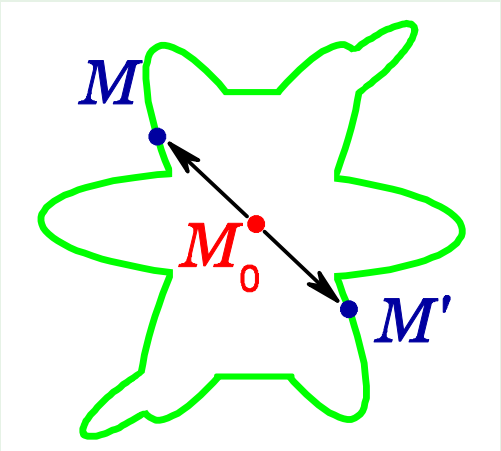
Центр кривой второго порядка

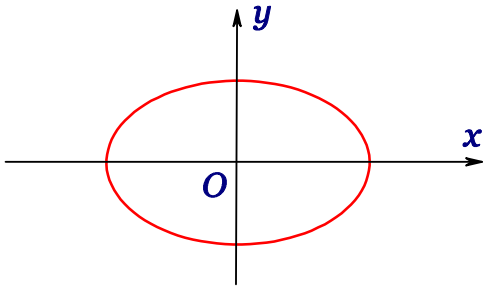
Определение

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется центром симметрии множества точек $\{M\}$ (например, линии), если вместе с каждой точкой M множеству $\{M\}$ принадлежит точка M' : $\overrightarrow{M_0M} = -\overrightarrow{M_0M'}$.

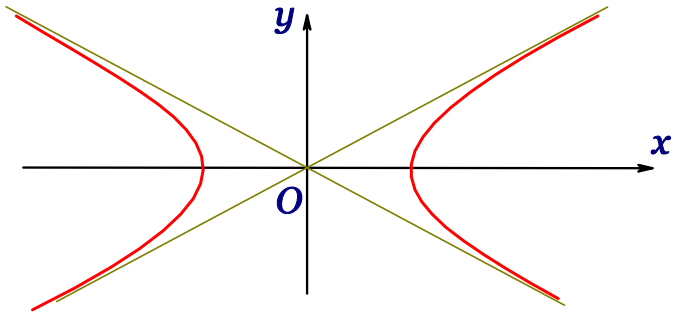


Кривые второго порядка, имеющие единственный центр

I. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



II. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

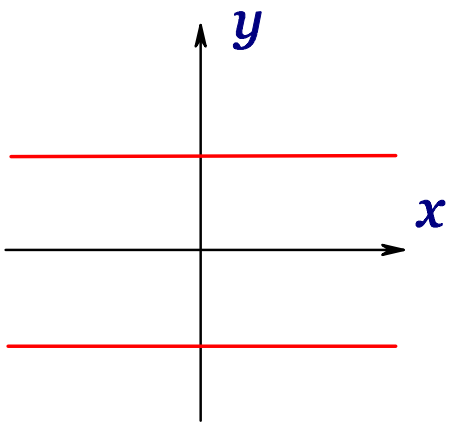


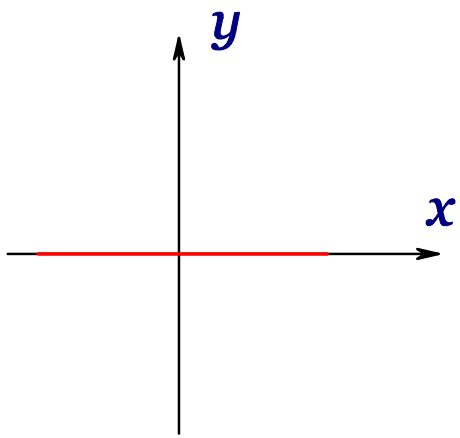
IV. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — Пара пересекающихся прямых

VII. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — Пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке

