ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ НА $\mathbb{R}$ С БИСЕКТОРИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Скрипка Надежда Михайловна
Челябинский государственный университет

КОНФЕРЕНЦИЯ
ЖЕНЩИНЫ В МАТЕМАТИКЕ

25.12.2025

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Обычная производная

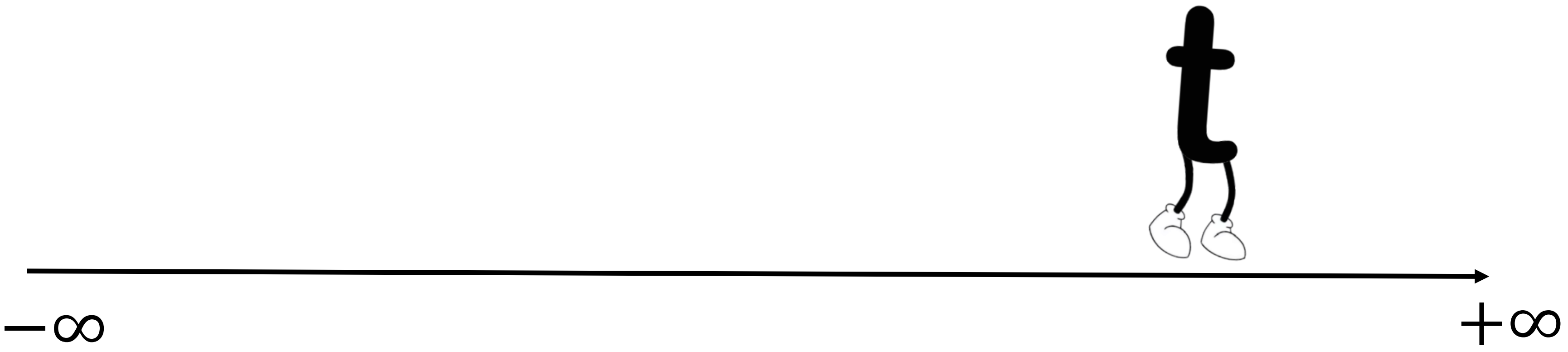
Я бегу со скоростью 10 км/ч

Дробная производная

Я бегу уже 2 часа, у меня болит колено, я хочу пить – с реальной скоростью 8 км/ч

УРАВНЕНИЕ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Дифференциальные уравнения, рассматриваемые на всей вещественной оси, моделируют достаточно продолжительные по времени процессы. В таком случае начальные условия перестают влиять на решение, и рассматривается уравнение без задания начальных условий. Решения моделей, не зависящих от начальных данных, называются промежуточными асимптотиками*.



*G. I. Barenblatt and Ya. B. Zeldovich, “Intermediate asymptotics in matematicalphysics”, Russian Mathematical Survey 26, 55–61 (1971).
Ya. B. Zeldovich and D. D. Sokolov, “Fractals, similarity, intermediate asymptotics”,Soviet Uspekhi 28, 608–616 (1985).

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ЛИУВИЛЛЯ

Для функции $z \in L_1(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ интегралом Лиувилля дробного порядка $\beta \in (0,1)$ называется

$$J^\beta z(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_{-\infty}^{t} (t-s)^{\beta-1} z(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\Gamma(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx, \quad J^0 z(t) := z(t).$$

Дробная производная Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$

$$D^\alpha z(t) := D^m J^{m-\alpha} z(t),$$

где D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$. Для $\beta \in (-1, 0]$ обозначим $D^\beta z(t) := J^{-\beta} z(t)$.

$$D^m z(t) = Az(t) + f(t)$$

$$A \in \mathscr{L}(Z)$$

$$D^m z(t) = Az(t) + f(t)$$

$$A \in \mathscr{Cl}(Z)$$

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t)$$

$$A \in \ A_\alpha^\pm$$

?

разрешимость

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

? исследование вопросов однозначной разрешимости

? нахождение условий на линейный замкнутый оператор

? применение полученных абстрактных результатов при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

МЕТОДЫ

Задача Коши → Преобразование Лапласа

Уравнение без начальных условий → Преобразование Фурье

ФОРМУЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Фурье

$$\mathcal{F}z(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} z(t)e^{i\omega t}dt$$

Фурье

$$\mathcal{F}^{-1}h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} h(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

