АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ганжаева М. Ш.

Новосибирский государственный университет, Россия

I. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z_+ = \{n = 0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1}$$

Будем предполагать, что матричная последовательность $\{A(n)\}$ имеет **период** N, т. е.

$$A(n+N) \equiv A(n), \quad n \in Z_+,$$

матрицы $A(n)$ размера $m \times m$, невырожденные и последовательнность $\{f_n\}$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n \in Z_+} \|f_n\| < \infty.$$

Пусть задано начальное условие

$$x_0 = b. \tag{2}$$

Известно, что для любого числового вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ задача (1), (2) имеет единственное решение $\{x_n\}$.

Постановка задачи I: При каких начальных условиях (2) существует **ограниченное** решение $\{x_n\}$:

$$\sup_{n \in Z_+} \|x_n\| < \infty \tag{3}$$

системы (1)?

II. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}. \tag{4}$$

Будем также предполагать, что матричная последовательность $\{A(n)\}$ имеет **период** N, но уже при $n \in Z$, т. е.

$$A(n+N) \equiv A(n), \quad n \in Z,$$

матрицы $A(n)$ размера $m \times m$, невырожденные и последовательнность $\{f_n\}$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n \in Z} \|f_n\| < \infty.$$

Пусть задано начальное условие (2):

$$x_0 = b.$$

Постановка задачи II: При каких начальных условиях (2) существует **ограниченное** решение $\{x_n\}$:

$$\sup_{n \in Z} \|x_n\| < \infty \tag{5}$$

системы (4)?

Будем предполагать, что для спектра **матрицы монодромии**

$$U_N = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$$

системы разностных уравнений имеет место **дихотомия относительно единичной окружности** $S = \{\tau \in \mathbf{C}: \ |\tau| = 1\}$. Следовательно, при решении краевых задач необходимо рассмотреть 3 случая:

1) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы монодромии U_N такие, что

$$|\tau_j| < 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы U_N принадлежит единичному кругу

$$B(0,1) = \{\tau \in \mathbf{C}: \ |\tau| < 1\}.$$

2) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы монодромии U_N такие, что

$$|\tau_j| > 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы лежит вне единичного круга $B(0,1)$.

3) Часть собственных значений $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ матрицы монодромии U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть собственных значений $\tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_m$ лежит вне единичного круга $B(0,1)$.

Рассмотрим **задачу I**:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z_+ = \{n = 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{1}$$

$$x_0 = b, \tag{2}$$

$$\sup_{n \in Z_+} \|x_n\| < \infty. \tag{3}$$

Выпишем решение начальной задачи (1), (2), используя фундаментальную матрицу решений $\{U(n)\}$, $n \in Z_+$ системы однородных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in Z_+, \tag{6}$$

которая определяется следующей начальной задачей

$$U(n+1) = A(n)U(n), \quad n \in Z_+,$$

$$U(0) = I.$$

Такая фундаментальная матрица решений называется **матрицантом**.

Для всех матриц $U(n)$, $n \in Z_+$, имеет место рекуррентная формула: если $n = kN + l$, $0 \le l \le N - 1$, то

$$U(n) = U(l)(U_N)^k, \tag{7}$$

где $U_N = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$ — матрица монодромии.

Используя формулу (7) для матрицанта $\{U(n)\}$ и применяя метод вариации произвольной постоянной, можно выписать решение $\{x_n\}$ начальной задачи (1), (2) в следующем виде: пусть $n = kN + l$, $0 \le l \le N - 1$, тогда

$$x_n = U(l)(U_N)^k b + U(l)(U_N)^k (U(1))^{-1} f_0 + U(l)(U_N)^k (U(2))^{-1} f_1$$

$$+ \ldots + U(l)(U_N)^k (U(n-1))^{-1} f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \in Z_+. \tag{8}$$

Учитывая формулу (8), а также критерий Ляпунова, можно получить решение **задачи I**.

I. При рассмотрении **первого случая** напомним, что спектр матрицы U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$ тогда и только тогда, когда **дискретное уравнение Ляпунова**

$$H - (U_N)^* H U_N = C, \quad C = C^* > 0 \tag{9}$$

имеет решение $H = H^* > 0$.