VIII. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ — Мнимый эллипс

Кривые второго порядка, имеющие много центров





V. $y^2 = b^2$ **Пара параллельных прямых**

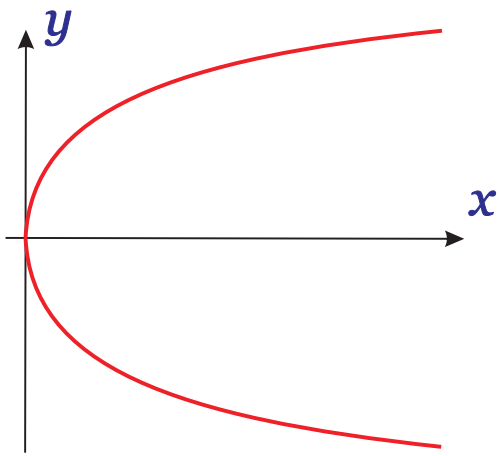
VI. $y^2 = 0$ **Пара совпадающих прямых**

IX. $y^2 + b^2 = 0$ **Пара мнимых параллельных прямых**

Если у кривой второго порядка центров много,
то они составляют прямую линию.

Единственная кривая второго порядка, не имеющая центра симметрии — парабола

III. Парабола $y^2 = 2px$



Уравнение кривой второго порядка в общем виде

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Мы считаем, что коэффициенты полинома $F(x,y)$ — вещественные числа (и по крайней мере одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} не равно нулю).

Будем использовать матричную форму записи уравнения кривой

$$F(x,y) \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0.$$

Обозначим $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, тогда

$$F(x,y) \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\mathbf{b}^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0.$$

Справедливо

Утверждение

Точка $M_0(x_0, y_0)$ является центром симметрии линии, задаваемой уравнением

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0; \qquad (1)$$

$$F(x,y) \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathrm{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\mathrm{b}^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0 \qquad (1)$$

$\Longleftrightarrow$ её координаты (x_0, y_0) удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}; \qquad \mathrm{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \mathrm{b} = 0\,. \qquad (2)$$

Система (2) имеет единственное решение $\Longleftrightarrow$ $\delta = \det \mathrm{A} \neq 0$.

Определение

Кривая (1) называется центральной, если она имеет единственный центр симметрии.

Утверждение

Кривая (1) является центральной $\iff$ $\delta = \det \mathbf{A} \neq 0$.

Определение

Кривая (1) называется нецентральной, если она не имеет центра симметрии или имеет их бесконечно много.

Утверждение

Кривая (1) является нецентральной $\iff$ $\delta = \det \mathbf{A} = 0$.

При $\delta = 0$ возможны две ситуации:

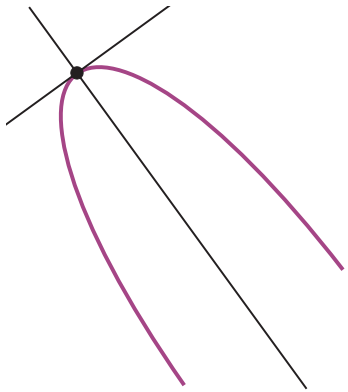
$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \mathbf{b} = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

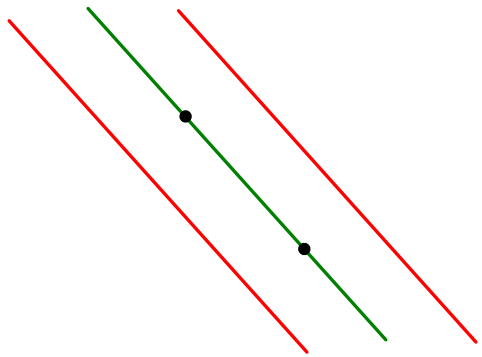
1. Система (2) не имеет решения, соответственно, кривая (1) не имеет центра симметрии.

   Это происходит только в случае параболы.

2. Система (2) имеет бесконечно много решений, эти решения составляют прямую линию, все точки которой являются центрами симметрии кривой (1).

   (Пары параллельных и совпадающих прямых).





