Уравнения нейтрального типа и модели нейронных сетей

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Новосибирск, Россия

Модели нейронных сетей

В настоящее время активно развивающимся направлением является математическое моделирование нейронных сетей.
Среди наиболее распространенных моделей можно выделить следующие:

- **модель нейронной сети Хопфилда**

Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collect computational abilities // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1982. V. 79. P. 2254–2558.

- **модель нейронной сети Коэна – Гроссберга**

Cohen M.A., Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. 1983. V. SMC-13, No. 5. P. 815–826.

- **модель нейронной сети Коско**

Kosko B. Adaptive bidirectional associative memories // Appl. Optics. 1987. V. 26. P. 4947–4960.

Модели нейронных сетей

В последние годы при моделировании нейронных сетей широко используются дифференциальные уравнения **с запаздыванием**, в том числе уравнения нейтрального типа:

- **модель Хопфилда нейтрального типа**

Wan L., Zhou Q., Fu H., Zhang Q. Exponential stability of Hopfield neural networks of neutral type with multiple time-varying delays // AIMS Mathematics. 2021. V. 6, No. 8. P. 8030–8043.

- **модель Коэна – Гроссберга нейтрального типа**

Wan L., Zhou Q. Exponential stability of neutral-type Cohen–Grossberg neural networks with multiple time-varying delays // IEEE Access. 2021. V. 9. P. 48914–48922.

- **модель Коско нейтрального типа**

Liu G.-Q., Zhou S.-M., Li Y.-Z., Cai T.-C. Stability conditions concerning neutral-type BAM neural networks with infinite distributed delay // International Journal of Computer Mathematics. 2020. V. 98, No. 3. P. 502–516.

Модель Хопфилда нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = -a_{i0}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}x_j(t-\xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > 0,$$

$x_i(t)$ — состояние i-го нейрона в момент времени t,

параметры запаздывания τ_{ij}, ξ_{ij} отвечают за время задержки сигналов между нейронами,

коэффициенты a_{i0}, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, u_i и нелинейные функции f_j, g_j описывают процесс взаимодействия нейронов между собой.

Поскольку запаздывание входит в производную от неизвестной функции, система явявляется системой **нейтрального типа**.

Модель Хопфилда нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = -a_{i0}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}x_j(t-\xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

$\tau_{ij}(t),\ \xi_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$:

$$0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \le \bar{\tau}_{ij} < 1,$$

$$0 < \xi_{ij}(t) \le \xi_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \le \bar{\xi}_{ij} < 1,$$

$f_j(x),\ g_j(x) \in C(\mathbb{R})$:

$$|f_j(x) - f_j(y)| \le \mu_j|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$|g_j(x) - g_j(y)| \le \nu_j|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Модель Коэна–Гроссберга нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \beta_i(x_i(t))\left\{-\alpha_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) + u_i\right\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}x_j(t-\xi_{ij}(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

$\tau_{ij}(t),\ \xi_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$:

$$0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \le \bar{\tau}_{ij} < 1,$$

$$0 < \xi_{ij}(t) \le \xi_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \le \bar{\xi}_{ij} < 1,$$

$\alpha_i(x),\ \beta_i(x) \in C(\mathbb{R})$:

$$0 < \underline{\alpha}_i \le \frac{\alpha_i(x) - \alpha_i(y)}{x - y}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$0 < \underline{\beta}_i \le \beta_i(x) \le \overline{\beta}_i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Модель Коско нейтрального типа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_i(t) = -a_i^0 x_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} f_j(y_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ + \sum\limits_{l=1}^{n} \varepsilon_{il} \dfrac{d}{dt} x_l(t - \xi_{il}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \\ \dfrac{d}{dt}y_k(t) = -\alpha_k^0 y_k(t) + \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{kl} g_l(x_l(t)) + \sum\limits_{l=1}^{n} \beta_{kl} g_l(x_l(t - \sigma_{kl}(t))) \\ + \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_{kj} \dfrac{d}{dt} y_j(t - \omega_{kj}(t)) + v_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{cases}$$

