Спектральный критерий развития флаттера

Э.А.Бибердорф, А.С.Рудометова

ИМ СО РАН, НГУ

23 ноября 2024 г

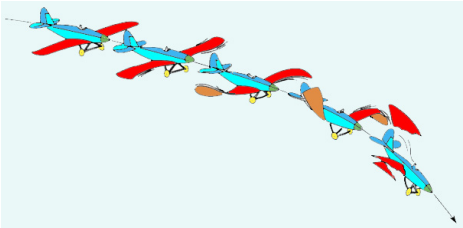
Флаттер

"С появлением новых скоростных самолётов в авиации едва ли не всех передовых стран мира прокатилась волна таинственных, необъяснимых катастроф. Случайные свидетели, наблюдавшие эти катастрофы с земли, видели во всех случаях почти одинаковую картину: самолёт летел совершенно нормально, ничто в его поведении не внушало ни малейших опасений, как вдруг внезапно какая-то неведомая сила, будто взрывом, разрушала машину — и вот уже падают на землю изуродованные обломки: крылья, оперение, фюзеляж... Все очевидцы, не сговариваясь между собой, применяли выражение «взрыв», так как не представляли себе других возможных причин столь молниеносного и полного разрушения. Однако осмотр упавших обломков не подтверждал этой версии: никаких следов взрыва — копоти или ожогов — на них не оказывалось."

Флаттер – это динамическая неустойчивость упругой конструкции в потоке среды

Аэроупругость — область механики, в которой изучаются явления, обусловленные взаимодействием упругих тел и обтекающего их потока газа или жидкости.

Флаттер порождается взаимодействием в конструкции упругих, инерционных и аэродинамических сил.



Разрушение Такомского моста

Мост Такома-Нэрроуз (США, штат Вашингтон), 7 ноября 1940 года.

Основные типы флаттера

- Классический
  Характерные примеры - колебание крыльев и оперенья летательных аппаратов
- Срывной
  Характерные примеры - висячие мосты, высокие заводские трубы
- Панельный
  Колебания тонкостенных элементов обшивки (пластины, пологие оболочки) летательных аппаратов

Математическая модель панельного флаттера

Пусть пластина постоянной толщины h из материала плотности ρ, занимающая в плоскости xy область G с кусочно-гладкой границей Γ обтекается с одной стороны потоком газа с вектором скорости $\vec{v} = (v_x, v_y) = (v\cos\theta, v\sin\theta)$.

Уравнение в обезразмеренной форме для возмущенного состояния пластины $u(t, x, y)$ имеет вид

$$D\Delta^2 u + \gamma\vec{v}\nabla u + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} + \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

Здесь Δ^2 – бигармонический оператор, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, γ – показатель адиабаты газа.

Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки. ПММ. 1994. Т. 58, вып. 3, С. 167-171.

Будем искать решение (1) в виде $u(t,x,y) = \varphi(x,y)e^{\omega t}$.

Возмущенное движение пластины будет устойчивым, если $Re(\omega) < 0$, и неустойчивым, если $Re(\omega) > 0$. Условие $Re(\omega) = 0$ таким образом будет определять критические параметры потока газа или пластины.

Для амплитуды колебания пластины $\varphi(x,y)$ получаем уравнение

$$D\Delta^2\varphi + \gamma\vec{v}\nabla\varphi + (\gamma\omega + \rho h\omega^2)\varphi = 0, \tag{2}$$

которое вместе с подходящими условиями на границе

$$M_1(\varphi) = 0, \qquad M_2(\varphi) = 0, \qquad x, y \in \Gamma \tag{3}$$

составляет задачу на собственные значения.

Краевые задачи для бесконечной полосы

Рассмотрим пластину в виде упругой бесконечной полосы.
Пусть в плоскости xy она занимает область $G : \{|x| < \infty,\ 0 \le y \le 1\}$.

Решение (2), ограниченное на бесконечности, будем искать в виде в виде $\varphi(x, y) = \psi(y)e^{-i\alpha x}$, где α – вещественный параметр. Тогда для $\psi(y)$ получаем уравнение

$$D\left(\frac{d^4\psi}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\psi}{dy^2} + \alpha^4\psi\right) + \gamma v_y\frac{d\psi}{dy} - i\alpha\gamma v_x\psi = (\gamma\omega + \rho h\omega^2)\psi. \tag{4}$$

Краевые задачи для бесконечной полосы

Поставим две краевые задачи, соответствующие разным типам закрепления кромок полосы при $y = 0$ и $y = 1$.

