

Метод подвижного репера Картана. Теорема Пуанкаре.

Рассмотрим гладкую ориентированную регулярную поверхность Σ с первой квадратичной формой ds^2 . Предположим, что на поверхности (локально) задана пара касательных векторных полей V_1, V_2 , образующих в каждой точке ортонормированный положительно ориентированный базис касательной плоскости. Введем в рассмотрение двойственный базис, состоящий из 1-форм e^1 и e^2 таких, что

$$e^i(V_j) = \delta_j^i.$$

Ясно, что $ds^2 = (e^1)^2 + (e^2)^2$, и 2-форма $e^1 \wedge e^2$ является формой площади поверхности Σ .

Положим

$$de^1 = \alpha_1 \cdot e^1 \wedge e^2, \quad de^2 = \alpha_2 \cdot e^1 \wedge e^2,$$

для подходящих функций α_1 и α_2 . Дифференциальная 1-форма $\omega = -\alpha_1 e^1 - \alpha_2 e^2$ называется *формой связности* метрики ds^2 относительно репера $\{V_1, V_2\}$.

Лемма 1. *Форма связности ω однозначно определяется следующей парой уравнений:*

$$\begin{aligned} de^1 &= -\omega \wedge e^2, \\ de^2 &= \omega \wedge e^1. \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство очевидно.

Пусть теперь в некоторой области задано еще одно поле реперов $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ с соответствующими 1-формами $\tilde{e}^1$ и $\tilde{e}^2$. Понятно, что поле $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ задается однозначно углом ϕ , отсчитываемым от вектора V_1 к вектору $\tilde{V}_1$, и наделенным знаком в зависимости от ориентации поверхности. Вторая пара реперов определяет форму связности $\tilde{\omega}$ той же метрики. Как связаны формы ω и $\tilde{\omega}$?

Лемма 2. *Форма связности пересчитывается при изменении репера следующим образом:*

$$\tilde{\omega} = \omega - d\phi,$$

где ϕ — угол, на который поворачивается репер.

Доказательство. По условию,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= \cos \phi \cdot V_1 + \sin \phi \cdot V_2, \\ \tilde{V}_2 &= -\sin \phi \cdot V_1 + \cos \phi \cdot V_2. \end{aligned}$$

Переходя к двойственному базису, находим:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^1 &= \cos \phi \cdot e^1 + \sin \phi \cdot e^2, \\ \tilde{e}^2 &= -\sin \phi \cdot e^1 + \cos \phi \cdot e^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\tilde{e}^1 &= -\sin \phi \cdot d\phi \wedge e^1 + \cos \phi \cdot de^1 + \cos \phi \cdot d\phi \wedge e^2 + \sin \phi \cdot de^2 = \\ &= -\sin \phi \cdot d\phi \wedge e^1 - \cos \phi \cdot \omega \wedge e^2 + \cos \phi \cdot d\phi \wedge e^2 + \sin \phi \cdot \omega \wedge e^1 = \\ &= (-\omega + d\phi) \wedge (-\sin \phi \cdot e^1 + \cos \phi \cdot e^2) = -(\omega - d\phi) \wedge \tilde{e}^2. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично находим

$$d\tilde{e}^2 = (\omega - d\phi) \wedge \tilde{e}^1.$$

Тогда из леммы 1 следует, что $\tilde{\omega} = \omega - d\phi$. $\square$

Лемма 2 показывает, что дифференциальная 2-форма $\Omega = d\omega$ не зависит от выбора репера $\{V_1, V_2\}$ и определяется лишь внутренней геометрией поверхности. Форму $\Omega = d\omega$ называют *формой кривизны*.

Теорема 1. *Форма кривизны Ω удовлетворяет уравнению:*

$$\Omega = d\omega = K \cdot e^1 \wedge e^2, \quad (2)$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

Уравнения (1), (2) называются *структурными уравнениями Картана*.

Доказательство. Выберем в окрестности некоторой точки полугеодезические координаты x, y . Таким образом, $ds^2 = dx^2 + G \cdot dy^2$, где $G = G(x, y) > 0$ — некоторая функция. Мы знаем, что в полугеодезических координатах гауссова кривизна выражается формулой

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{xx}.$$

В силу леммы 2, форма Ω не зависит от выбора поля реперов, поэтому достаточно доказать формулу (2) для любого удобного нам репера. Положим $e^1 = dx, e^2 = \sqrt{G} \cdot dy$. Тогда $de^1 = 0, de^2 = (\sqrt{G})_x \cdot dx \wedge dy = \frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_x \cdot e^1 \wedge e^2$, следовательно

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_x \cdot e^2.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \Omega = d\omega &= -\left(\frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{G}}\right)_x \cdot e^1 \wedge e^2 - \frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_x \cdot de^2 = \\ &= -\left(\left(\frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{G}}\right)_x + \frac{(\sqrt{G})_x^2}{G}\right) \cdot e^1 \wedge e^2 = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{xx} \cdot e^1 \wedge e^2 = K \cdot e^1 \wedge e^2 \square \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь замкнутую ориентированную поверхность Σ с глобально определенным гладким касательным векторным полем V . В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что поле V имеет конечное число