Отметим, что, имея решение $H = H^* > 0$ уравнения (9) при $C = I$, можно выписать **оценку Крейна**

$$\|(U_N)^k\| \le \sqrt{\nu(H)} \left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^{k/2}, \quad k \in Z_+, \tag{10}$$

где $\nu(H) = \|H\| \|H^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы H.

Теорема 1. *Пусть спектр матрицы монодромии U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$. Тогда для* **любого начального вектора** *$x_0 = b$ краевая задача (1), (2), (3):*

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z_+,$$

$$x_0 = b,$$

$$\sup_{n \in Z_+} \|x_n\| < \infty,$$

однозначно разрешима.

Следствие. *Пусть система (1) имеет постоянные коэффициеты, т. е. $A(n) \equiv A$, и спектр матрицы A лежит внутри единичного круга $B(0,1)$. Тогда для любого начального вектора $x_0 = b$ решение $\{x_n\}$ краевой задачи (1), (2), (3) определяется единственным образом, и оно имеет вид*

$$x_n = A^n b + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} f_j, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 2. *Пусть спектр матрицы монодромии U_N лежит вне единичного круга $B(0,1)$. Тогда существует* **единственный начальный вектор** $x_0 = b$ *такой, что краевая задача (1), (2), (3) однозначно разрешима. Начальный вектор b имеет вид*

$$b = -\sum_{j=1}^{\infty} (U(j))^{-1} f_{j-1}. \tag{11}$$

Следствие. *Пусть система (1) имеет постоянные коэффициенты, т. е. $A(n) \equiv A$, и спектр матрицы A лежит вне единичного круга $B(0,1)$. Тогда для разрешимости краевой задачи (1), (2), (3)* **необходимо и достаточно**, *чтобы начальный вектор $x_0 = b$ имел вид*

$$b = -\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} f_{j-1}. \tag{12}$$

Решение задачи $\{x_n\}$ определяется единственным образом и имеет вид

$$x_n = -\sum_{j=n+1}^{\infty} A^{n-j} f_{j-1}.$$

Рассмотрим **третий случай**.

Поскольку часть собственных значений $\tau_1, \dots, \tau_\mu$ матрицы U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть собственных значений $\tau_{\mu+1}, \dots, \tau_m$ лежит вне единичного круга, то имеет место представление всего пространства C^m в прямую сумму двух подпространств

$$C^m = V_- \oplus V_+,$$

где V_- — **максимальное инвариантное подпространство относительно** U_N, соответствующее собственным значениям $\tau_1, \dots, \tau_\mu$, а V_+ — **максимальное инвариантное подпространство относительно** U_N, соответствующее собственным значениям $\tau_{\mu+1}, \dots, \tau_m$. Тогда **по теореме Ф. Рисса** контурный интеграл

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_S (\lambda I - U_N)^{-1} d\lambda, \qquad S = \{\lambda : \ |\lambda| = 1\} \tag{13}$$

является проектором на V_-, а $I - P$ — проектором на V_+, при этом

$$PU_N = U_N P.$$

Теорема 3. *Предположим, что часть спектра матрицы монодромии U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть принадлежит внешности единичного круга $CB(0,1)$. Пусть P — проектор Рисса (13):*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S (\lambda I - U_N)^{-1} d\lambda.$$

Тогда для разрешимости краевой задачи (1), (2), (3) **необходимо и достаточно**, *чтобы начальный вектор $x_0 = b$ имел вид*

$$b = Pb^- + b^+,$$

где b^- — произвольный вектор из C^m, а вектор b^+ определяется единственным образом

$$b^+ = -\sum_{j=0}^{\infty}(I-P)(U(j+1))^{-1} f_j.$$

II. Рассмотрим **задачу II**:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \tag{4}$$

$$x_0 = b, \tag{2}$$

$$\sup_{n \in Z} \|x_n\| < \infty. \tag{5}$$

Теорема 4. *Предположим, что спектр матрицы монодромии U_N принадлежит единичному кругу $B(0,1)$. Тогда для разрешимости краевой задачи (4), (2), (5)* **необходимо и достаточно**, *чтобы начальный вектор $x_0 = b$ имел вид*

