Об обращении преобразования Лапласа одной функции, содержащей гиперболический тангенс

Хуштова Ф.Г.
khushtova@yandex.ru

Институт прикладной математики и автоматизации - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», г. Нальчик

25 декабря 2025 г.

Методы интегральных преобразований остаются одними из наиболее эффективных методов решения различных линейных дифференциальных и интегральных уравнений, возникающих в прикладных задачах математики, математической физики, механики и других областях науки. Наличие большого количества таблиц и справочников по интегральным преобразованиям значительно упрощает процесс нахождения решения исследуемых задач. В некоторых случаях, если функция, прообраз которой нужно вычислить, отсутствует в современных таблицах и справочниках по интегральным преобразованиям, разрешить проблему в терминах известных функций позволяет теорема о вычетах и использование других важных теорем теории функций комплексного переменного.

При решении операционными методами задач для уравнения теплопроводности важное место занимает преобразование Лапласа. В данном докладе рассмотрим обращение преобразования Лапласа функции, возникающей при решении краевой задачи в ограниченной области с условиями третьего рода для уравнения теплопроводности [1].

[1] *Ремизова О.И., Соснин М.Л.* Операционный метод построения функций Грина для малых времен, соответствующих решению краевых задач для уравнений переноса параболического типа // Вестник МИХТ. 2011. Т. 6, № 3. С. 116–119.

Как известно, преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $\bar{f}(s)$ комплексной переменной s с помощью интеграла [2,3,4]

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{1}$$

Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна при $t \geqslant 0$, $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, имеет ограниченную степень роста, то есть, существуют такие положительные постоянные A и σ, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leqslant Ae^{\sigma t}, \tag{2}$$

то интеграл (1) сходится в области $\operatorname{Re} s > \sigma$, причем в области $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0 > \sigma$ этот интеграл сходится равномерно.

---

[2] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит. 1961.

[3] *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука. 1967.

[4] *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971.

Класс функций $f(t)$, допускающих преобразование Лапласа, может быть расширен. Пусть функция $f(t)$ определена для всех $t \geqslant 0$ и существует такое комплексное число s_0, что сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t) dt < M. \tag{3}$$

Тогда для всех s, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, сходится интеграл (1).

Функция $\bar{f}(s)$, определенная через функцию $f(t)$ с помощью преобразования (1), называется *изображением Лапласа* функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $\bar{f}(s)$. Связь функций $f(t)$ и $\bar{f}(s)$ символически обозначают следующим образом

$$f(t) \risingdotseq \bar{f}(s) \quad \text{или} \quad \bar{f}(s) \risingdotseq f(t).$$

Если известно изображение $\bar{f}(s)$, то формула обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds, \quad \gamma > \sigma, \tag{4}$$

определяет функцию $f(t)$ в точках ее непрерывности. Формула (4) называется *формулой Меллина*.

1. *Изображение производной.* Если функция $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \risingdotseq \bar{f}(s)$, то

$$f'(t) \risingdotseq s\bar{f}(s) - f(0). \tag{5}$$

2. *Изображение свертки.* Если $f_1(t) \risingdotseq \bar{f}_1(s)$, $f_2(t) \risingdotseq \bar{f}_2(s)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \risingdotseq \bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s). \tag{6}$$

3. *Изображение интеграла с весовой функцией.* Если $f(t) \risingdotseq \bar{f}(s)$, то

$$\int\limits_0^\infty f(\tau)\chi(\tau,t) d\tau \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}}\,\bar{f}(\sqrt{s}), \quad \chi(\tau,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \tag{7}$$

Изображения некоторых функций. Известно, что [5]

$$\chi(\alpha, t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-\alpha\sqrt{s}}, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{8}$$

Пусть

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \tag{9}$$

– интеграл вероятности [5,6]. Справедливо изображение [5]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \alpha e^{\alpha^2 t}\mathrm{Erfc}(\alpha\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{s}+\alpha}. \tag{10}$$

---

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

[6] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 358 с.

Пусть

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

– полиномы Лагерра [7,8]. Имеет место формула [9,10]

$$e^{\alpha t} L_n(\beta t) \risingdotseq \frac{(s-\beta-\alpha)^n}{(s-\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \alpha. \tag{12}$$

---

[7] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

[8] *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 358 с.

[9] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит. 1961.

