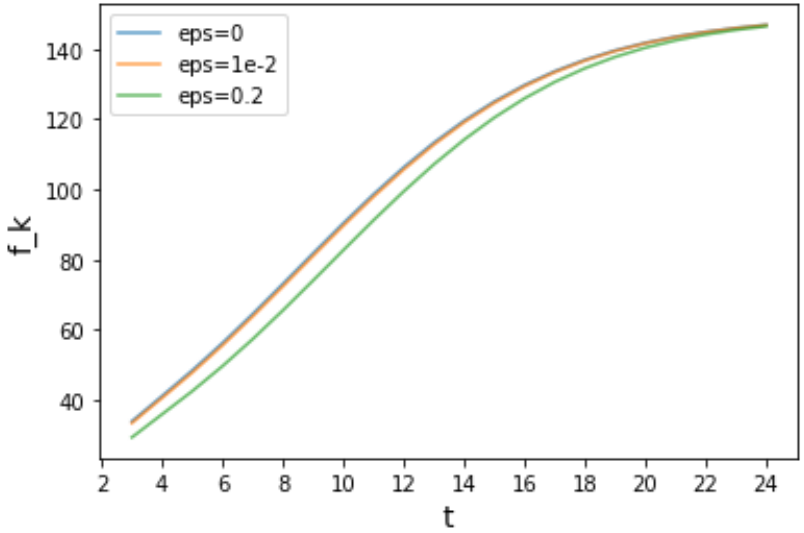
Wang H., Wang F. and Xu K., Modeling information diffusion in online social networks with partial differential equations, 2013, arXiv:1310.0505

Регуляризация: сведение к гиперболическому уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 - \dfrac{u}{K}\right) r(t) u \\ u(x,1) = \varphi(x), \quad l_1 \le x \le l_2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l_1,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l_2,t) = 0, \quad t \ge 1 \end{cases} + \sum_{i=1}^{N_1} u(x_i,t_k) = f_k, \quad k = 1,\dots,N_2$$

$\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} + \left(1 - \dfrac{u^\varepsilon}{K}\right) r(t) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x,1) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,1) = 0, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(l_1,t) = \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(l_2,t) = 0, \quad t \ge 1 \end{cases} + \sum_{i=1}^{N_1} u^\varepsilon(x_i,t_k) = f_k, \quad k = 1,\dots,N_2$$



Chetverushkin B.N. Kinetic schemes and quasi-gas-dynamic system of equations (2004)

Анализ сингулярных чисел оператора линеаризованных обратных задач

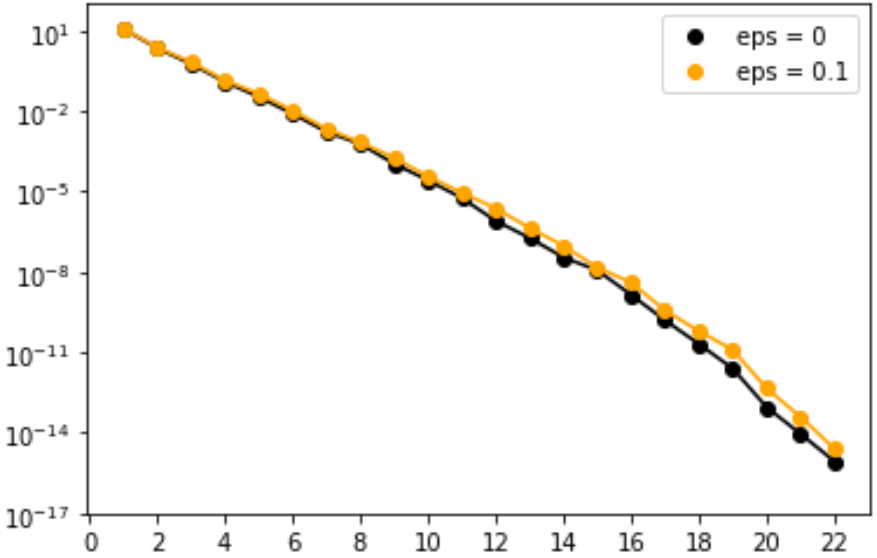
$A \in R^{22\times 50}, \varphi \in R^{50}, f \in R^{22}$

Линеаризация

$$u(x,t;\varphi) = u_0(x,t;\varphi) + \delta u(x,t;\varphi)$$
$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$$