$\sigma_{kl}(t), \omega_{kj}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$:

$$0 \le \sigma_{kl}(t) \le \sigma_{kl}, \quad \frac{d}{dt}\sigma_{kl}(t) \le \bar{\sigma}_{kl} < 1,$$

$$0 < \omega_{kj}(t) \le \omega_{kj}, \quad \frac{d}{dt}\omega_{kj}(t) \le \bar{\omega}_{kj} < 1.$$

Известные результаты

Система нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0$$

Начальная задача

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + C\dfrac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \quad \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]). \end{cases}$$

Решение $y(t)$ **существует и единственно**.
Если при этом

$$\frac{d}{dt}\varphi(0) = Ay(0) + B\varphi(-\tau) + C\frac{d}{dt}\varphi(-\tau),$$

то $y(t) \in C^1([0, \infty))$.

Устойчивость

Определение 1. Нулевое решение **устойчиво по Ляпунову**, если

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \qquad \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|y(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Определение 2. Нулевое решение **асимптотически устойчиво**, если
1) нулевое решение устойчиво по Ляпунову,

$$2) \quad \exists\ \rho > 0 : \qquad \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\| < \rho \quad \Longrightarrow \quad \|y(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Определение 3. Нулевое решение **экспоненциально устойчиво**, если
1) нулевое решение асимптотически устойчиво,

$$2) \quad \exists \sigma > 0 \quad \exists M, \gamma > 0 : \qquad \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\| < \sigma \quad \Rightarrow$$

$$\forall t > 0 \quad \|y(t)\| \le \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\| \cdot Me^{-\gamma t}.$$

Результаты об устойчивости

В 1950-е годы **Н.Н. Красовский** предложил метод исследования устойчивости решений систем с запаздыванием, основанный на использовании функционалов (аналогов функций Ляпунова). Такие функционалы стали называть **функционалами Ляпунова – Красовского**.

Оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности, для различных классов неавтономных систем нейтрального типа были получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского:

1. **Demidenko G.V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // Journal of Analysis and Applications. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.

2. **Демиденко Г.В., Матвеева И.И.** Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

3. **Матвеева И.И.** Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

4. **Матвеева И.И.** Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.

Цель работы

В настоящей работе будут рассмотрены вопросы устойчивости стационарных решений моделей нейронных сетей нейтрального типа.

Будут указаны условия на параметры моделей, гарантирующие экспоненциальную устойчивость стационарных решений.

Будут получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

При исследовании моделей будут использоваться модификации функционалов Ляпунова – Красовского.

Система нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1}$$

$A(t),\ B(t),\ C(t) \in C(\mathbb{R}_+)$:

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t).$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

Обозначения

Пусть матрицы $H(t) \in C^1([0,T])$, $K(s)$, $L(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что

$$H(t) = H^*(t), \quad t \in [0,T], \quad H(0) = H(T) > 0, \tag{2}$$

$$K(s) = K^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{3}$$

$$L(s) = L^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{4}$$

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix}$$

с элементами

$$Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

$$Q_{12}(t) = -H(t)B(t) - A^*(t)L(0)B(t), \quad Q_{13}(t) = -H(t)C(t) - A^*(t)L(0)C(t),$$

$$Q_{22}(t) = K(\tau) - B^*(t)L(0)B(t), \quad Q_{23}(t) = -B^*(t)L(0)C(t), \quad Q_{33}(t) = L(\tau) - C^*(t)L(0)C(t).$$

Система нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t).$$

Теорема 1 (Матвеева И.И., 2017). Предположим, что существуют матрицы $H(t) \in C^1([0,T])$, $K(s)$, $L(s) \in C^1([0,\tau])$, удовлетворяющие условиям (2)–(4), такие, что выполнено неравенство

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)u, u\rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{C}^n, \quad t \in [0,T],$$

где $P(t) \in C([0,T])$, $P(t) = P^*(t) > 0$. Если существуют $k, l > 0$ такие, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) + lL(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau],$$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво.