Шарнирное закрепление

$$\begin{aligned} y = 0: \ \psi = 0, \ \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0, \\ y = 1: \ \psi = 0, \ \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Жесткое закрепленние

$$\begin{aligned} y = 0: \ \psi = 0, \ \frac{d\psi}{dy} = 0, \\ y = 1: \ \psi = 0, \ \frac{d\psi}{dy} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Спектральная задача

Для аппроксимации поставленных задач проведем дискретизацию дифференциальных операторов с учетом заданных граничных условий.

В итоге получим задачу на собственные значения ω

$$(C + (\gamma\omega + \rho h\omega^2)I)\psi = 0, \tag{7}$$

где

$$C = D[D_4 - 2\alpha^2 D_2 + \alpha^4 I] + \gamma v_y D_1 - i\alpha\gamma v_x I.$$

Дискретизация дифф.оператора при жестком закреплении

Аппроксимация решения производится в точках Гаусса-Лобатто

$$y_j = \cos\frac{j\pi}{N},\ j = 0, \ldots, N,$$

а матрицы D_1, D_2 и D_4 представляют собой матричные коллокационные производные первого, второго и четвертого порядков, учитывающие однородные условия Дирихле и Неймана.

Отметим, что в гидродинамических задачах, а также в тестах на основе задачи Штурма-Лиувилля применение данной аппроксимации дифференциального оператора позволяет получить с высокой точностью собственные значения с небольшим модулем.

Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB. SIAM. Philadelphia, 2000. P. 163.

Дискретизация дифф.оператора при шарниром закреплении

$$D_1 = \begin{pmatrix} u_1 & c_{21} & \cdots & c_{N1} \\ c_{12} & u_2 & \cdots & c_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1N} & c_{2N} & \cdots & u_N \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} v_1 & b_{21} & \cdots & b_{N1} \\ b_{12} & v_2 & \cdots & b_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1N} & b_{2N} & \cdots & v_N \end{pmatrix}, \quad D_4 = D_2^2,$$

где

$$y_j = \frac{j\pi}{N+1}, \qquad u_j = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg} y_j, \qquad v_j = -\frac{(N+1)^2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{2\sin^2 y_j}, \qquad j = 1, ..., N,$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j-1}\frac{\pi \sin y_i}{\cos y_j - \cos y_i}, \qquad b_{ij} = (-1)^{i+j-1}\frac{2\pi^2 \sin y_j \sin y_i}{(\cos y_j - \cos y_i)^2}, \qquad i, j = 1, ..., N, \ i \neq j.$$

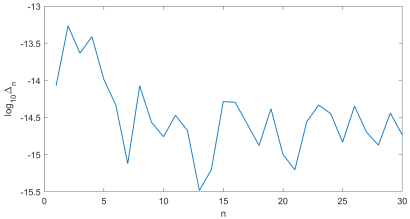
Б.В. Семисалов. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения. ЖВМиМФ. 2014. Т. 54, № 7, С. 1111-1135.

Проверка адекватности дискретизации для шарнирного закрепления

$\Delta_n = \frac{|\lambda_n(C) - \lambda_n|}{|\lambda_n|}$ погрешность собственных чисел дискретизованного оператора в сравнении с собственными числами дифференциального оператора, найденными в явном виде по формуле

$$\lambda_n = (\alpha^2 + n^2\pi^2)^2 D - i\alpha\gamma v_x.$$

в случае продольного обтекания (т.е. при $\vec{v} = (v_x, 0)$) полосы и связанные с частотой ω соотношением $\gamma\omega + \rho h\omega^2 = -\lambda$)



Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. Москва: Наука, 2006.

Линейная спектральная задача для ω

По исходной постановке задачи о флаттере нас интересует расположение частот ω относительно мнимой оси.
Квадратичную спектральную задачу (7) можно привести к линейной относительно ω задаче

$$(A - \omega B)\,\varphi = 0 \tag{8}$$

с матрицами удвоенной размерности

$$A = \begin{pmatrix} C & \gamma I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\rho h I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Это возможно, так как собственные значения ω_j у задач (7) и (8) совпадают, а собственные векторы имеют вид

$$\psi_j \qquad \text{и} \qquad \varphi_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \omega_j \psi_j \end{pmatrix}$$

соответственно.

