Задачи

к экзамену по дифференциальной геометрии

Для студентов, не получивших (неофициальный) зачет по результатам работы в течение семестра, экзамен начнется с решения одной из задач (по выбору экзаменатора) из приведенного ниже списка. Лишь после успешного решения задачи такой студент получит билет и приступит к экзамену на общих основаниях.

I. Плоские кривые

1. Циклоида

1.1. По оси Ox без скольжения катится окружность радиуса R. Составить параметрические уравнения линии, описываемой точкой M катящейся окружности, которая в начальный момент времени находится в начале координат, принимая за параметр t угол от радиуса CM окружности до радиуса CA, идущего в точку касания A (циклоида). Нарисовать ее.

1.2. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде в произвольной ее точке. Показать, что касательная проходит через высшую точку производящей окружности, а нормаль – через низшую точку.

1.3. Найти особые точки циклоиды и написать уравнения касательных в них.

1.4. Найти длину одной арки циклоиды.

1.5. Найти кривизну циклоиды.

1.6. Доказать, что отрезок, соединяющий произвольную точку циклоиды с центром кривизны, соответствующим этой точке, делится базой циклоиды пополам.

1.7. Доказать, что циклоида является изохронной линией. Это означает, что если арку циклоиды расположить в вертикальной плоскости вершиной A вниз, то время, затрачиваемое материальной точкой на передвижение по циклоиде под действием силы тяжести из некоторого начального положения до вершины A, не зависит от начального положения точки.

2. Найти кривизну кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

3. Вывести формулу для кривизны плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$.

4. Составить параметрические уравнения плоской кривой, имеющей натуральное уравнение $k = 1/(as + b)$. Здесь k – кривизна, s – длина дуги, a, b - положительные параметры. Нарисовать эту кривую.

II. Кривые в пространстве

1. Для кривой $\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$ составить уравнения касательной, соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали в точке $t = 1$.

2. Найти длину отрезка кривой $x = a\cosh t,\ y = a\sinh t,\ z = at$ между точками 0 и t.

3. Найти кривизну и кручение в произвольной точке кривой из предыдущей задачи.

4. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну и ту же точку и *кривизна кривой в каждой точке отлична от нуля*, то кривая плоская. Останется ли верным это утверждение, если из него выбросить выделенные слова?

5. Доказать, что если кривая обладает одним из следующих четырех свойств:

(а) касательные кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

(б) бинормали кривой образуют постоянный угол с некоторым направлением,

(в) главные нормали кривой параллельны некоторой плоскости,

(г) отношение кривизны к кручению кривой постоянны,

то она обладает и остальными тремя свойствами. Такие кривые называются *обобщенными винтовыми линиями* или *линиями откоса.*

6. Доказать, что кривая

$$x = a\int \sin\alpha(t)\,dt, \quad y = a\int \cos\alpha(t)\,dt, \quad z = bt$$

является обобщенной винтовой линией.

7. *Подерой* пространственной кривой по отношению к точке O называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к данной кривой.

7.1 Найти уравнение подеры кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

7.2 Найти подеру винтовой линии $\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ относительно начала координат. Доказать, что она лежит на однополостном гиперболоиде

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - b^2z^2/a^4 = 1.$$

III. Первая квадратичная форма поверхности

1. Геликоид

1.1. Прямая l движется так, что (а) l все время пересекает ось Oz под прямым углом; (б) точка пересечения l с осью Oz равномерно движется со скоростью a; (в) l равномерно вращается около оси Oz с угловой скоростью 1; (г) в начальный момент времени l совпадает с осью Ox. Составить параметрические уравнения поверхности, которую описывает l (геликоид), в координатах (u, v), где v — время, u — расстояние (со знаком) до оси Oz. Нарисовать эту поверхность.

1.2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к геликоиду. Исследовать поведение нормали при смещении ее вдоль координатных линий.

1.3. Найти первую квадратичную форму геликоида.

1.4. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm\frac{1}{2}av^2,\ v = 1$ на геликоиде.

1.5. Найти площадь четырехугольника на геликоиде, ограниченного линиями $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$.

2. Поверхности вращения

2.1. В плоскости Oxz задана линия $x = f(u),\ z = \varphi(u)$. Написать параметрические уравнения поверхности, полученной при вращении этой линии вокруг оси Oz.

2.2. Показать, что нормаль к поверхности вращения совпадает с главной нормалью меридиана и пересекает ось вращения. Доказать обратное утверждение: если все нормали некоторой поверхности пересекают одну и ту же прямую, то поверхность является поверхностью вращения.

2.3. Найти первую квадратичную форму поверхности вращения

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = \varphi(u).$$

2.4. Показать, что при соответствующем выборе координат на поверхности вращения ее первая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2.$$

2.5. Найти уравнение локсодром на поверхности вращения, т.е. линий, пересекающих меридианы под постоянным углом α. Указание: использовать систему координат из предыдущей задачи.

IV. Вторая квадратичная форма поверхности

1. Поверхности вращения

1.1. Найти вторую квадратичную форму поверхности вращения

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = \varphi(u).$$

1.2. Показать, что один из главных радиусов кривизны поверхности вращения равен отрезку нормали, заключенному между поверхностью и осью вращения (главные радиусы кривизны — обратные величины к главным кривизнам).