Система нейтрального типа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\dfrac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \quad \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]), \end{cases} \tag{5}$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t),$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(0) = A(0)\varphi(0) + B(0)\varphi(-\tau) + C(0)\frac{d}{dt}\varphi(-\tau).$$

Теорема 2 (Матвеева И.И., 2017). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения начальной задачи (5) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{\lambda_{\min}(H(t))}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(s)ds\right), \quad t > 0,$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(P(t))}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0.$$

Система нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{i=1}^{M} B_i(t)y(t-\tau_i) + \sum_{j=1}^{N} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\xi_j), \qquad t > 0, \qquad (6)$$

$A(t),\ B_i(t),\ C_j(t) \in C(\mathbb{R}_+)$:

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B_i(t+T) \equiv B_i(t), \quad C_j(t+T) \equiv C_j(t).$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{i=1}^{M} \int_{t-\tau_i}^{t} \langle K_i(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t-\xi_j}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

Обозначения

Пусть матрицы $H(t) \in C^1([0,T])$, $K_i(s) \in C^1([0,\tau_i])$, $L_j(s) \in C^1([0,\xi_j])$ такие, что

$$H(t) = H^*(t), \quad t \in [0,T], \quad H(0) = H(T) > 0, \tag{7}$$

$$K_i(s) = K_i^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K_i(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau_i], \quad i = 1,\ldots,M, \tag{8}$$

$$L_j(s) = L_j^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}L_j(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \quad j = 1,\ldots,N. \tag{9}$$

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q^{00}(t) & Q_1^{0\tau}(t) & \ldots & Q_M^{0\tau}(t) & Q_1^{0\xi}(t) & \ldots & Q_N^{0\xi}(t) \\ (Q_1^{0\tau})^*(t) & Q_{11}^{\tau\tau}(t) & \ldots & Q_{1M}^{\tau\tau}(t) & Q_{11}^{\tau\xi}(t) & \ldots & Q_{1N}^{\tau\xi}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Q_M^{0\tau})^*(t) & (Q_{1M}^{\tau\tau})^*(t) & \ldots & Q_{MM}^{\tau\tau}(t) & Q_{M1}^{\tau\xi}(t) & \ldots & Q_{MN}^{\tau\xi}(t) \\ (Q_1^{0\xi})^*(t) & (Q_{11}^{\tau\xi})^*(t) & \ldots & (Q_{M1}^{\tau\xi})^*(t) & Q_{11}^{\xi\xi}(t) & \ldots & Q_{1N}^{\xi\xi}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Q_N^{0\xi})^*(t) & (Q_{1N}^{\tau\xi})^*(t) & \ldots & (Q_{MN}^{\tau\xi})^*(t) & (Q_{1N}^{\xi\xi})^*(t) & \ldots & Q_{NN}^{\xi\xi}(t) \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $Q(t)$

$$Q^{00}(t) = -\left[\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + \sum_{i=1}^{M} K_i(0) + A^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)A(t)\right],$$

$$Q_q^{0\tau}(t) = -\left[H(t) + A^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)\right]B_q(t), \quad q = 1, \dots, M,$$

$$Q_r^{0\xi}(t) = -\left[H(t) + A^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)\right]C_r(t), \quad r = 1, \dots, N,$$

$$Q_{qq}^{\tau\tau}(t) = K_q(\tau_q) - B_q^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)B_q(t), \quad q = 1, \dots, M,$$

$$Q_{\mu q}^{\tau\tau}(t) = -B_\mu^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)B_q(t), \quad \mu, q = 1, \dots, M, \quad \mu \neq q,$$

$$Q_{\mu r}^{\tau\xi}(t) = -B_\mu^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)C_r(t), \quad \mu = 1, \dots, M, \quad r = 1, \dots, N,$$

$$Q_{rr}^{\xi\xi}(t) = L_r(\xi_r) - C_r^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)C_r(t), \quad r = 1, \dots, N,$$

$$Q_{\nu r}^{\xi\xi}(t) = -C_\nu^*(t)\left(\sum_{j=1}^{N} L_j(0)\right)C_r(t), \quad \nu, r = 1, \dots, N, \quad \nu \neq r.$$

Система нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{i=1}^{M} B_i(t)y(t-\tau_i) + \sum_{j=1}^{N} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\xi_j), \quad t > 0, \qquad (6)$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B_i(t+T) \equiv B_i(t), \quad C_j(t+T) \equiv C_j(t).$$

Теорема 3 (Матвеева И.И., 2017). Предположим, что существуют матрицы $H(t) \in C^1([0,T])$, $K_i(s) \in C^1([0,\tau_i])$, $L_j(s) \in C^1([0,\xi_j])$, удовлетворяющие условиям (7)–(9), такие, что выполнено неравенство

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)u, u\rangle, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T],$$

где $P(t) \in C([0,T])$, $P(t) = P^*(t) > 0$. Если существуют $k_i, l_j > 0$ такие, что

$$\frac{d}{ds}K_i(s) + k_i K_i(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau_i], \quad i = 1,\dots,M,$$

$$\frac{d}{ds}L_j(s) + l_j L_j(s) \leq 0, \quad s \in [0,\xi_j], \quad j = 1,\dots,N,$$

то нулевое решение системы (6) экспоненциально устойчиво.