[10] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

Пусть a, $b \geqslant 0$, $l > 0$. Обозначим $E(a,b,l;t) \equiv E(t)$, $\bar{E}(a,b,l;s) \equiv \bar{E}(s)$. Рассмотрим контурный интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts} \bar{E}(s)\, ds, \quad \gamma > 0, \tag{13}$$

где

$$\bar{E}(s) = \frac{\sqrt{s}}{(s+ab)\operatorname{th}\sqrt{s}l + (a+b)\sqrt{s}}. \tag{14}$$

Вычислим интеграл (13). Для этого исследуем подынтегральную функцию

$$\bar{E}(s) = \frac{\sqrt{s}}{(s+ab)\,\mathrm{th}\,\sqrt{s}l + (a+b)\sqrt{s}}. \tag{14}$$

Как известно, разложение функции $z\,\mathrm{th}\,z$ в степенной ряд при $|z| < \pi/2$ имеет вид

$$z\,\mathrm{th}\,z = z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{2z^6}{15} - \ldots \tag{15}$$

Отсюда следует, что функция (14) является однозначной функцией от s, полюсы ее – корни уравнения

$$\mathrm{th}\,\sqrt{s}l = -\frac{a+b}{s+ab}\sqrt{s}. \tag{16}$$

Известно [11], что уравнение (16) имеет только действительные корни, причем все корни – простые и они расположены вдоль оси $\mathrm{Re}\,s < 0$. Обозначим $s = -\lambda^2$. Тогда уравнение (16) перепишется в виде

$$\mathrm{ctg}\,\lambda l = \frac{\lambda^2 - ab}{(a+b)\lambda}. \tag{17}$$

[11] *Карлоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964.

Функция $y_1(\lambda) = \operatorname{ctg} \lambda l$ является нечетной периодической функцией, убывающей на каждом интервале $(\pi n/l, \pi(n+1)/l)$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция $y_2(\lambda) = (\lambda - ab/\lambda)/(a+b)$ является нечетной возрастающей функцией с вертикальной асимптотой $\lambda = 0$ и наклонной асимптотой $y = \lambda/(a+b)$.

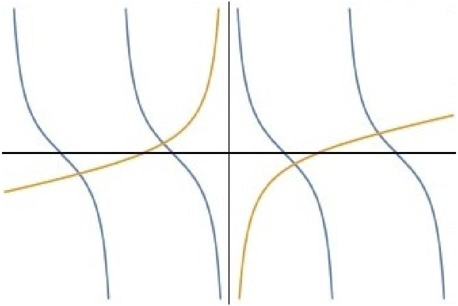

Рис. 1

Из рис. 1 видно, уравнение (17) имеет бесчисленное множество попарно противоположных по знаку и равных по абсолютному значению корней λ, причем каждый последующий корень больше предыдущего

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

Так как $s_n = -\lambda_n^2$, то рассмотрим только положительные значения корней λ_n.

Для вычисления $E(t)$ рассмотрим интеграл

$$\int\limits_C e^{ts}\bar{E}(s)\,ds, \tag{18}$$

по контуру C, изображенному на рис. 2 и состоящему из отрезка AB, параллельного мнимой оси, и левой полуокружности C_R радиуса R.

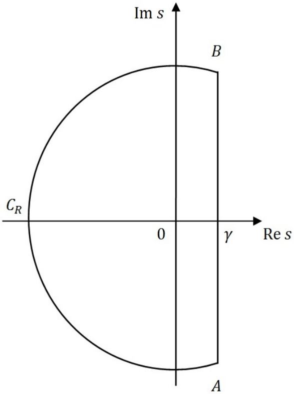

Рис. 2

Выберем радиус полуокружности $R = n^2\pi^2/l^2$, если $a + b \neq 0$ и $R = (n + 1/2)^2\pi^2/l^2$, если $a + b = 0$. В этом случае ни один из полюсов не будет лежать на C_R. При $n \to \infty$ интеграл по отрезку AB перейдет в искомый интеграл (13), а интеграл по полуокружности C_R согласно лемме Жордана и в силу предельного соотношения $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \sqrt{s}\bar{E}(s) = 1$, $s \in C_R$, обратится в нуль. По теореме о вычетах [12] получаем

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=s_n} \left[e^{ts}\bar{E}(s)\right]. \tag{19}$$

[12] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит. 1961.