Дискретизация

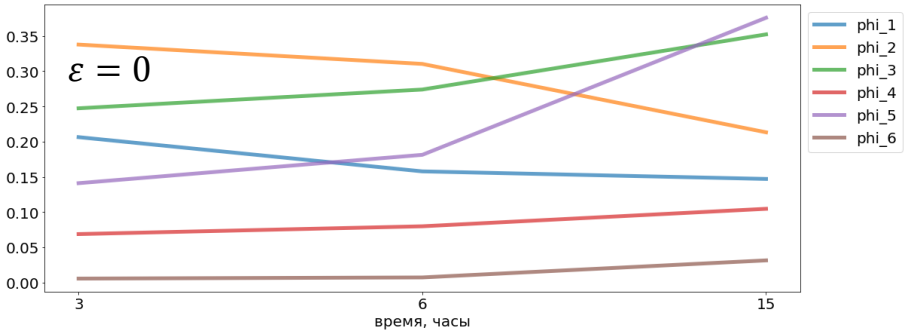
$$A\varphi = f$$

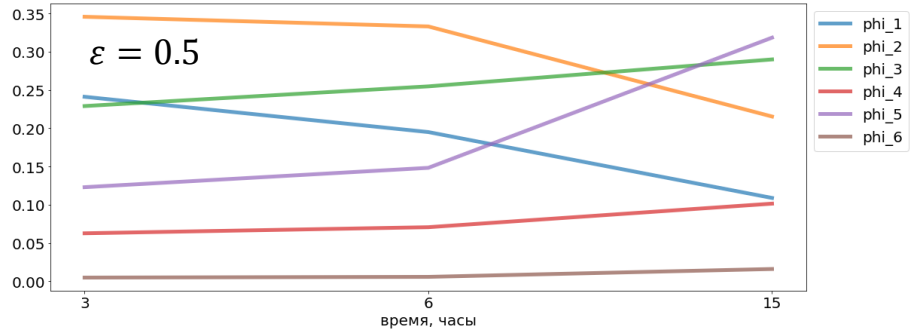


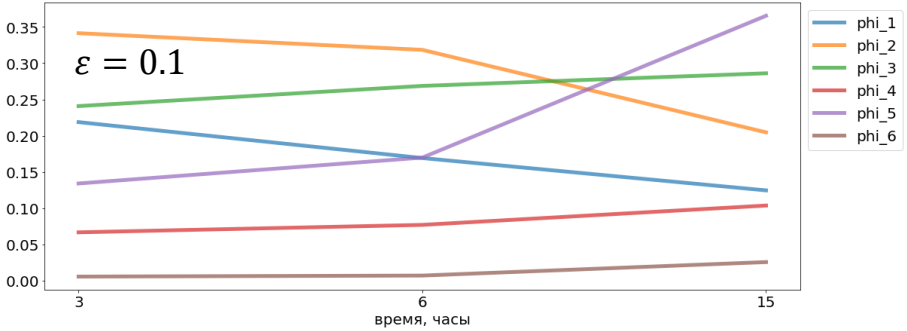
Переход к гиперболической формулировке при $\varepsilon \neq 0$ уменьшает число обусловленности оператора обратной задачи на один порядок.

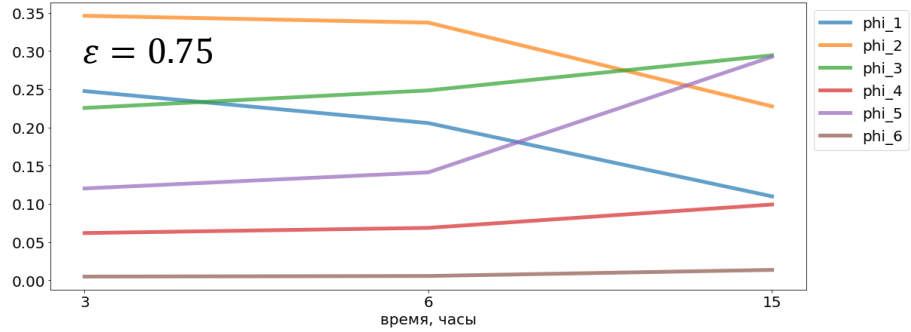
Анализ чувствительности методом Соболя

$$S_i = \frac{V_{q_i}\left(E_{Q_i}(Y|q_i)\right)}{V(Y)}$$









Sobol I.M. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models // Mathematical Modelling and Computational Experiment 1993 V. 1 P. 407–414

Постановка обратной задачи

Обратная задача

$$\min_{q} J(q) = \min_{q}(\|u(\cdot,\cdot;q) - f\|^2)$$

Где $q = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d))$ – вектор параметров.

