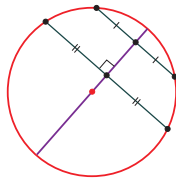
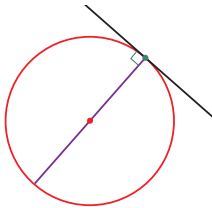
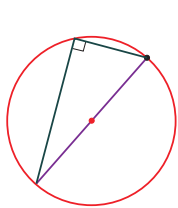


# Диаметр кривой второго порядка и сопряжённые направления

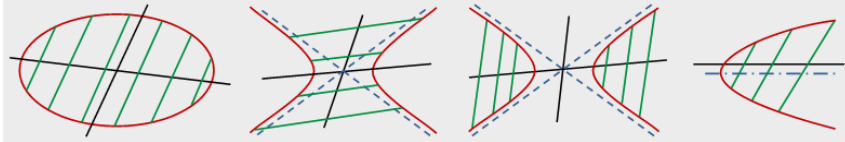
Напомним известные свойства окружности.



Угол, опирающийся на диаметр — прямой.

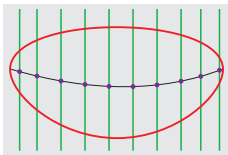
Касательная и диаметр, проведённый через точку касания — перпендикулярны.

Даны две параллельные хорды, через их середины проведена третья хорда. Утверждается, что третья хорда является диаметром и перпендикулярна первым двум.



## Утверждение

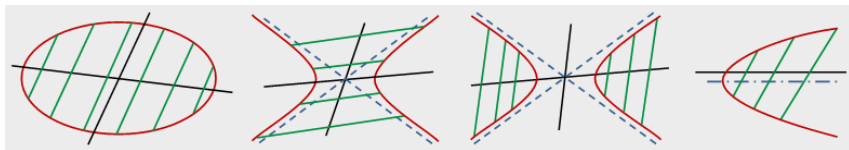
Средины параллельных хорд кривой второго порядка лежат на одной прямой.



Заметим, что середины параллельных хорд не обязательно лежат на одной прямой даже для выпуклой кривой.

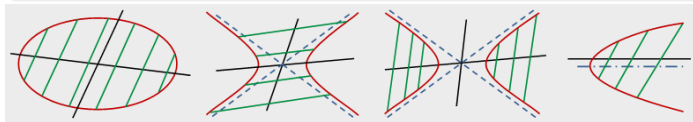
## Определение

Прямая, проходящая через середины параллельных хорд кривой второго порядка называется диаметром, сопряжённым исходному семейству параллельных хорд.



Позже мы убедимся в том что, у эллипса и гиперболы диаметр всегда проходит через центр, а у параболы диаметр всегда параллелен фокальной оси.

## Уравнение диаметра кривой второго порядка



Уравнение кривой второго порядка

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (1)$$

$\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  — направляющий вектор семейства параллельных хорд

Уравнение диаметра кривой (1), сопряженного направлению  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  —

$$l(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + m(a_{12}x + a_{22}y + b_2) = 0 \quad (2)$$

Или  $(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{12}l + a_{22}m)y + (b_1l + b_2m) = 0$ .

Это уравнение задаёт прямую, если одновременно не обращаются в ноль коэффициенты при  $x$  и  $y$ .

## Определение

Не нулевой вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  называется особым для кривой

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

если  $\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m = 0 \\ a_{12}l + a_{22}m = 0 \end{cases}$ , то есть,  $A \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = 0$ .

Таким образом, вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  особый, если является собственным вектором матрицы  $A$ , отвечающим нулевому собственному числу.

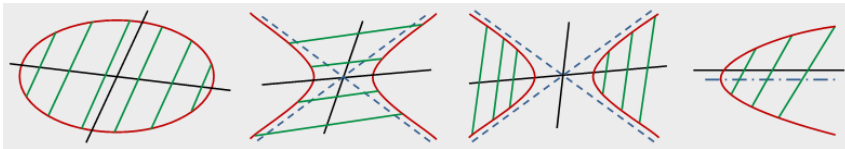
Это возможно только если матрица  $A$  вырождена, т.е. кривая нецентральная.

## Утверждение

У параболы особым является направляющий вектор фокальной оси.

## Определение

Направляющий вектор семейства параллельных хорд и направляющий вектор диаметра, построенного по этим хордам называются сопряжёнными векторами.



## Утверждение

Векторы  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  и  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$  являются **сопряжёнными** для

кривой  $F(x, y) \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\mathbf{b}^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0,$

если  $\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = 0.$

◀ Направляющий вектор параллельных хорд равен  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$ .

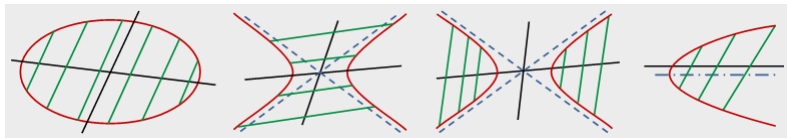
Направляющий вектор диаметра (2) равен

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}l + a_{22}m \\ -a_{11}l - a_{12}m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}.$$

Покажем, что  $\underline{\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = 0}.$

В с.д., обозначим  $\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} &\equiv \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \\ &= \delta \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ -l \end{bmatrix} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$



### Утверждение

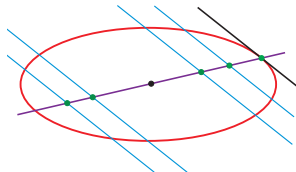
Если кривая центральная ( $\delta = \det \mathbf{A} \neq 0$ ), то для каждого (ненулевого) вектора  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  существует единственный (с точностью до множителя) сопряжённый вектор  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$ .