Система нейтрального типа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum\limits_{i=1}^{M} B_i(t)y(t-\tau_i) + \sum\limits_{j=1}^{N} C_j(t)\dfrac{d}{dt}y(t-\xi_j), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\mathcal{T}_{\max}, 0], \quad \mathcal{T}_{\max} = \max\left\{\tau_1, \dots, \tau_M, \xi_1, \dots, \xi_N\right\}, \\ y(+0) = \varphi(0), \quad \varphi(t) \in C^1([-\mathcal{T}_{\max}, 0]), \end{cases} \tag{10}$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B_i(t+T) \equiv B_i(t), \quad C_j(t+T) \equiv C_j(t),$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(0) = A(0)\varphi(0) + \sum_{i=1}^{M} B_i(0)\varphi(-\tau_i) + \sum_{j=1}^{N} C_j(0)\frac{d}{dt}\varphi(-\xi_j).$$

Теорема 4 (Матвеева И.И., 2017). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для решения начальной задачи (10) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{\lambda_{\min}(H(t))}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(s)ds\right), \quad t > 0,$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(P(t))}{\|H(t)\|}, k_1, \dots, k_M, l_1, \dots, l_N\right\} > 0.$$

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = -a_{i0}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t)))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{d}{dt} x_j(t - \xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0.$$

Пусть $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ — стационарное решение системы. Замена

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

приводит систему к виду

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big[f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*) \Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Big[g_j(y_j(t - \tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*) \Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{d}{dt} y_j(t - \xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1, \dots, n, \quad t > 0.$$

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1,\dots,n, \quad t > 0,$$

$$|f_j(y_j + x_j^*) - f_j(x_j^*)| \le \mu_j |y_j|,$$

$$|g_j(y_j + x_j^*) - g_j(x_j^*)| \le \nu_j |y_j|.$$

Цель работы — указать условия **экспоненциальной устойчивости** нулевого решения и получить **оценки решений**, характеризующие скорость убывания на бесконечности.

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1, \dots, n, \qquad t > 0.$$

Линейная модель с постоянными запаздываниями

$$f_j(x) = x, \quad g_j(x) = x, \quad \tau_{ij}(t) \equiv \tau_{ij}, \quad \xi_{ij}(t) \equiv \xi_{ij} :$$

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}),$$

$$i = 1, \dots, n, \qquad t > 0.$$

Линейная модель

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij})+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Модель в матричном виде

$$\frac{d}{dt}y(t) = \left(-A_0 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\right) y(t) + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}y(t-\tau_{ij}) + \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}\frac{d}{dt}y(t-\xi_{ij}),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{20} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n0} \end{pmatrix},$$

матрицы A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} имеют по одному ненулевому элементу a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} в i-ой строке и j-ом столбце, соответственно, т. е.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \; B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & b_{ij} & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \; C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\tau_{ij}}^{t} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} \left\langle K_{ij} y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\xi_{ij}}^{t} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left\langle L_{ij} \frac{d}{ds} y(s), \frac{d}{ds} y(s)\right\rangle ds, \qquad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix},$$

$$K_{i1} = \begin{pmatrix} k_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad K_{in} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$L_{i1} = \begin{pmatrix} l_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad L_{in} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функционал в матричном виде

$$V(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} \Big\langle K_{ij} y(s), y(s) \Big\rangle \, ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\xi_{ij}}^{t} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left\langle L_{ij} \frac{d}{ds} y(s), \frac{d}{ds} y(s) \right\rangle ds.$$

Функционал в развернутом виде

$$V(t,y) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s) ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s) \right)^2 ds.$$

Линейная модель

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)\,ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds}y_j(s)\right)^2 ds.$$

Цель — указать условия **экспоненциальной устойчивости** нулевого решения и получить **оценки решений**, характеризующие скорость убывания на бесконечности.