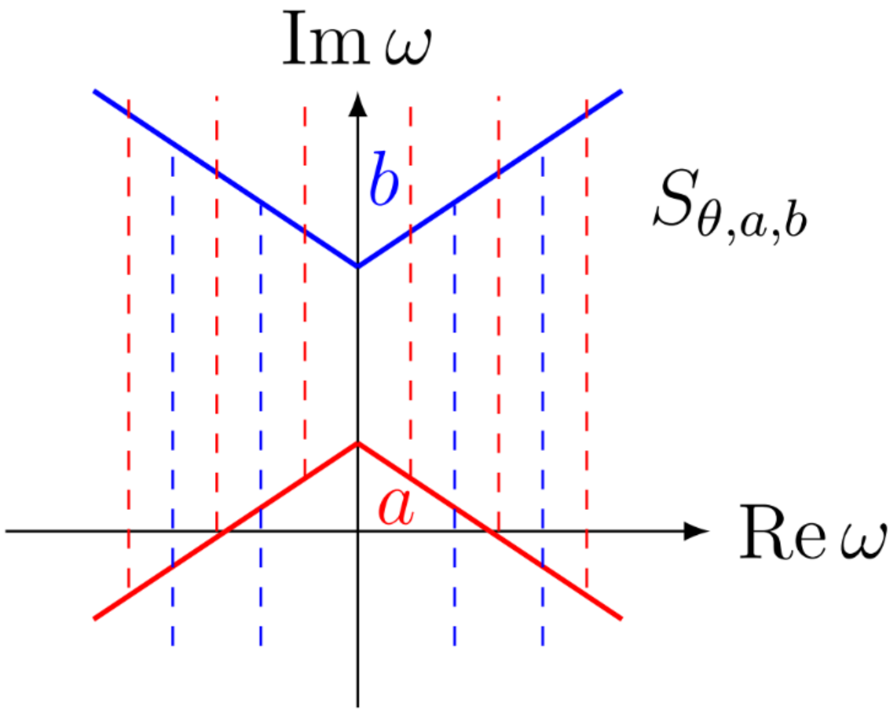
ФУРЬЕ ↔ ЛИУВИЛЛЬ

Формула преобразования Фурье дробного интеграла Лиувилля

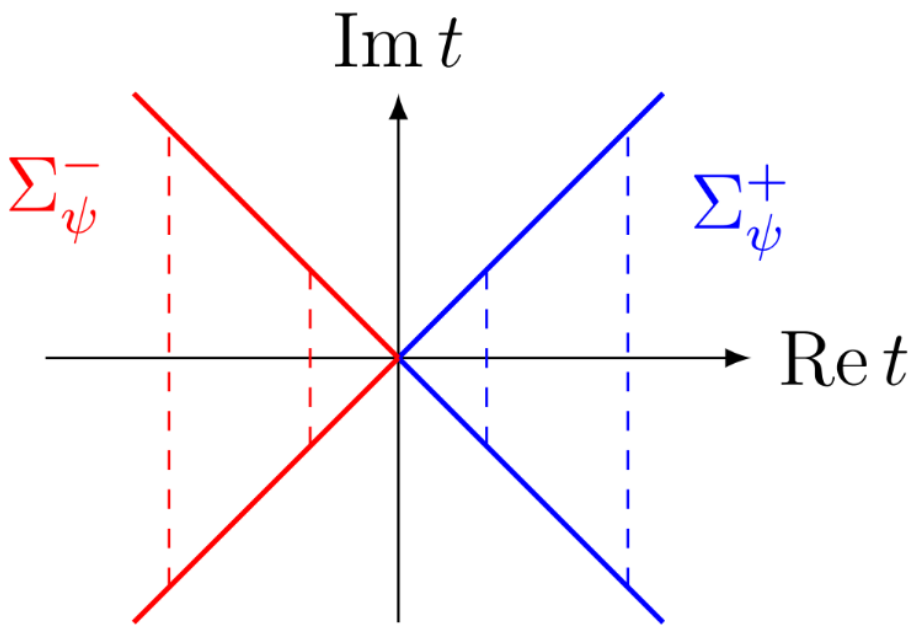
$$\mathcal{F}J^{\beta}h(\omega) = (-i\omega)^{-\beta}\mathcal{F}h(\omega)$$

и дробной производной Лиувилля

$$\mathcal{F}D^{\alpha}h(\omega) = (-i\omega)^{\alpha}\mathcal{F}h(\omega).$$



Сектор $S_{\theta,a,b}$



Сектор Σ_ψ

$a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ S_{\theta,a,b} := S^+_{\theta,a} \cap S^-_{\theta,b}$

$\Sigma_\psi := \Sigma^+_\psi \cup \Sigma^-_\psi$ при $\psi \in (0, \frac{\pi}{2}]$