Собственные векторы и собственные числа матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \neq 0$$

$\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{q}$

$\mathbf{q}$ — собственный вектор, λ — собственное число матрицы $\mathbf{A}$.

Собственные числа являются корнями характеристического полинома:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Пусть матрица $\mathbf{A}$ вещественная и симметричная: $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$, тогда

- все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ — вещественные числа
- $\mathbf{Aq_j} = \lambda_j\mathbf{q_j}, \quad \mathbf{Aq_k} = \lambda_k\mathbf{q_k}; \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{q_j} \perp \mathbf{q_k}$

Процедура приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

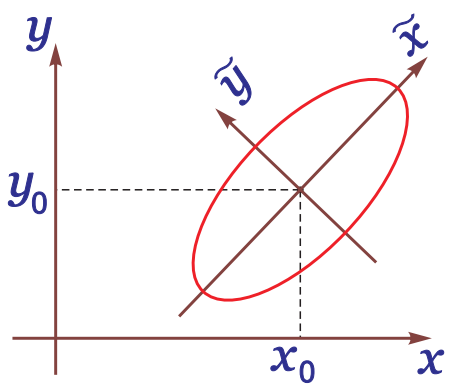
Уравнение кривой второго порядка

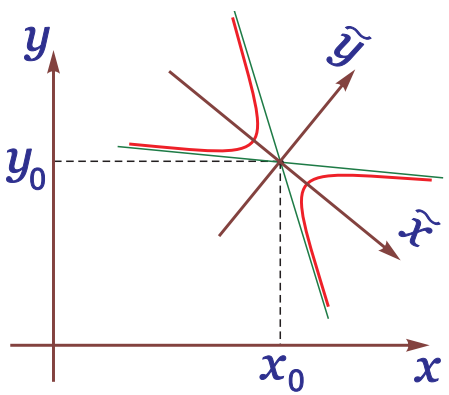
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

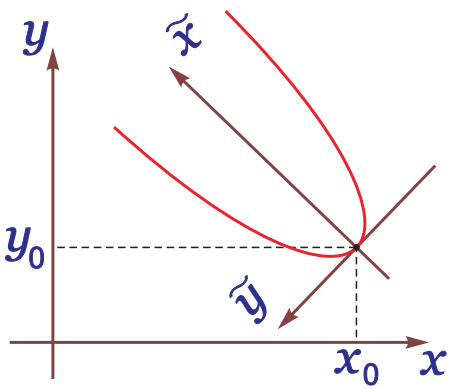
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\mathbf{b}^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0\,; \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

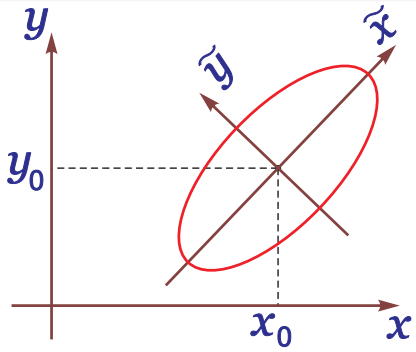
приводится к каноническому виду с помощью перехода к другой подходящей прямоугольной системе координат

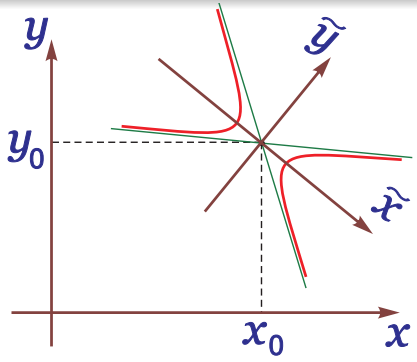
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I};$$

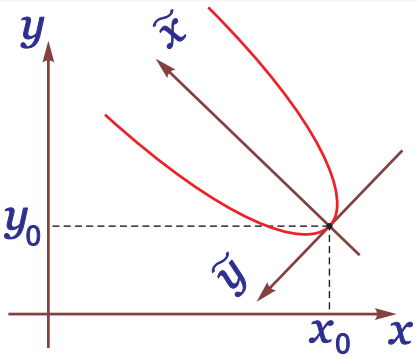












$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

(x_0, y_0) — координаты

нового начала координат в старой системе координат;