Линейная модель

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 5. Предположим, что существуют величины $l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, такие, что выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \left[l_{jq}(a_{q0})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} (|a_{js}| + |b_{js}|)\right) (|a_{jq}| + |b_{jq}|) \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) |c_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} |c_{js}|\right) |c_{jr}| \right)} \right) \right] > 0, \quad q = 1, \dots, n.$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Обозначения

Предположим, что выполнены условия теоремы 5. Тогда существуют величины $\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, такие, что выполнены неравенства

$$\sigma_q = \sum_{j=1}^{n} \left[l_{jq}(a_{q0})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}| \right) |\widetilde{a}_{jq}| \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij} \right) |\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij} \right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}| \right) |\widetilde{c}_{jr}| \right)} \right) \right] > 0, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$|\widetilde{a}_{jr}| = |a_{jr}| + |b_{jr}| e^{\varepsilon_1^{jr} \tau_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \ldots, n,$$

$$|\widetilde{c}_{jr}| = |c_{jr}| e^{\varepsilon_2^{jr} \xi_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \ldots, n.$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s)\right)^2 ds,$$

где

$$h_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij} a_{j0} > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_{jq} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}|\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)|\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right)|b_{jq}| e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2} \geq 0,$$

$$j, q = 1, \dots, n,$$

$l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, определены в теореме 5.

Линейная модель

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij}) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\dfrac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}), \quad t>0, \\ y_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\mathcal{T}_{\max}, 0], \quad \mathcal{T}_{\max} = \max\limits_{i,j=1,\dots,n} \left\{\tau_{ij}, \xi_{ij}\right\}, \\ y_i(+0) = \varphi_i(0), \quad \varphi_i(t) \in C^1([-\mathcal{T}_{\max}, 0]), \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_i(0) = -a_{i0}\varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\varphi_j(-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}\varphi_j(-\xi_{ij}), \;\; i = 1, \dots, n.$$

Теорема 6. Предположим, что выполнены условия теоремы 5. Тогда для решения начальной задачи справедливы оценки

$$|y_i(t)| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_i}}e^{-\gamma t/2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

где

$$\gamma = \min_{i,j=1,\dots,n} \left\{ \frac{\sigma_i}{h_i}, \varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} \right\} > 0.$$

Линейная модель

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t-\tau_{ij})+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}), \quad i=1,\dots,n.$$

Следствие 1. Предположим, что выполнены неравенства

$$(a_{q0})^2 - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}(|a_{js}|+|b_{js}|)\right)(|a_{jq}|+|b_{jq}|)$$

$$\times\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{n|c_{jr}|^2}{\left(1-n\left(\sum_{s=1}^{n}|c_{js}|\right)|c_{jr}|\right)}\right) > 0, \quad q=1,\dots,n.$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Доказательство вытекает из теоремы 5, если положить

$$l_{ij}=1, \quad i,j=1,\dots,n.$$

Линейная модель (случай $n = 1$)

$$\frac{d}{dt}y(t) = -a_0 y(t) + by(t-\tau) + c\frac{d}{dt}y(t-\xi).$$

Следствие 2. Предположим, что выполнены неравенства

$$a_0 > 0, \quad |c| < 1, \quad (a_0)^2 - \frac{|b|^2}{(1-|c|^2)} > 0.$$

Тогда нулевое решение уравнения экспоненциально устойчиво, при этом имеет место оценка

$$|y(t)| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h}} e^{-\gamma t/2}, \quad t > 0,$$

$$\gamma = \min\left\{\frac{1}{a_0}\left((a_0)^2 - \frac{|b|^2 e^{\varepsilon_1 \tau}}{(1-|c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi})}\right), \varepsilon_1, \varepsilon_2\right\} > 0,$$

$$V(0,\varphi) = h\varphi^2(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} k e^{\varepsilon_1 s}\varphi^2(s)ds + \int\limits_{-\xi}^{0} l e^{\varepsilon_2 s}\left(\frac{d}{ds}\varphi(s)\right)^2 ds,$$

$$h = la_0, \quad k = \frac{l|b|^2 e^{\varepsilon_1 \tau}}{(1-|c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi})}, \quad l = 1.$$