ПОИСК РЕШЕНИЯ

Подействуем на левую и правую часть уравнения преобразованием Фурье

$$(-i\omega)^\alpha \mathcal{F}z(\omega) = A\mathcal{F}z(\omega) + \mathcal{F}f(\omega)$$

$$((-i\omega)^\alpha - A)\mathcal{F}z(\omega) = \mathcal{F}f(\omega)$$

$$\mathcal{F}z(\omega) = ((-i\omega)^\alpha - A)^{-1}\mathcal{F}f(\omega)$$

Далее подействуем обратным преобразованием Фурье

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}[((-i\omega)^\alpha - A)^{-1}\mathcal{F}f(\omega)](t)$$

Введем семейство операторов $Z_\alpha(t)$ и изучим его свойства

$$Z_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} ((-i\omega)^\alpha - A)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

СВОЙСТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Теорема

Пусть $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $a, b > 0$, $\beta \in [0, 1)$, $\mathcal{X}$ – *банахово пространство*, $H : (-ai, bi) \to \mathcal{X}$.
Следующие утверждения эквивалентны.

(i) *Существует аналитическая функция* $F : \Sigma_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}} \to \mathcal{X}$ $\forall \theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$ *и* $\exists C(\theta) > 0$,

$$\forall t \in \Sigma^{+}_{\theta - \frac{\pi}{2}} \text{ верно } \|F(t)\|_{\mathcal{X}} \le C(\theta)|t|^{-\beta} e^{-a \operatorname{Re} t} \text{ и}$$

$$\forall t \in \Sigma^{-}_{\theta - \frac{\pi}{2}} \text{ верно } \|F(t)\|_{\mathcal{X}} \le C(\theta)|t|^{-\beta} e^{b \operatorname{Re} t},$$

$\mathcal{F}F(\omega) = H(\omega)$ *при* $\omega \in (-ai, bi)$.

(ii) H *аналитически продолжается на* $S_{\theta_0, -a, b}$, $\forall \theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$ $\exists K(\theta) > 0$ $\forall \omega \in S_{\theta, -a, b}$

$$\|H(\omega)\|_{\mathcal{X}} \le \frac{K(\theta)}{|\omega + ai|^{1-\beta}} + \frac{K(\theta)}{|\omega - bi|^{1-\beta}}. \tag{2}$$

ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Лемма

Пусть $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $a_0, b_0 > 0$, $(-i\omega)^\alpha \in \rho(A)$ *для всех* $\omega \in S_{\theta_0,-a_0,b_0}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*
(i) *Для любых* $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $a, b > 0$, *таких, что* $-a_0 < a < b < b_0$, *существует такая константа* $K(\theta, a, b) > 0$, *что для всех* $\omega \in S_{\theta,a,b}$

$$\|((-i\omega)^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a,b)}{|\omega - ai|^\alpha} + \frac{K(\theta,a,b)}{|\omega - bi|^\alpha}.$$

(ii) *Для любых* $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $a, b > 0$, *таких, что* $-a_0 < a < b < b_0$, *существует такая константа* $c(\theta, a, b) > 0$, *что для всех* $\omega \in S_{\theta,a,b}$

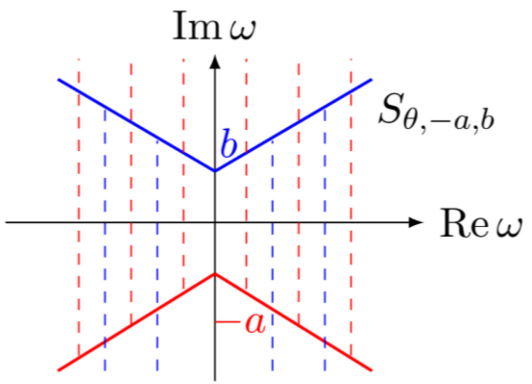
$$\|((-i\omega)^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{c(\theta,a,b)}{|\omega - 2b_0 i|^\alpha}.$$

БИСЕКТОРИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение

Будем говорить, что оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $\mathcal{A}^{\pm}_{\alpha}(\theta_0, a_0, b_0)$ при $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_0, b_0 > 0$, если выполнены следующие два условия:
(i) $\{(-i\omega)^{\alpha} : \omega \in S_{\theta_0, -a_0, b_0}\} \subset \rho(A)$;
(ii) для всех $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $a, b > 0$, таких, что $-a_0 < -a < 0 < b < b_0$, существует такая константа $c(\theta, a, b) > 0$, что для всех $\omega \in S_{\theta, -a, b}$ (рис. 1)

$$\|((-i\omega)^{\alpha} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{c(\theta, a, b)}{|\omega - 2b_0 i|^{\alpha}}.$$