столбцы матрицы перехода $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix}$$

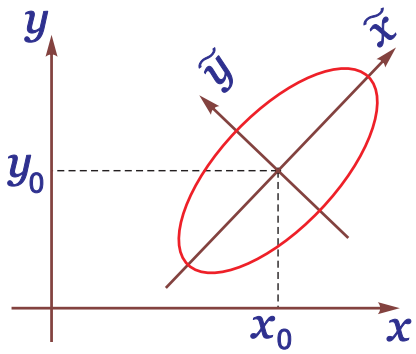
являются базисными векторами новой системы координат.

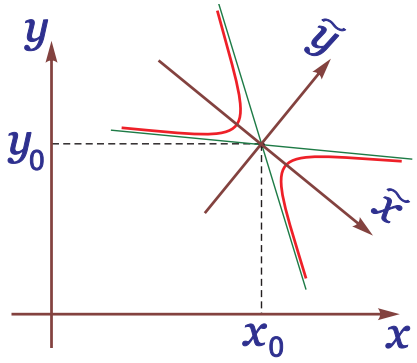
Условие ортогональности матрицы $\mathbf{Q}$ $(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I})$ означает, что векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ единичной длины и взаимно оргогональны: $\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k \rangle = \delta_{jk}$.

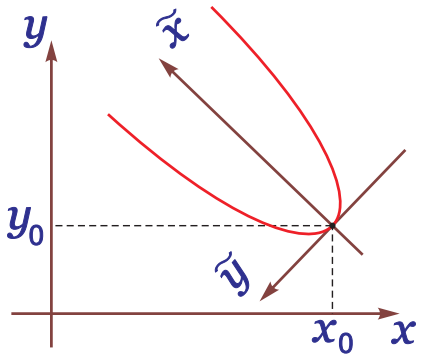
Опишем удобный способ непосредственного определения

(x_0, y_0) – координат начала канонической системы координат

и базисных векторов $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$ канонической системы координат.







Для всех кривых второго порядка (кроме параболы) начало координат канонической системы координат является центром симметрии.

Центр симметрии кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

определяется как решение системы

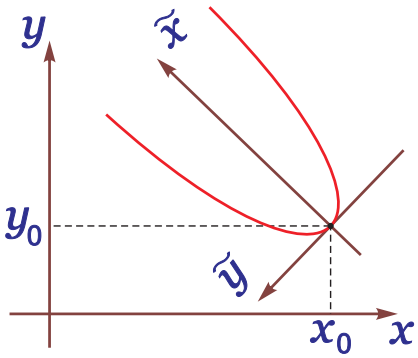
$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \mathbf{b} = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0\,. \end{cases}$$

Если решений много — берём любое.

Если у системы

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \mathbf{b} = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}$$

решений нет, значит, мы имеем дело с параболой.



В случае параболы начало канонической системы координат помещается в вершину параболы.

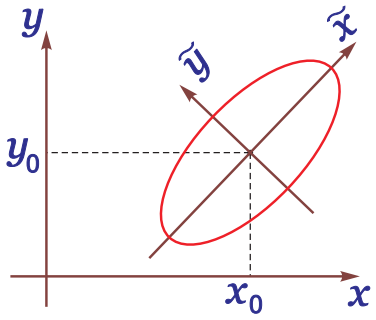
Координаты вершины параболы

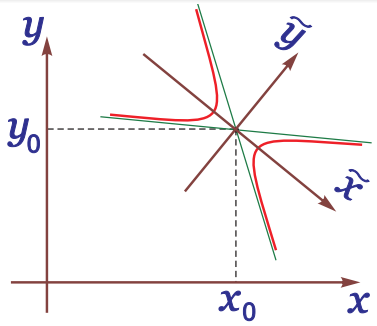
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