Пусть

$$\Phi(s) = \operatorname{ch}\sqrt{s}l, \tag{20}$$

$$\Psi(s) = \left(\sqrt{s} + \frac{ab}{\sqrt{s}}\right)\operatorname{sh}\sqrt{s}l + (a+b)\operatorname{ch}\sqrt{s}l. \tag{21}$$

Тогда функцию $\bar{E}(s)$ можно представить в виде отношения двух обобщенных полиномов $\Phi_1(s) = s\Phi(s)$ и $\Psi_1(s) = s\Psi(s)$, $s \neq 0$,

$$\bar{E}(s) = \frac{\Phi_1(s)}{\Psi_1(s)}. \tag{22}$$

Известно, что [13]

$$\lim_{s \to s_n} \frac{\Phi_1(s)}{\Psi_1'(s)} = \lim_{s \to s_n} \frac{\Phi(s)}{\Psi'(s)}, \tag{23}$$

где s_n – корни уравнения $\Psi(s) = 0$.

[13] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967.

Вычеты функции $e^{ts}\bar{E}(s)$ можно найти по формуле [14,15]

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}\left[e^{ts}\bar{E}(s)\right]=\frac{\Phi(s_n)}{\Psi'(s_n)}\,e^{s_n t}. \tag{24}$$

Найдем $\Psi'(s_n)$, учитывая при этом, что s_n – корни уравнения (16). Из (21) имеем

$$\Psi'(s)=\operatorname{ch}\sqrt{s}l\left[\frac{l(s+ab)}{2s}+\frac{l(a+b)}{2\sqrt{s}}\operatorname{th}\sqrt{s}l+\frac{s-ab}{2s\sqrt{s}}\operatorname{th}\sqrt{s}l\right]. \tag{25}$$

Подставляя вместо $\operatorname{th}\sqrt{s}l$ выражение (16), можем записать

$$\Psi'(s)=\operatorname{ch}\sqrt{s}l\,\frac{l(a^2-s)(b^2-s)+(a+b)(ab-s)}{2s(s+ab)}. \tag{26}$$

[14] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматлит. 1961.

[15] *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971.

Так как $s_n = -\lambda_n^2$, где λ_n – корни уравнения (17), то

$$c_n = \lim_{s \to s_n} \frac{\Phi(s)}{\Psi'(s)} = \frac{2\,\lambda_n^2\,\left(\lambda_n^2 - ab\right)}{l\,(\lambda_n^2 + a^2)\,(\lambda_n^2 + b^2) + (a+b)\,(\lambda_n^2 + ab)}. \tag{27}$$

Таким образом, обратное преобразование Лапласа функции $\bar{E}(s)$ находим в форме

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad t > 0, \tag{28}$$

где коэффициенты c_n определяются из (27).

Учитывая равенства

$$\left(\lambda_n^2 + a^2\right)\left(\lambda_n^2 + b^2\right) = \left(\lambda_n^2 - ab\right)^2 + (a+b)^2\lambda_n^2, \tag{29}$$

$$(a+b)\lambda_n = \left(\lambda_n^2 - ab\right)\operatorname{tg}\lambda_n l, \tag{30}$$

коэффициенты c_n можно записать также в виде

$$c_n = \frac{2\,\lambda_n^3\cos^2\lambda_n l}{l\lambda_n\left(\lambda_n^2 - ab\right) + \left(\lambda_n^2 + ab\right)\sin\lambda_n l\cos\lambda_n l}. \tag{31}$$

Получим другую форму записи функции $E(t)$. Обозначив $p = \sqrt{s}$ и воспользовавшись равенством

$$\left(p^2 + ab\right) \operatorname{sh} pl + (a + b)\, p \operatorname{ch} pl = \frac{(p + a)(p + b)}{2}\, e^{pl} \left(1 - \frac{(p - a)(p - b)}{(p + a)(p + b)} e^{-2pl}\right), \tag{32}$$

а также представлением

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1, \tag{33}$$

запишем функцию (14) в виде

$$\bar{E}(s) = 2p \operatorname{ch} pl \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p - a)^n (p - b)^n}{(p + a)^{n+1} (p + b)^{n+1}} e^{-(2ln + l)p}. \tag{34}$$

Пусть

$$\bar{T}_n(s) = \frac{2\,\mathrm{ch}\,pl}{p} e^{-(2ln+l)p}, \tag{35}$$

$$\bar{f}_n(h,s) = \frac{(p-h)^n}{p\,(p+h)^{n+1}}, \quad \bar{E}_n(h,s) = s\bar{f}_n(h,s). \tag{36}$$

Тогда функция (34) примет вид

$$\bar{E}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n(s)\bar{E}_n(a,s)\bar{E}_n(b,s). \tag{37}$$