Линейная модель (случай $n = 1$)

$$\frac{d}{dt}y(t) = -a_0 y(t) + by(t-\tau) + c\frac{d}{dt}y(t-\xi).$$

Замечание. Пусть

$$a_0 > 0, \quad b > 0, \quad 0 < c < 1, \quad (a_0)^2 - \frac{|b|^2}{(1-|c|^2)} = 0.$$

Тогда существуют параметры запаздывания $\tau > 0$ и $\xi > 0$ такие, что нулевое решение уравнения **не является экспоненциально устойчивым**.

Действительно, пусть

$$\tau = \frac{\sqrt{1-c^2}}{a_0 c}\left(2\pi - \arcsin(c)\right), \quad \xi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{a_0 c}\arccos(c).$$

Тогда уравнение имеет решение

$$y(t) = \sin\left(\frac{a_0 c}{\sqrt{1-c^2}}t\right).$$

Пример (случай $n = 2$)

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt} y_1(t) = -a_{10} y_1(t) + b_{12} y_2(t - \tau_{12}), \quad t > 0, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt} y_2(t) = -a_{20} y_2(t) + c_{21} \dfrac{d}{dt} y_1(t - \xi_{21}), \quad t > 0,
\end{cases}
$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} & 0 \\ 0 & a_{20} \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Следствие (из теоремы 5). Предположим, что выполнены условия

$$
a_{10} > 0, \quad a_{20} > |b_{12}||c_{21}|.
$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = h_1 y_1^2(t) + h_2 y_2^2(t) + \int\limits_{t-\tau_{12}}^{t} k_{12} e^{-\varepsilon_1 (t-s)} y_2^2(s)ds$$

$$+ \int\limits_{t-\xi_{21}}^{t} l_{21} e^{-\varepsilon_2 (t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_1(s)\right)^2 ds + \int\limits_{t-\xi_{21}}^{t} l_{12} e^{-\varepsilon_2 (t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_2(s)\right)^2 ds,$$

где

$$h_1 = l_{21} a_{10}, \quad h_2 = l_{12} a_{20},$$

$$k_{12} = l_{21} |b_{12}|^2 e^{\varepsilon_1 \tau_{12}},$$

величины $l_{12},\ l_{21} > 0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$, определяются из неравенств

$$\frac{a_{20}}{|b_{12}|} e^{-\varepsilon_1 \tau_{12}/2} > \sqrt{\frac{l_{21}}{l_{12}}} > |c_{21}| e^{\varepsilon_2 \xi_{21}/2}.$$

Пример (случай $n = 2$)

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt} y_1(t) = -a_{10} y_1(t) + b_{12} y_2(t - \tau_{12}), \quad t > 0, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt} y_2(t) = -a_{20} y_2(t) + c_{21} \dfrac{d}{dt} y_1(t - \xi_{21}), \quad t > 0,
\end{cases}
$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} & 0 \\ 0 & a_{20} \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Следствие (из теоремы 6). Предположим, что выполнены условия

$$
a_{10} > 0, \quad a_{20} > |b_{12}||c_{21}|.
$$

Тогда справедливы оценки

$$
|y_i(t)| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_i}} e^{-\gamma t/2}, \quad i = 1, 2, \quad t > 0,
$$

где

$$
\gamma = \min \left\{ a_{10}, a_{20} \left(1 - \frac{l_{21}}{l_{12}} \left(\frac{|b_{12}|}{a_{20}} e^{\varepsilon_1 \tau_{12}/2} \right)^2 \right), \varepsilon_1, \varepsilon_2 \right\} > 0.
$$

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1,\dots,n, \quad t > 0,$$

$\tau_{ij}(t),\ \xi_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$:

$$0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau_{ij}, \quad 0 \le \xi_{ij}(t) \le \xi_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \le \bar{\tau}_{ij} < 1, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \le \bar{\xi}_{ij} < 1,$$

$f_j(x),\ g_j(x) \in C(\mathbb{R})$:

$$|f_j(y_j + x_j^*) - f_j(x_j^*)| \le \mu_j|y_j|,$$

$$|g_j(y_j + x_j^*) - g_j(x_j^*)| \le \nu_j|y_j|.$$

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))+x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1,\dots,n, \quad t > 0.$$

