

Вопросы к экзамену по курсу
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
доцент Д.А.Троценко, 2 семестр 2003-2004 г.

1. Определения и канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. (*из 1 семестра*).
2. Эллипс, гипербола, парабола как конические сечения. (*из 1 семестра*).
3. Директориальные свойства эллипса, гиперболы, параболы. (*из 1 семестра*).
4. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат. (*из 1 семестра*).
5. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. (*из 1 семестра*).
6. Теорема о евклидовой классификации уравнений второго порядка на плоскости.
7. Комплексное и вещественное линейные пространства. Теоремы об однозначной определенности уравнения второго порядка множеством его решений.
8. Сопряженные преобразования. Собственные векторы. Вещественность собственных чисел у вещественной симметричной матрицы.
9. Ортогональность собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Ортонормированный базис из собственных векторов. Приведение квадратичной формы к диагональному виду.
10. Инварианты многочлена второго порядка. Инварианты кривой. Семиинварианты. Теорема Моденова о семиинварианте J .
11. Приведение уравнения второго порядка от двух переменных к каноническому виду с помощью инвариантов и семиинварианта.
12. Сопряженные направления. Сопряженные диаметры. Прямые асимптотического направления.
13. Центральные и нецентральные КВП.
14. Диаметры и касательные. Теорема о том, что диаметр, проходящий через точку, сопряжен направлению касательной в этой точке.
15. Уравнение касательной к КВП. Совпадение определений из курсов геометрии и анализа.
16. Каноническая система координат. Центральный и нецентральный случаи.
17. Законы Кеплера: тело движется в плоскости, по кривой второго порядка, заметая равные площади за равные промежутки времени.
18. Непрерывные деформации. Сохранение ориентации при деформации базиса. Обратное утверждение (доказательство при $n = 2, 3$). (*из 1 семестра*).
19. Деформация ортонормированных базисов (доказательство при $n = 2, 3$). (*из 1 семестра*).
20. Эквивалентность двух определений аффинных преобразований.

21. Метрическое пространство. Изометрии и движения евклидова пространства. Теорема о том, что любое собственное движение можно получить деформацией в классе движений.

22. Теорема о том, что изометрия евклидова пространства есть движение.

23. Описание классов поверхностей второго порядка.

24. Прямолинейные образующие.

25. Инварианты и семиинварианты многочленов второго порядка от трех переменных. Теоремы Моденова о семиинвариантах J_3 и J_2 .

26. Теорема о сохранении сигнатуры квадратичной формы при линейной замене переменных (доказательство - из курса алгебры). Применение теоремы к вопросам аффинной классификации многочленов второго порядка.

27. Приведение многочлена к каноническому виду по его инвариантам и семиинвариантам.

28. Касательные прямая и плоскость нераспадающейся ПВП. Примеры распадающихся ПВП, показывающие, что в этих случаях определение противоречит определению из курса анализа. Особые точки ПВП. Лемма о нахождении особых точек. Вырождающиеся поверхности.

29. Асимптотические направления. Теорема о прямых асимптотического направления.

30. Прямолинейные образующие и касательная плоскость.

31. Центральные и нецентральные поверхности.

32. Евклидова и аффинная классификация гиперповерхностей второго порядка. Цилиндры и бицилиндры.

33. Определения различных типов гиперповерхностей. Касательная гиперплоскость, диаметральная гиперплоскость.

34. Формула количества аффинно не эквивалентных гиперповерхностей второго порядка в n -мерном пространстве.

35. Кривая как класс эквивалентных путей. Снежинка и кривая Пеано.

36. Определение кривой по Кантору-Урысону. Треугольник Серпинского.

37. Длина кривой. Альфа-мера и Хаусдорфова размерность множества. Теорема о том, что Хаусдорфова размерность множества не меньше его топологической размерности. Доказательство для случая кривых на плоскости.

Программа-минимум. Обязательные знания (без подготовки).

1. Различные способы задания прямых и плоскостей в аффинном пространстве. Теорема Кронекера - Капелли. *(из 1 семестра)*.

2. Скалярное произведение. Вычисление в произвольной системе координат. Ортогональность. *(из 1 семестра)*.

3. Определение евклидова пространства. Декартова прямоугольная система координат. *(из 1 семестра)*.

4. Ориентация. Отношение эквивалентности на множестве базисов. Ориентированное линейное пространство. *(из 1 семестра)*.

5. Определение метрического пространства. Введение метрики в аффинном пространстве. Угол. *(из 1 семестра)*.
6. Определение аффинного преобразования, изометрии, движения, собственного движения.
7. Определения и канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. *(из 1 семестра)*.
8. Эллипс, гипербола, парабола как конические сечения. *(из 1 семестра)*.
9. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. *(из 1 семестра)*.
10. Директориальные свойства эллипса, гиперболы, параболы. *(из 1 семестра)*.
11. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат. *(из 1 семестра)*.
12. Евклидова и аффинная классификация КВП и ПВП. Уметь объяснить: что классифицируем (кривые, уравнения), в каком пространстве (вещественном, комплексном), относительно какой группы преобразований (евклидовых, аффинных).
13. Инварианты и семиинварианты. Формулировки теорем Моденова. Нахождение канонических уравнений кривых и поверхностей по инвариантам, корням характеристического многочлена и семиинвариантам.
14. Схемы поиска канонических систем координат различных КВП и ПВП.
15. Прямолинейные образующие ПВП. Свойства прямолинейных образующих различных типов ПВП.