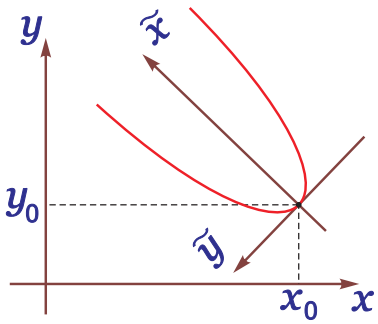
находятся из решения системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + \dfrac{a_{11}b_1 + a_{12}b_2}{a_{11} + a_{22}} = 0 \\ 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c + \dfrac{a_{11}b_1^2 + 2a_{12}b_1b_2 + a_{22}b_2^2}{(a_{11} + a_{22})^2} = 0. \end{cases}$$

Обоснование этих формул — в следующий раз.







$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{q_1} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{q_2} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix}.$$

Вычисление базисных векторов $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$ канонической системы координат (они же столбцы матрицы перехода $\mathbf{Q}$) основывается на следующем важном свойстве векторов $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$.

Базисные векторы $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$ канонической системы координат кривой $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ являются собственными векторами матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ длины $\mathbf{1}$:

$$\underline{\mathbf{A}\mathbf{q_1} = \lambda_1\mathbf{q_1}, \quad \mathbf{A}\mathbf{q_2} = \lambda_2\mathbf{q_2}, \qquad |\mathbf{q_1}| = |\mathbf{q_2}| = 1}.$$

Делаем замену $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ в исходном уравнении

$$\mathbf{F}(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Сформулируем какой вид примет уравнение после замены.

Если у кривой был центр (x_0, y_0), то уравнение примет вид:

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + \mu = 0, \quad \text{где } \mu = \mathbf{F}(x_0, y_0).$$

Если у кривой центра не было (т.е. мы имеем дело с параболой), то уравнение примет вид:

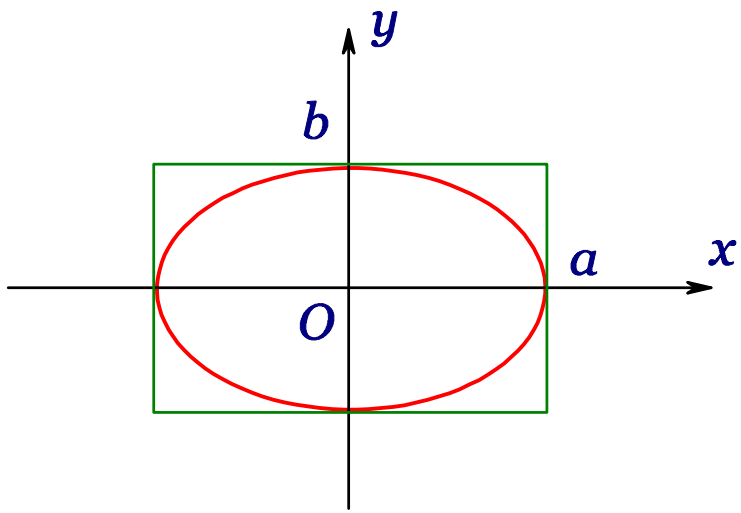
$$\lambda_2\widetilde{y}^2 + \nu\widetilde{x} = 0,$$

где $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$, $\nu = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}$.

Упр.

Площадь эллипса равна $S = \pi ab$

(где a и b — полуоси эллипса).



Замечение

Периметр эллипса равен $l = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt$

(где e — эксцентриситет),

интеграл в элементарных функциях не выражается.

В Беларусии разработан самолет с овальным крылом.

Аппарат с таким крылом более маневренный,
более устойчив к боковому ветру и более экономичен.

Задачи по аналитической геометрии, предлагавшиеся на Государственном экзамене по математике в 2000 – 2013 гг.

2011 г.

Пусть p — некоторое положительное число.

Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $y = 0$, для которых прямые $x = p$, $x = 3p$ являются директрисами.

При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь?

При каком значении $p > 1$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $y - x = \sqrt{2} - 3$?