Функцию $\bar{T}_n(s)$ запишем следующим образом

$$\bar{T}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-2ln\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-(2ln+2l)\sqrt{s}}. \tag{38}$$

Из формулы (8) следует

$$\bar{T}_n(s) \risingdotseq T_n(t) = \chi(2ln, t) + \chi(2ln + 2l, t)\,. \tag{39}$$

Воспользовавшись формулами (7) и (12), получаем, что

$$\bar{f}_n(h, s) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-h\tau} L_n\,(2h\tau)\,\chi(\tau, t)\,d\tau. \tag{40}$$

Свойство (5) позволяет нам записать

$$\bar{E}_n(h, s) \risingdotseq E_n(h, t) = \int\limits_0^\infty e^{-h\tau} L_n\,(2h\tau)\,\chi_t'(\tau, t)\,d\tau.$$

Применяя теперь к равенству (37) свойство (6), окончательно находим

$$E(t) = \sum_{n=0}^\infty T_n(t) * E_n(a, t) * E_n(b, t)\,. \tag{41}$$

Утверждение.

Пусть a, $b \geqslant 0$, $l > 0$. *Тогда обратное преобразование Лапласа функции*

$$\bar{E}(s) = \frac{\sqrt{s}}{(s+ab)\,\mathrm{th}\,\sqrt{s}l + (a+b)\sqrt{s}} \tag{42}$$

может быть записано в эквивалентных формах

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 t}, \tag{43}$$

где

$$c_n = \frac{2\,\lambda_n^2\left(\lambda_n^2 - ab\right)}{l\,(\lambda_n^2 + a^2)\,(\lambda_n^2 + b^2) + (a+b)\,(\lambda_n^2 + ab)}, \tag{44}$$

λ_n – *положительные корни трансцендентного уравнения*

$$\mathrm{ctg}\,\lambda l = (\lambda - ab/\lambda)/(a+b), \tag{45}$$

и

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) * E_n(a,t) * E_n(b,t)\,, \tag{46}$$

где

$$T_n(t) = \chi(2ln, t) + \chi(2ln + 2l, t)\,, \quad \chi(\tau, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,, \tag{47}$$

$$E_n(h,t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-h\tau} L_n\,(2h\tau)\,\chi_t'(\tau,t)\,d\tau, \quad L_n(\tau) = \frac{e^{\tau}}{n!}\,\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right). \tag{48}$$

Если один из параметров a или b равен нулю, а другой отличен от нуля, например, $a = 0$, $b \neq 0$, то λ_n будут положительными корнями уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \lambda / b, \tag{49}$$

а коэффициенты c_n примут более простой вид

$$c_n = \frac{2\,\lambda_n^2}{l\,(\lambda_n^2 + b^2) + b}. \tag{50}$$

При $a = 0$, $b \neq 0$ из (37) получаем

$$\bar{E}(0, b, l; s) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n(s) \bar{E}_n(b, s), \tag{51}$$

откуда

$$E(0, b, l; t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) * E_n(b, t)\,. \tag{52}$$

Если $a = b = 0$, то $\lambda_n = \pi n/l$, $c_n = 2/l$ и функция (28) запишется в виде

$$E(0,0,l;t) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}, \quad t > 0. \tag{53}$$

При $b = 0$ из (51) находим

$$E(0,0,l;t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\chi(2ln,t) + \chi(2ln+2l,t)\right]. \tag{54}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\frac{l^2 n^2}{t}} + e^{-\frac{l^2(n+1)^2}{t}}\right], \quad t > 0. \tag{55}$$

Рассмотрим предельный случай $l = \infty$. В этом случае функция (14) принимает вид

$$\bar{E}(a, b, \infty; s) = \frac{\sqrt{s}}{\left(\sqrt{s} + a\right)\left(\sqrt{s} + b\right)} = \frac{a}{a - b}\frac{1}{\sqrt{s} + a} - \frac{b}{a - b}\frac{1}{\sqrt{s} + b}. \tag{56}$$

Из формулы (10) находим

$$E(a, b, \infty; t) = \frac{aV(a, t) - bV(b, t)}{a - b}, \quad V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - xe^{x^2 t}\mathrm{Erfc}(x\sqrt{t}). \tag{57}$$

Если $a = b$, то из (57) следует

$$E(a, a, \infty; t) = 2\left(a^2 t + 1\right) V(a, t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \tag{58}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!