1.3. Найти гауссову кривизну поверхности вращения.

1.4. Доказать, что точка поверхности вращения является омбилической тогда и только тогда, когда соответствующий этой точке центр кривизны меридиана лежит на оси вращения.

2. Псевдосфера

2.1. Кривая в плоскости Oxz, заданная параметрическими уравнениями

$$x = a\sin u, \quad z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u) \quad (0 < u < \pi/2)$$

(a — положительный параметр), называется трактрисой. Доказать, что эта кривая характеризуется следующим свойством: длина отрезка касательной, заключенного между точкой касания и осью Oz, постоянна. Нарисовать эту кривую.

2.2. Псевдосферой называется поверхность, полученная вращением трактрисы вокруг оси Oz. Написать параметрические уравнения псевдосферы и нарисовать ее. Найти ее первую и вторую квадратичные формы.

2.3. Найти гауссову кривизну псевдосферы.

V. Главные, асимптотические и сопряженные направления. Линии кривизны и асимптотические линии

1. Составить дифференциальное уравнение асимптотических линий на поверхности вращения

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = \varphi(u)$$

.

2. Найти линии кривизны поверхности вращения.

3. Исследовать асимптотические линии на торе

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \quad y = (a + b\cos u)\sin v, \quad z = b\sin u.$$

4. Поверхность, состоящая из омбилических точек

4.1. Доказать теорему Йохомсталя: Если две поверхности пересекаются вдоль некоторой кривой под постоянным углом и если эта кривая является линией кривизны на одной из поверхностей, то она будет линией кривизны и на другой.

4.2. Доказать обратную теорему: Если линия пересечения двух поверхностей является линией кривизны для обеих поверхностей, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

4.3. Если плоскость или сфера пересекает какую-либо поверхность под постоянным углом, то линия пересечения является линией кривизны. Доказать (Указание: любая линия на плоскости или сфере является линией кривизны).

4.4. Если поверхность состоит целиком из омбилических точек, то она является сферой или частью сферы. Доказать. Указание: Скажем, что плоскость является нормальным сечением поверхности в точке A, если эта плоскость содержит нормаль к поверхности в точке A. Сначала доказать следующее утверждение для поверхности S, состоящей из омбилических точек: Если плоскость P является нормальным сечением поверхности S в одной точке, то она является нормальным сечением и в остальных точках кривой $S \cap P$. Отсюда вывести, что все нормали к S пересекаются в одной точке.

VI. Геодезические

1. Найти геодезическую кривизну винтовых линий $u = \mathrm{const}$ на геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

.

2. Найти геодезические линии геликоида.

3. Доказать, что всякая прямая на поверхности является геодезической.

4. Доказать, что на поверхности вращения вдоль любой геодезической выполняется соотношение

$$r \cos \varphi = c,$$

где r – расстояние от точки геодезической до оси вращения, φ — угол между геодезической и параллелью, c — постоянное для данной геодезической число (теорема Клеро).

5. С помощью теоремы Клеро исследовать поведение геодезических на торе

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u \qquad (0 < b < a).$$

6. Доказать, что на псевдосфере

$$x = a \sin \tilde{u} \cos \tilde{v}, \quad y = a \sin \tilde{u} \sin \tilde{v}, \quad z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{\tilde{u}}{2} + \cos \tilde{u})$$

можно так выбрать координаты, что первая квадратичная форма примет вид

$$I = \frac{a^2(du^2 + dv^2)}{v^2}.$$

7. Найти геодезические линии псевдосферы. Использовать координаты из предыдущей задачи.

8. Доказать, что геодезическая является линией кривизны тогда и только тогда, когда она плоская.

9. Доказать, что геодезическая является асимптотической линией тогда и только тогда, когда она прямая.

VII. Полугеодезические координаты

1. Система координат на поверхности называется полугеодезической, если одно семейство координатных линий состоит из геодезических, а второе – из их ортогональных траекторий, причем одна из координат совпадает с длиной координатных линий первого семейства. Доказать, что система координат является полугеодезической тогда и только тогда, когда первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

2. Доказать, что на любой поверхности в окрестности любой точки можно ввести полугеодезическую систему координат.

3. Найти символы Кристоффеля в полугеодезической системе координат.

4. Найти гауссову кривизну в полугеодезической системе координат.

5. Найти первую квадратичную форму поверхности постоянной гауссовой кривизны в полугеодезической системе координат.

VIII. Минимальные поверхности

1. Если координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны, то формулы Петерсона — Кодацци принимают вид

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u,$$

где H — средняя кривизна. Доказать.

2. Поверхность с нулевой средней кривизной называется минимальной. Если на минимальной поверхности за координатные линии принять линии кривизны и соответствующим образом выбрать параметры u и v, то первая и вторая квадратичные формы примут вид

$$I = \lambda(du^2 + dv^2), \quad II = du^2 - dv^2.$$

Доказать.

3. Пусть на минимальной поверхности выбраны координаты, как в предыдущей задаче. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — уравнение поверхности, то $\Delta\mathbf{r} = 0$, где Δ — лапласиан. Таким образом, координаты вектора $\mathbf{r}(u, v)$ являются гармоническими функциями.

Май 2012 г.

Профессор В.А. Шарафутдинов