Метод дихотомии матричного спектра

Инструментом для получения информации о спектре матричного пучка $A - \omega B$ являются

$$H = \oint_\gamma (\omega B - A)^{-1} T(\bar{\omega} B^* - A^*)^{-1} d|\lambda| \quad \text{и} \quad P = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (\omega B - A)^{-1} B d\lambda,$$

где $T = T^* > 0$ произвольная матричная нормировка.
$\|H\|$ позволяет оценить расстояние от спектра до кривой γ.
P – проектор на правое приводящее подпространство пучка $A - \omega B$, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри контура γ.
$tr\ P$ равен числу таких собственных значений.

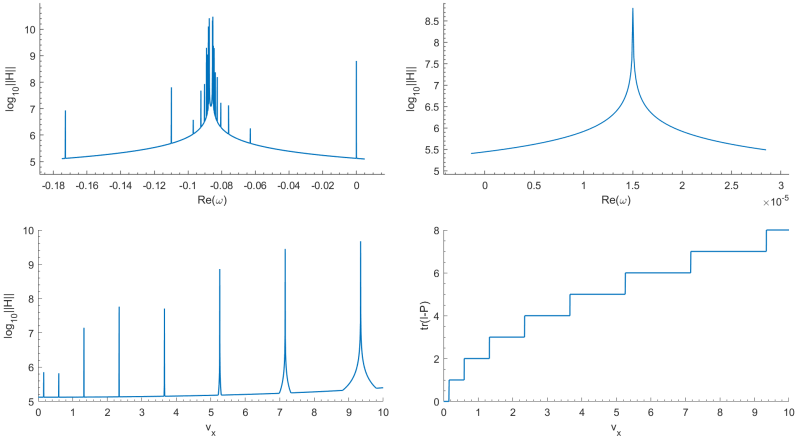
К матричному пучку $A - \omega B$ применим алгоритм дихотомии собственных значений ω мнимой осью, основанный на дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости, переводящем мнимую ось в единичную окружность.

Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997. С. 388.

Бибердорф Э.А., Рудометова А.С., Ван Ли, ЖумабаевА.Д. Метод разделения матричного спектра относительно прямой и задача о флаттере бесконечной полосы. ЖВМиМФ, 2024, том 64, N 8,

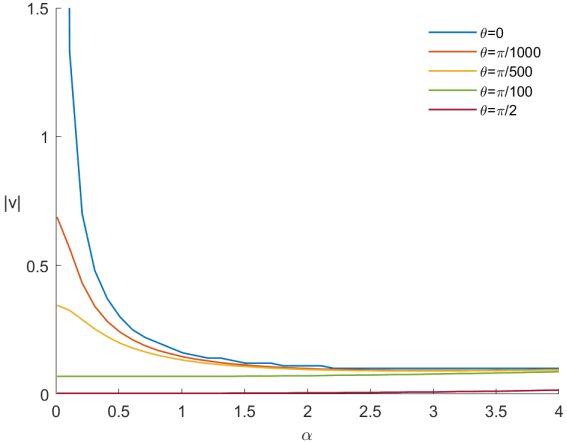
Спектральные портреты в случае шарнирного закрепления и продольного обтекания при $\alpha = 1$

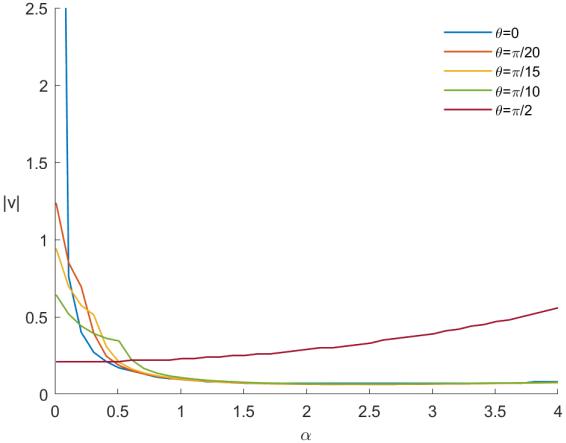
Для верхних графиков скорость фиксирована $v_x = 0.1606$. $N = 10$.