Теорема 7. Предположим, что существуют величины $l_{ij} > 0$, $i,j = 1,\dots,n$, такие, что выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}\left[l_{jq}(a_{q0})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\sum_{s=1}^{n}\left(\mu_j|a_{js}| + \frac{\nu_j|b_{js}|}{\left(1-\bar{\tau}_{js}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\mu_j|a_{jq}| + \frac{\nu_j|b_{jq}|}{\left(1-\bar{\tau}_{jq}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)|c_{jr}|^2\left(1-\bar{\xi}_{jr}\right)^{-1}}{\left(l_{jr}-\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{|c_{js}|}{(1-\bar{\xi}_{js})^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{|c_{jr}|}{(1-\bar{\xi}_{jr})^{\frac{1}{2}}}\right)}\right)\right] > 0, \quad q = 1,\dots,n.$$

Тогда нулевое решение системы экспоненциально устойчиво.

Обозначения

Предположим, что выполнены условия теоремы 7. Тогда существуют величины $\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, такие, что выполнены неравенства

$$\sigma_q = \sum_{j=1}^{n} \left[l_{jq}(a_{q0})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\tilde{a}_{js}| \right) |\tilde{a}_{jq}| \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij} \right) |\tilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij} \right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\tilde{c}_{js}| \right) |\tilde{c}_{jr}| \right)} \right) \right] > 0, \quad q = 1, \dots, n,$$

$$|\tilde{a}_{jr}| = \mu_j |a_{jr}| + \frac{\nu_j |b_{jr}|}{\left(1 - \bar{\tau}_{jr}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\varepsilon_1^{jr} \tau_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \dots, n,$$

$$|\tilde{c}_{jr}| = \frac{|c_{jr}|}{\left(1 - \bar{\xi}_{jr}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{\varepsilon_2^{jr} \xi_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \dots, n.$$

Функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)\,ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\xi_{ij}(t)}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s)\right)^2 ds,$$

где

$$h_j = \sum_{i=1}^{n} l_{ij} a_{j0} > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_{jq} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}|\right) \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) |\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right) |\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right) \frac{\nu_j |b_{jq}|}{(1 - \bar{\tau}_{jq})^{\frac{1}{2}}} e^{\varepsilon_1^{jq} \tau_{jq}/2} \geq 0,$$

$$j, q = 1, \dots, n,$$

$l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, определены в теореме 7.

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big] \\ + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))+x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\dfrac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)), \quad t>0, \\ y_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\mathcal{T}_{\max}, 0], \quad \mathcal{T}_{\max} = \max\limits_{i,j=1,\dots,n}\left\{\tau_{ij}, \xi_{ij}\right\}, \\ y_i(+0) = \varphi_i(0), \quad \varphi_i(t) \in C^1([-\mathcal{T}_{\max}, 0]), \quad i = 1,\dots,n, \end{cases}$$

$$0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau_{ij}, \quad 0 \le \xi_{ij}(t) \le \xi_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \le \bar{\tau}_{ij} < 1, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \le \bar{\xi}_{ij} < 1,$$

$$|f_j(y_j + x_j^*) - f_j(x_j^*)| \le \mu_j|y_j|, \quad |g_j(y_j + x_j^*) - g_j(x_j^*)| \le \nu_j|y_j|,$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_i(0) = -a_{i0}\varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(\varphi_j(0)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(\varphi_j(-\tau_{ij}(0))+x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}\varphi_j(-\xi_{ij}(0)), \quad i = 1,\dots,n.$$

Модель нейронной сети Хопфилда

$$\frac{d}{dt}y_i(t) = -a_{i0}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t - \tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}y_j(t - \xi_{ij}(t)),$$

$$i = 1, \dots, n, \quad t > 0.$$

Теорема 8. Предположим, что выполнены условия теоремы 7. Тогда справедливы оценки

$$|y_i(t)| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_i}} e^{-\gamma t/2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

где

$$\gamma = \min_{i,j=1,\dots,n}\left\{\frac{\sigma_i}{h_i}, \varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}\right\} > 0.$$

Спасибо за внимание!