Сектор $S_{\theta,-a,b}$

Свойства Z_α

Теорема

Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $(-i\omega)^\alpha\in\rho(A)$ *для всех* $\omega\in\mathbb{R}$. *Тогда* $A\in\mathcal{A}_\alpha^{\pm}(\theta_0,a_0,b_0)$ *при некоторых* $\theta_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $a_0,b_0>0$ *в том и только в том случае, когда семейство операторов* $\{Z_\alpha(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t\in\mathbb{R}\}$ *определено и допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\frac{\pi}{2}}$ *и при всех* $\theta\in(\frac{\pi}{2},\theta_0)$, $a,b>0$, *таких, что* $-a_0<-a<0<b<b_0$, *существует такая константа* $C(\theta,a,b)>0$, *что*

$$\begin{aligned}
&\forall t\in\Sigma^{+}_{\theta-\frac{\pi}{2}} \quad \|Z_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C(\theta,a,b)|t|^{\alpha-1}e^{-a\mathrm{Re}\,t},\\
&\forall t\in\Sigma^{-}_{\theta-\frac{\pi}{2}} \quad \|Z_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le C(\theta,a,b)|t|^{\alpha-1}e^{b\mathrm{Re}\,t}.
\end{aligned}\tag{4}$$

При этом $Z_\alpha\in C^{m-2}(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z}))\cap C^\infty(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; $D^kZ_\alpha\in L_1(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при* $k=0,1,\dots,m-1$; $J^{m-\alpha}Z_\alpha\in C^{m-2}(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z}))\cap C^\infty(\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $D^kJ^{m-\alpha}Z_\alpha\in L_1(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при* $k=0,1,\dots,m-1$; $\mathrm{im}Z_\alpha(t)\subset D_A$ *при* $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Уравнение на $\mathbb{R}$ с бисекториальным оператором

Однородное уравнение

Для $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$ рассмотрим линейное однородное уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где D^α — дробная производная Лиувилля порядка $\alpha > 0$.
Решением уравнения (5) называется такая функция $z \in L_1(\mathbb{R}; D_A) \cap C(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; D_A)$, что $D^\alpha z \in L_1(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ и для всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется равенство (5).

Теорема

Пусть $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $\alpha > 0$, $\mathrm{mes}\{\{(-i\omega)^\alpha : \omega \in \mathbb{R}\} \cap \sigma(A)\} = 0$. Тогда функция $z \equiv 0$ является единственным решением уравнения (5).

УРАВНЕНИЕ НА $\mathbb{R}$ С БИСЕКТОРИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Неоднородное уравнение

Теорема

Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha^{\pm}(\theta_0,a_0,b_0)$ *для некоторых* $\theta_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $a_0,b_0>0$, *функция* $f\in L_1(\mathbb{R};D_A)$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}$ *в норме* $\mathcal{Z}$. *Тогда функция*

$$z_f(t)=\int\limits_{\mathbb{R}} Z_\alpha(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением уравнения (6).

ОДИН КЛАСС КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $P_p(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} c_j \lambda^j$, $Q_q(\lambda) = \sum_{j=0}^{q} d_j \lambda^j$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, p \in \mathbb{N}_0$, $c_p \neq 0$, $d_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, q \in \mathbb{N}_0$, $d_q \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda v)(\xi) := \sum_{|\beta| \leq 2r} a_\beta(\xi) \frac{\partial^{|\beta|} v(\xi)}{\partial \xi_1^{\beta_1} \partial \xi_2^{\beta_2} \ldots \partial \xi_d^{\beta_d}}, \quad a_\beta \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l v)(\xi) := \sum_{|\beta| \leq r_l} b_{l\beta}(\xi) \frac{\partial^{|\beta|} v(\xi)}{\partial \xi_1^{\beta_1} \partial \xi_2^{\beta_2} \ldots \partial \xi_d^{\beta_d}}, \quad b_{l\beta} \in C^\infty(\partial\Omega), \, l = 1, 2, \ldots, r,$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_d$, $\Lambda, B_1, \ldots, B_r$ – регулярный эллиптический операторный пучок. Пусть $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ действует по правилу $\Lambda_1 v := \Lambda v$, $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) : B_l v(\xi) = 0, \, l = 1, 2, \ldots, r, \, \xi \in \partial\Omega\}$.

Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действителен, дискретен и конечнократен. Пусть $\sigma(\Lambda_1)$ не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом кратности.
Рассмотрим краевую задачу

$$B_l \Lambda^k u(\xi, t) = 0, \ k = 0, 1, \dots, \max\{p, q\} - 1, \ l = 1, 2, \dots, r, \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$D_t^\alpha P_p(\Lambda) u(\xi, t) = Q_q(\Lambda) u(\xi, t) + h(\xi, t), \ \ (\xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{8}$$

где D_t^α — дробная производная Лиувилля по переменной t порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Выберем пространства и операторы

$$\mathcal{X} = \{v \in H^{2rp}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, p-1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_p(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = Q_q(\Lambda) \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}),$$

$$D_M = \{v \in H^{2r\max\{p,q\}}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \max\{p, q\} - 1,$$
$$l = 1, 2, \dots, r,\ \xi \in \partial\Omega\}.$$

Пусть $P_p(\lambda_k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ и задача (7), (8) может быть сведена к уравнению (6), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, $D_A = D_M$, $f(t) = L^{-1}h(\cdot, t)$.

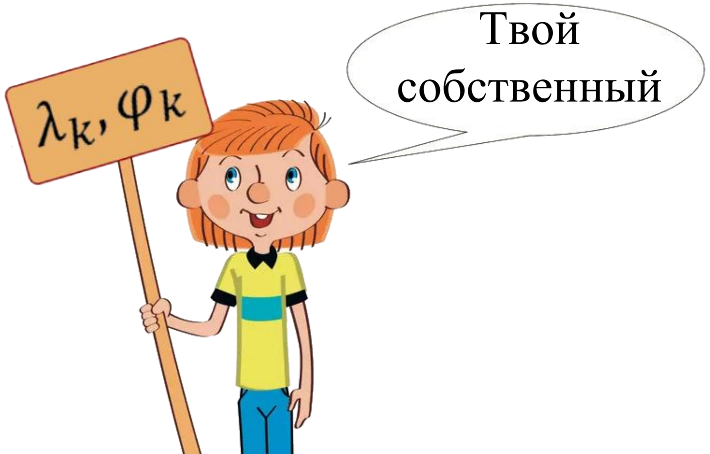
Лемма

Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $P_p(\lambda_k) \neq 0$, $Q_q(\lambda_k) \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $A \in \mathcal{A}^{\pm}_{\alpha}(\theta_0, b_0, b_0)$ *для некоторых* $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $b_0 > 0$.

Теорема

Пусть $\alpha \in (0,2)$, $P_p(\lambda_k) \neq 0$, $Q_q(\lambda_k) \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$, *функция* $L^{-1}h \in L_1(\mathbb{R}; D_M)$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}$ *в норме* $H^{2rp}(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8). *Оно имеет вид*

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\omega(t-s)}d\omega\langle h(\cdot,s),\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}ds}{(-i\omega)^{\alpha}P_p(\lambda_k) - Q_q(\lambda_k)}\varphi_k(\xi).$$



ПРИМЕР

Рассмотрим пример, возьмем $\alpha = 3/2$, $p = 0$, $P_0(\lambda) \equiv 1$, $q = 1$, $\nu > 0$, $Q_1(\lambda) = \nu\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $r = 1$, $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $B_1 = I$. Тогда $\lambda_k = -k^2$, $\varphi_k(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\xi$, $k \in \mathbb{N}$, и задача (7), (8) имеет вид

$$D_t^{3/2} u(\xi, t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ее единственное решение есть

$$u(\xi, t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega(t-s)} d\omega \langle h(\xi, s), \sin k\xi \rangle_{L_2(\Omega)} ds}{(-i\omega)^{3/2} + \nu k^2} \sin k\xi.$$

ДВУСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Пространство $C^l_{a,b}(\mathbb{R};\ Z)$ непрерывно дифференцируемых экспоненциально ограниченных функций

Двустороннее преобразование Лапласа

Решение уравнений с заданными параметрами

РЕЗУЛЬТАТЫ

- ✓ Получены необходимые и достаточные условия аналитичности функции на объединении двух секторов в терминах ее преобразования Фурье
- ✓ Введен класс бисекториальных операторов
- ✓ Исследована однозначная разрешимость дифференциального уравнения дробного порядка на прямой с бисекториальным оператором при искомой функции
- ✓ Полученные абстрактные результаты использованы для исследования однозначной разрешимости класса краевых задач для дифуравнений с многочленами от эллиптического дифоператора по пространственным переменным

Спасибо за внимание!