нулей векторного поля V . Пусть $p \in \Sigma$, $U \subset \Sigma$ — открытая область, гомеоморфная кругу, содержащая точку p и не содержащая нулей поля V (кроме, может быть, самой точки p). Рассмотрим замкнутую кривую $\gamma(t)$ обходящую границу области U в направлении, согласованном с ориентацией поверхности Σ . Следовательно, в каждой точке $\gamma(t)$ определен угол (с учетом знака) от вектора $\frac{\gamma(t)}{dt}$ до вектора $V(\gamma(t))$, обозначим его через $\alpha(t)$. Определим *индекс* поля V в точке p как целое число

$$\text{ind}_p V = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\alpha.$$

Лемма 3. *Данное выше определение индекса векторного поля не зависит от выбора кривой γ . Если $V(p) \neq 0$, то $\text{ind}_p V = 0$.*

Доказательство. Ясно, что если выбрать другую область U' и другую кривую γ' , то кривые γ' и γ гомотопны, т.е. существует непрерывное семейство $\gamma_u(t)$, $0 \leq u \leq 1$ замкнутых кривых, ограничивающих области U_u , причем $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ и $\gamma_1(t) = \gamma'(t)$. По своему определению $\text{ind}_p V$ целое число, непрерывно зависящее от u , значит это — константа. В частности, индексы, подсчитанные по кривым γ и γ' совпадают.

Поскольку $V(p) \neq 0$, можно рассмотреть локальную систему (x, y) координат в некоторой окрестности p такую, что векторное поле V касательно к координатным линиям $y = \text{const}$. В качестве кривой γ можно рассмотреть окружность малого радиуса $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. Очевидно, что интеграл в определении индекса равен -1 , откуда $\text{ind}_p V = 0$. $\square$

Замечание. Нетрудно увидеть, что если выбрать локальную систему координат в окрестности точки p и перенести на координатную плоскость замкнутую кривую γ и поле V , то индекс равен числу оборотов вектора V (с учетом ориентации) при обходе по кривой γ в правильном направлении.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат этой лекции.

Теорема 2 (Пуанкаре). *Пусть V — гладкое векторное поле с конечным числом нулей p_i , $i = 1, \dots, n$ на замкнутой ориентированной поверхности Σ . Тогда*

$$\sum_{i=1}^n \text{ind}_{p_i} V = \chi(\Sigma).$$

Доказательство. Окружим каждую точку p_i замкнутой петлей γ_i , ограничивающей открытую окрестность U_i так, чтобы внутри каждой окрестности U_i не содержалось других нулей поля V кроме p_i , и каждая область U_i покрывалась одной полугеодезической системой координат (x_i, y_i) . Пусть $\tilde{\Sigma}$ — поверхность с краем, полученная из Σ вырезанием областей U_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда векторное поле V на $\tilde{\Sigma}$ не имеет нулей, и мы можем положить

$$V_1 = \frac{V}{|V|}.$$

Далее, повернув в каждой точке вектор поля V_1 на угол $\pi/2$ в положительном направлении мы получим поле V_2 . Таким образом, на $\tilde{\Sigma}$ определено поле реперов. Пусть ω и Ω — соответствующие формы связности и кривизны.

В окрестности каждой точки p_i рассмотрим ортонормированное поле реперов V'_1, V'_2 , направленных, соответственно по координатным осям x_i, y_i . Поле реперов V'_1, V'_2 определяет в окрестности точки p_i форму связности ω'_i . Пусть α_i — угол от $\frac{d\gamma_i}{dt}$ до V_1 , α'_i — угол от $\frac{d\gamma_i}{dt}$ до V'_1 , ϕ_i — угол от вектора V_1 к V'_1 . Ясно, что $\alpha'_i = \alpha_i + \phi_i$. Поскольку поле V'_1 не имеет нулей в окрестности точки p_i , то из лемм 2 и 3 следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\gamma_i} d\alpha_i - \int_{\gamma_i} d\alpha'_i \right) = \text{ind}_{p_i} V_1 - \text{ind}_{p_i} V'_1 = \text{ind}_{p_i} V_1 = \text{ind}_{p_i} V.$$

Используя теорему Гаусса-Бонне, теорему 1 и формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(\Sigma) &= \int_{\Sigma} K d\sigma = \int_{\tilde{\Sigma}} K d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{U_i} K d\sigma = \int_{\tilde{\Sigma}} \Omega + \sum_{i=1}^n \int_{U_i} K d\sigma = \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{U_i} K d\sigma = - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega + \sum_{i=1}^n \int_{U_i} K d\sigma = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega'_i - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\phi_i + \sum_{i=1}^n \int_{U_i} K d\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} (-d\omega'_i + K d\sigma) - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\phi_i = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\phi_i = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\alpha_i - \int_{\gamma} d\alpha'_i = 2\pi \sum_{i=1}^n \text{ind}_{p_i} V. \square \end{aligned}$$

Следствие. *Не существует ненулевого гладкого векторного поля на поверхности, гомеоморфной сфере.*

Последнее утверждение отвечает на вопрос «можно ли причесать ежика?».