Оптимизация

Глобальные методы

- Тензорная оптимизация

Zheltkov D. A. et al.
TTDock: a docking method based on tensor train decompositions (2013)

- Метод роя частиц

Kennedy J. and Eberhart R.
Particle Swarm Optimization (1995)

Локальные методы

- Многоуровневый градиентный метод

Nesterov Yu.
Linear convergence of first order methods for non-strongly convex optimization (2018)

Регуляризация А.Н. Тихонова

$$J(q) = \frac{(T-1)}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}\left|\sum_{i=1}^{N_1} u(x_i, t_k; q) - f_k\right|^2 + \alpha\sum_{j=1}^{e}|q_j|^2$$

Тихонов А.Н.
Об устойчивости обратных задач (1943)
Leonov A.S., Sharov A.N. and Yagola, A.G.
Calculation of the gradient of Tikhonov's functional in solving coefficient inverse problems for linear partial differential equations (2022)

Метод тензорного поезда (TT)

$$J(q) \to g_\alpha(q)$$

$$g_\alpha(q) = h(J(q) - \alpha)$$

h(a) – непрерывная монотонно убывающая функция, *α* – некоторое начальное приближение к минимуму функционала *J(q)*.

Вводится сетка с n узлами по каждому из d направлений и тензор $A \in \mathbb{R}^{n^d}$

$$A(i_1, \dots, i_d) = g_\alpha\left(\frac{i_1 - 1}{n - 1}, \dots, \frac{i_d - 1}{n - 1}\right)$$

Алгоритм основан на последовательном приближении подматриц матриц разверток

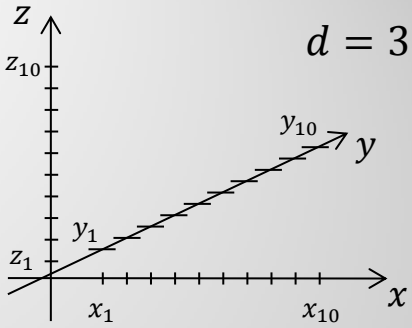
$$A_k(i_1 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_d) = A(i_1, \dots, i_d)$$

крестовым методом и локальной оптимизации полученных данным методом узлов интерполяции.

$$f(x, y, z) = 2x + yz$$

$$n = 10,$$
$$x, y, z \in [1,10]$$

$d = 3$



$$A(i, j, k) = f(x_i, y_j, z_k)$$

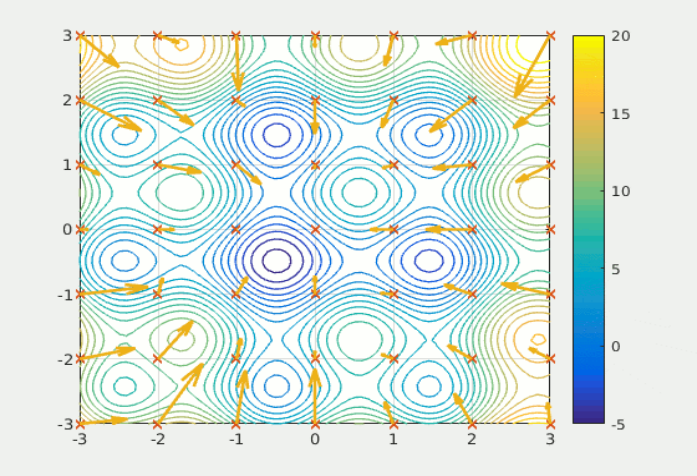
$$\begin{pmatrix} A(1,1,1) & \cdots & A(1,10,1) & & A(1,1,10) & \cdots & A(1,10,10) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(10,1,1) & \cdots & A(10,10,1) & & A(10,1,10) & \cdots & A(10,10,10) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 12 & & 12 & \cdots & 102 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 21 & \cdots & 30 & & 30 & \cdots & 120 \end{pmatrix}$$

D. A. Zheltkov, I. V. Oferkin, E. V. Katkova, A. V. Sulimov, V. B. Sulimov, E. E. Tyrtyshnikov,
TTDock: a docking method based on tensor train decompositions, *Vychisl. Metody Programm.*, 14:3 (2013), 279–291

Метод роя частиц (МРЧ)

for $i = 1, \dots, S$ **do**
  $x_i \sim U(b_{lo}, b_{up})$
  $p_i \leftarrow x_i$
  if $J(p_i) < J(g)$ **then**
    $g \leftarrow p_i$
  $v_i \sim U(-|b_{up} - b_{lo}|, |b_{up} - b_{lo}|)$
while не выполнен критерий остановки **do**
  for $i = 1, \dots S$ **do**
    $r_p, r_g \sim U(0,1)$
    $v_i \leftarrow \omega v_i + \varphi_p r_p (p_i - x_i) + \varphi_g r_g (g - x_i)$
    $\boxed{x_i \leftarrow x_i + v_i}$
    if $J(x_i) < J(p_i)$ **then**
      $p_i \leftarrow x_i$
      if $J(p_i) < J(g)$ **then**
        $g \leftarrow p_i$



S	количество частиц в рое
b_{lo}, b_{up}	нижняя и верхняя границы пространства решений
$x_i \in \mathbb{R}^e$	координата i-ой частицы
$v_i \in \mathbb{R}^e$	скорость i-ой частицы
p_i	лучшее из известных положений частицы i
g	наилучшее известное состояние роя в целом

Параметры ω, φ_p, и φ_g выбираются вычислителем и определяют поведение и эффективность метода в целом.