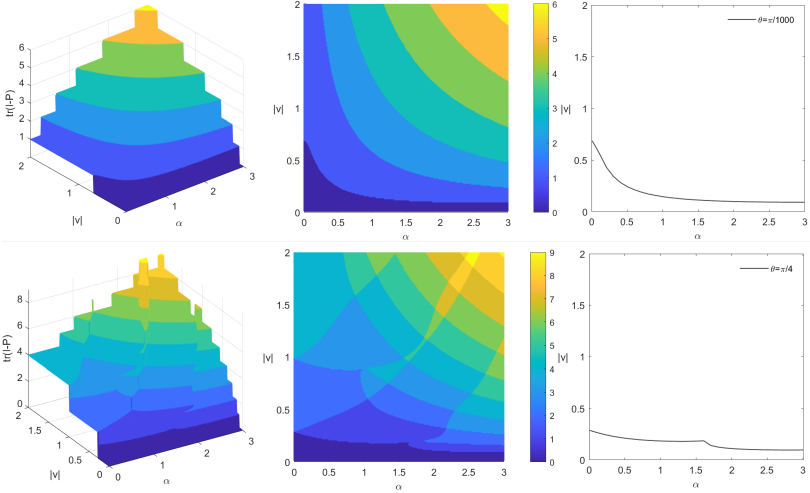
Нейтральные кривые для разных углов обтекания

Слева – шарнирное закрепление, справа – жесткое закрепление; $N = 40$.



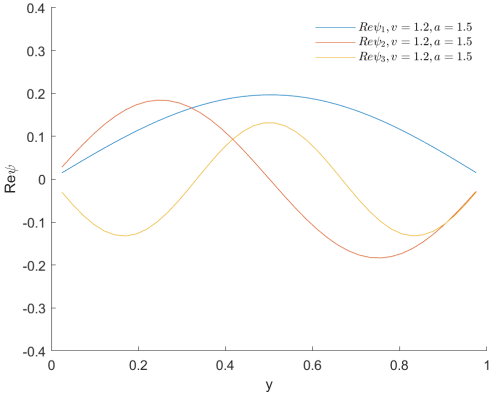


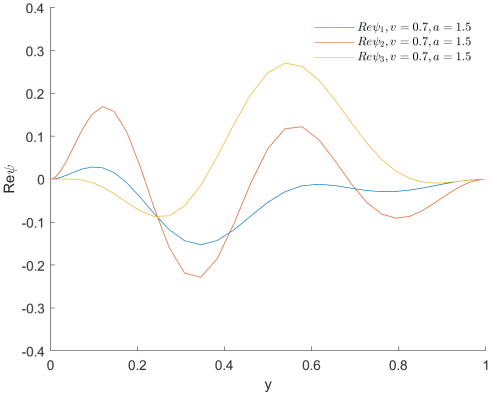
Функция $tr(I-P)$ от α, $v=|\vec{v}|$, ее проекция и нейтральная кривая $tr(I-P)=0$. Верхний ряд – шарнирное закрепление при $\theta=\pi/100$, нижний ряд – жесткое закрепление при $\theta=\pi/4$; $N=40$.



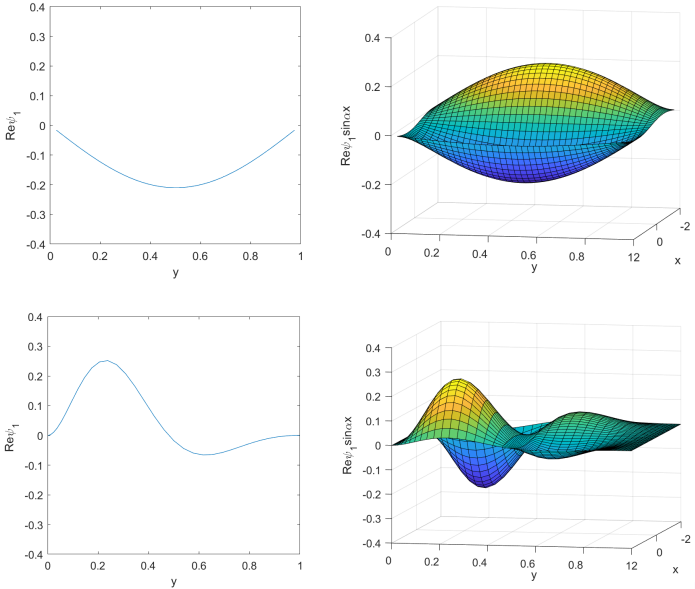
Собственные функции, соответсвующие ω_i в правой полуплоскости

