

# Дифференциальная геометрия

## Программа курса

### Глава 1. Кривые на плоскости и в пространстве

Параметризованная кривая. Регулярные и особые точки. Касательная. Замена параметра. Длина кривой. Естественная параметризация.

Плоские кривые. Репер Френе, уравнения Френе, кривизна плоской кривой. Кривизна как скорость вращения касательной. Натуральное уравнение плоской кривой. Теорема о существовании и единственности плоской кривой с заданным натуральным уравнением. Выражение кривизны в координатах. Плоская кривая, заданная неявным уравнением.

Регулярная кривая в трехмерном пространстве. Единичный вектор главной нормали. Бирегулярные точки. Соприкасающаяся плоскость. Репер Френе, уравнения Френе. Кривизна и кручение пространственной кривой. Натуральные уравнения пространственной кривой. Теорема о существовании и единственности пространственной кривой с заданными натуральными уравнениями. Выражение кривизны и кручения в координатах.

### Глава 2. Основы теории поверхностей

Параметризованная поверхность. Регулярные и особые точки. Касательная плоскость. Касательное пространство.

Первая квадратичная форма поверхности. Выражение коэффициентов первой квадратичной формы в координатах. Выражение скалярного произведения касательных векторов и угла между касательными векторами в терминах первой квадратичной формы. Длина кривой, лежащей на поверхности, в терминах первой квадратичной формы. Площадь области на поверхности в терминах первой квадратичной формы. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности. Выражение коэффициентов второй квадратичной формы в координатах. Кривизна кривой, лежащей на поверхности, теорема Менье. Нормальная кривизна поверхности в данной точке и в данном направлении. Оператор Вейнгартена. Главные направления и главные кривизны. Теорема Родрига. Нахождение главных направлений и главных кривизн в терминах первой и второй квадратичных форм. Гауссова и средняя кривизна поверхности, выражение через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Формула Эйлера. Соприкасающийся параболоид, классификация точек поверхности.

Параметризация поверхности интегральными линиями пары дифференциальных уравнений первого порядка, линейных и однородных относительно дифференциалов координат. Параметризация поверхности интегральными линиями дифференциального уравнения первого порядка, квадратичного относительно дифференциалов координат.

Асимптотические направления. Сопряженные направления. Асимптотические линии. Дифференциальные уравнения асимптотических линий. Параметризация поверхности посредством асимптотических линий. Линии кривизны. Дифференциальные уравнения линий кривизны. Параметризация поверхности посредством линий кривизны. Теорема Йохомсталя.

Тензорные обозначения в теории поверхностей. Правило суммирования Эйнштейна. Первая и вторая квадратичные формы поверхности в тензорных обозначениях.

Деривационные формулы. Выражение коэффициентов деривационных формул через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Символы Кристоффеля, их выражение через коэффициенты первой квадратичной формы.

Теорема Гаусса.

Теорема Бонне о существовании и единственности поверхности с данными первой и второй квадратичными формами. Уравнения Петерсона – Кодацци.

### Глава 3. Внутренняя геометрия поверхностей

Касательное векторное поле вдоль кривой, лежащей на поверхности. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой. Касательное векторное поле на поверхности. Ковариантная производная одного векторного поля по направлению другого векторного поля. Свойства ковариантной производной. Производная скалярного произведения. Параллельный перенос вдоль кривой.

Геодезические, их внутренне-геометрическая природа. Пропорциональность параметра геодезической длине дуги. Внешне-геометрическая характеристика геодезических: коллинеарность главной нормали и нормали поверхности. Начальная задача для уравнений геодезических; существование и единственность геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении. Геодезические на плоскости, круглом цилиндре, сфере.

Экспоненциальное отображение, его локальная инъективность. Краевая задача для геодезических, существование и единственность короткой геодезической между близкими точками.

Экспоненциальное отображение в полярных координатах. Лемма Гаусса.

Кусочно-гладкие кривые, расстояние между точками поверхности. Кратчайшие. Связь геодезических и кратчайших.

Геодезическая кривизна кривой, лежащей на поверхности, ее внутренне-геометрическая природа. Внешне-геометрическое определение геодезической кривизны. Выражение геодезической кривизны в координатах.

Обнесение касательного вектора по замкнутому контуру. Теорема Гаусса – Бонне. Дефект геодезического треугольника. Поверхности постоянной отрицательной кривизны, псевдосфера. Понятие о геометрии Лобачевского.

Риманова метрика на области евклидова пространства. Обобщение основных понятий и фактов внутренней геометрии поверхностей на случай области с римановой метрикой. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. М: Наука, 1969.
- [2] И.А. Тайманов. Лекции по дифференциальной геометрии. М.-Ижевск: R&C Dynamics, 2006.
- [3] А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев, А.Т. Фоменко. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М: ФМ, 2001.

Май 2012 г.

Профессор Владимир Альтафович Шарафутдинов