J. Kennedy and R. C. Eberhart, Particle Swarm Optimization, 1995

Многоуровневый градиентный метод (МГМ)

$$J(q) = \frac{(T-1)}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}\left|\sum_{i=1}^{N_1} y(x_i, t_k; q) - f_k\right|^2$$

$$q^{m+1} = \theta_{m+1} z^m + (1-\theta_{m+1})p^m,$$
$$\theta_{m+1} \in Arg \min_{\theta\in[0,1]} J(\theta z^m + (1-\theta)p^m),$$

$$p^{m+1} = q^{m+1} - \zeta_{m+1}\nabla J(q^{m+1}),$$
$$\zeta_{m+1} \in Arg \min_{\zeta\geq 0} J(q^{m+1} - \zeta\nabla J(q^{m+1})),$$

$$z^{m+1} = z^m - \eta_{m+1}\nabla J(q^{m+1}),$$
$$\eta_{m+1} = \frac{1}{2L_{m+1}} + \sqrt{\frac{1}{4L_{m+1}} + \eta_m^2}, \qquad \eta_0 = 0$$

$$\nabla J(x) = -\psi(x,1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -d\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - r(t)\psi + \dfrac{2r(t)y}{K}\psi + [\psi] \\ \psi(x,T) = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_2 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(l_1,t) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(l_2,t) = 0, \quad t \geq 1 \end{cases}$$

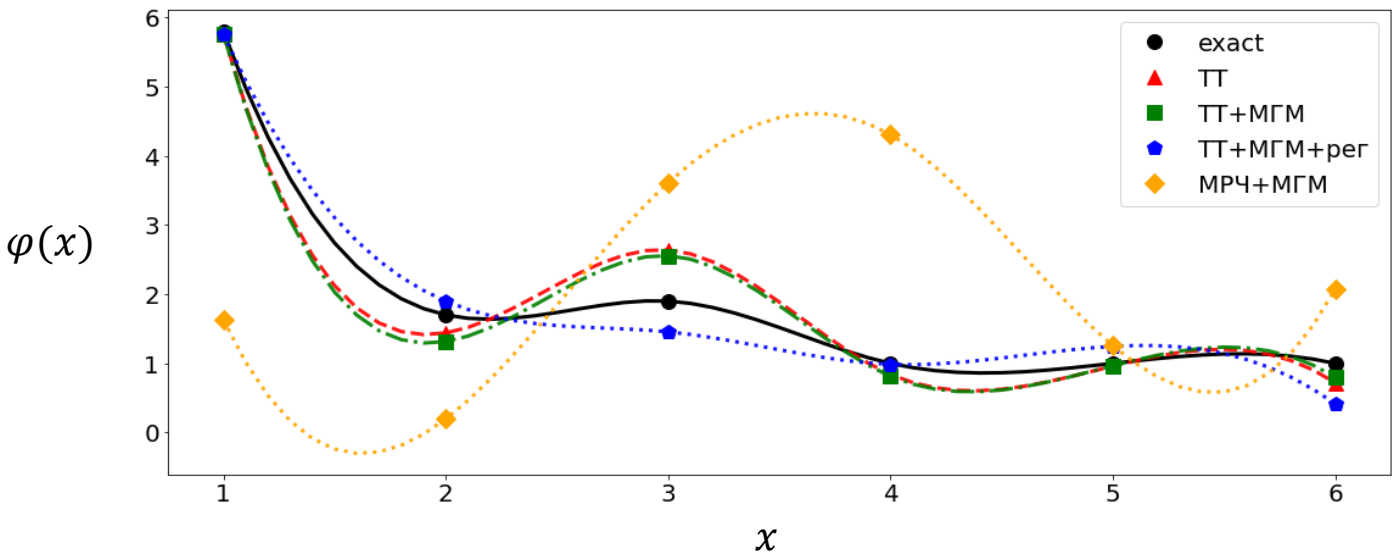
$$[\psi]_{t=t_k} = 2\frac{(T-1)}{N_2}\left(\sum_{i=1}^{N_1} y(x_i, t_k; q) - f_k\right)$$

$$J(q^m) \leq \frac{4L\|q^0 - q_{ex}\|^2}{(m+1)^2}$$

Nesterov Yu. Linear convergence of first order methods for non-strongly convex optimization // Mathematical Programming. 2018. Vol. 152, No. 1-2. P. 381–404

Звонарева Т.А., Криворотько О.И. Сравнительный анализ градиентных методов определения источника диффузионно-логистической модели // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 4, С. 694--704

Сравнение результатов восстановления источника



Наименьшее значение погрешности достигается при работе регуляризованного комбинированного метода ТТ + МГМ.

Спасибо за внимание!