Слева – шарнирное закрепление, справа – жесткое закрепление



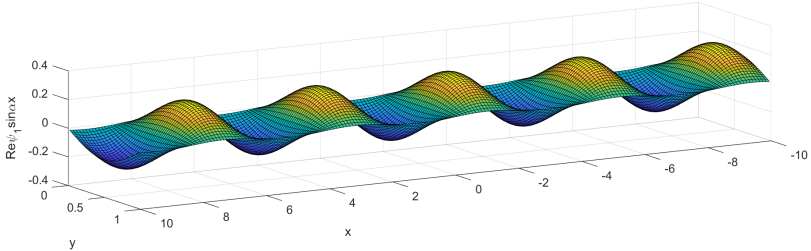


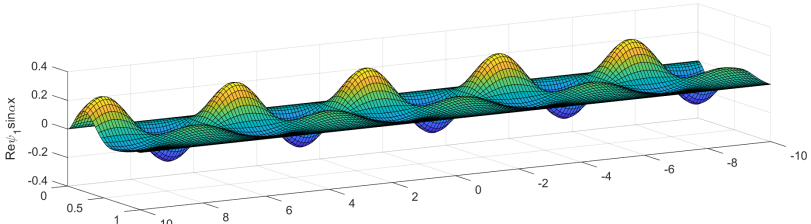
Верхний график – шарнирное закрепление, нижний – жесткое закрепление



Поведение функции $Re\psi_1(y)\sin\alpha x$ при $\alpha = 1,5$, $|v| = 0,3$

Верхний график – шарнирное закрепление, нижний – жесткое закрепление





Спасибо за внимание!

ЭЛЕМЕНТЫ

БИБЛИОТЕКА > В ПОПУЛЯРНЫХ ЖУРНАЛАХ > «НАУКА И ЖИЗНЬ»

Эолова арфа, самолёты и мосты

«НАУКА И ЖИЗНЬ» №5, 2009 • ФИЗИКА, НАУКА И ТЕХНИКА • 2 КОММЕНТАРИЯ

Светлана Кузьмина,
кандидат технических наук
Пётр Карклэ,
доцент, кандидат технических наук
«Наука и жизнь» №5, 2009

Поиски, сопровождающие развитие техники, всегда сопряжены с риском принятия неверных решений, приводящих к авариям, а иногда и к катастрофам. Без этого не обходится ни кораблестроение, ни конструирование автомобилей, ни энергетика. Не является исключением и авиация. Путь в небо вымощен обломками несметного числа летательных аппаратов и омрачён гибелью их отважных испытателей. Но даже на этом тернистом пути встречаются явления, совершенно непредсказуемые. Так, в 1930-х годах по миру прокатилась волна странных аварий при испытаниях скоростных самолётов. По

«Наука и жизнь» №5, 2009

Э Л Е М Е Н Т Ы

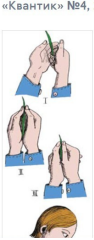
БИБЛИОТЕКА > В ПОПУЛЯРНЫХ ЖУРНАЛАХ > «КВАНТИК»

Поющая травинка и Такомский мост

«КВАНТИК» №4, 2015 • ФИЗИКА • 2 КОММЕНТАРИЯ

Андрей Щетников

«Квантик» №4, 2015



Возьмите длинный узкий лист травы, зажмите его между основаниями и концами больших пальцев рук и слегка натяните в этом положении. Поднесите травинку к губам и сильно подуйте на неё: раздастся довольно громкий и не слишком мелодичный свист. Если не получается, возьмите травинку за концы и расположите её горизонтально (ребром ко рту). Если сейчас зима, травинку можно заменить бумажной ленточкой.

За этим несложным опытом стоит хорошая физика. Начнём с самого простого вопроса: как травинка создаёт звук? Ещё древние

«Квантик» №4, 2015

Катастрофа Такомского моста

GetAClass - Физика в оп...
562 тыс. подписчиков

Подписаться

2,1 тыс. Поделиться

77 131 просмотр 18 июн. 2024 г. НОВОСИБИРСК

Катастрофа Такомского моста, произошедшая 7 ноября 1940 года, представляет собой пример раскачки аэроупругой автоколебательной системы, приведшей к появлению таких динамических нагрузок, на которые мост не был расчитан.