$$b = \sum_{j=-\infty}^{-1} (U(j+1))^{-1} f_j.$$

Теорема 5. *Предположим, что спектр матрицы монодромии U_N расположен вне единичного круга $B(0,1)$. Тогда для разрешимости краевой задачи (4), (2), (5)* **необходимо и достаточно**, *чтобы начальный вектор $x_0 = b$ имел вид*

$$b = -\sum_{j=0}^{\infty} (U(j+1))^{-1} f_j.$$

Теорема 6. *Предположим, что часть спектра матрицы монодромии* U_N *принадлежит единичному кругу* $B(0,1)$, *а часть принадлежит внешности единичного круга* $CB(0,1)$. *Пусть* P *— проектор Рисса (13):*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S (\lambda I - U_N)^{-1} d\lambda.$$

Тогда для разрешимости краевой задачи (4), (2), (5) **необходимо и достаточно**, *чтобы начальный вектор* $x_0 = b$ *имел вид*

$$b = \sum_{j=-\infty}^{-1} P(U(j+1))^{-1} f_j - \sum_{j=0}^{\infty} (I-P)(U(j+1))^{-1} f_j,$$

вектор b *определяется единственным образом.*

Теорема 7. *Для любой ограниченной последовательности* $\{f_n\}$ **существует единственное ограниченное решение** $\{x_n\}$ *системы линейных разностных уравнений (4):*

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

при этом решение можно представить в виде

$$x_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} U(n)P(U(j+1))^{-1} f_j - \sum_{j=n}^{\infty} U(n)(I-P)(U(j+1))^{-1} f_j,$$

где P *— проектор Рисса (13).*

В работе установлены необходимые и достаточные условия на начальный вектор при которых задача I:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z_+ = \{n = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$$x_0 = b,$$

$$\sup_{n \in Z_+} \|x_n\| < \infty$$

и задача II:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

$$x_0 = b,$$

$$\sup_{n \in Z} \|x_n\| < \infty,$$

однозначно разрешимы при любых ограниченных $\{f_n\}$.

Получена явная формула решения задачи:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

$$\sup_{n \in Z} \|x_n\| < \infty.$$

Оценки решений указанных задач можно получить, используя следующую теорему.

Теорема (Демиденко, Бондарь, СМЖ-2016.) *Пусть* $\{U(n)\}$ — *матрицант системы (4). Тогда для того, чтобы для спектра матрицы монодромии* U_N *имела место дихотомия относительно единичной окружности* S **необходимо и достаточно**, *чтобы существовали эрмитовы матрицы*

$$H(0),\ H(1),\ \ldots,\ H(N-1)$$

и матрица P, *являющиеся решением краевой задачи для* **системы дискретных уравнений Ляпунова**

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U(l))^{-*}P^*P(U(l))^{-1} \\ -(U(l))^{-*}(I-P)^*(I-P)(U(l))^{-1}, \quad l = 0, 1, ..., N-1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = (I-P)^*H(0)(I-P) + P^*H(0)P, \\ U_N P = P U_N, \quad P^2 = P. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть P — проектор Рисса (13) и эрмитовы матрицы

$$H(0),\ H(1),\ \ldots,\ H(N-1)$$

являются решением краевой задачи (14).

Введем обозначения

$$h = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \ldots, \|H(N-1)\|\},$$

$$\nu(\mathbf{H}) = \max_{l,m=0,\ldots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H(m)\|.$$

Теорема 8. *Пусть*

$$\sup_{k\in Z} \|f_k\| < \infty,$$

тогда для ограниченного решения $\{x_n\}$ *системы уравнений (4):*

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in Z = \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

выполняется оценка

$$\|x_n\| \leq 2\nu(\mathbf{H})h\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right)\left(\sup_{k\in Z}\|f_k\|\right), \quad n \in Z.$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!