### Утверждение

Если кривая нецентральная ( $\delta = \det \mathbf{A} = 0$ ), то векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются сопряжёнными только если один из них особый.

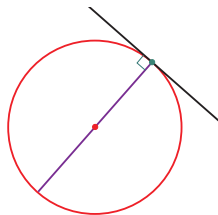
### Утверждение

Касательная и диаметр, проходящие через одну общую точку кривой (1) имеют сопряжённые направления.



Сравните.

Касательная и диаметр, проходящие через одну общую точку окружности — перпендикулярны.

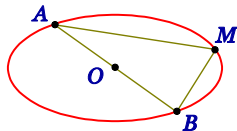


**Упр.** Через центр эллипса проведена прямая, пересекающая эллипс в точках  $A$  и  $B$ .

$M$  — некоторая точка эллипса.

Доказать что векторы  $\overrightarrow{MA}$  и  $\overrightarrow{MB}$  сопряжённые.

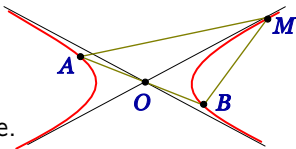
Рассмотреть случай когда эллипс является окружностью.



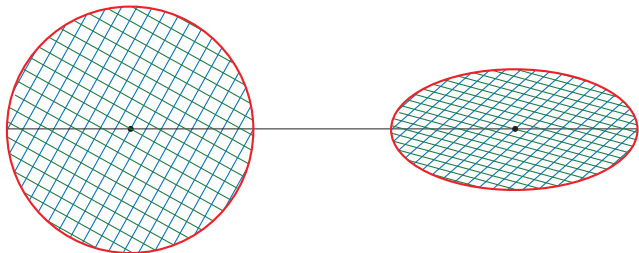
**Упр.** Через центр гиперболы проведена прямая, пересекающая гиперболу в точках  $A$  и  $B$ .

$M$  — некоторая точка гиперболы.

Доказать что векторы  $\overrightarrow{MA}$  и  $\overrightarrow{MB}$  сопряжённые.

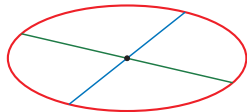


Известно, что любой эллипс можно получить из окружности подходящим сжатием плоскости.



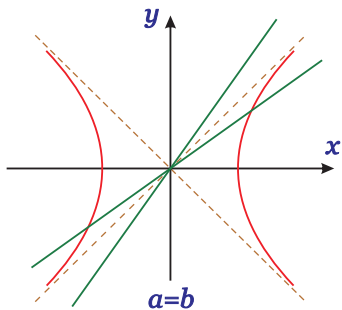
**Упр.** Показать при таком сжатии перпендикулярные прямые переходят в прямые сопряжённых направлений.

**Упр.** Два диаметра эллипса имеют сопряжённые направления тогда и только тогда, когда они разбивают эллипс на четыре части равные по площади.

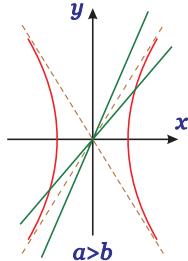
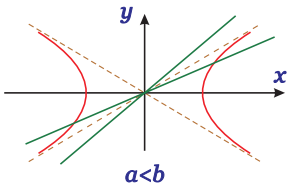
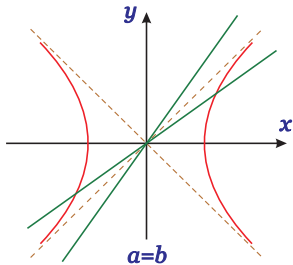


№917 (Моденов, Пархоменко)

Доказать, что асимптоты равносторонней гиперболы являются биссектрисами углов между любыми двумя её сопряженными диаметрами.



$$x^2 - y^2 = a^2$$



Известно, что любую гиперболу  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  можно получить из равнобочной подходящим сжатием (растяжением) плоскости.

**Упр.** Показать при сжатии сопряженные диаметры переходят в сопряженные диаметры.

Справедливо более общее

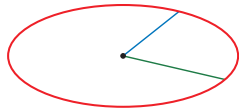
### Утверждение

При любом аффинном преобразовании плоскости сопряженные диаметры переходят в сопряженные диаметры.

## Первая теорема Аполлония

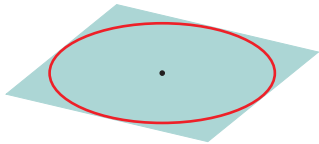
Сумма квадратов сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная —  $a^2 + b^2$  сумме квадратов его полуосей.

(Моденов, Пархоменко №920)



## Вторая теорема Аполлония

Площадь описанного около эллипса параллелограмма, стороны которого имеют сопряженные направления, постоянна и равна  $4ab$  (где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса).



(ср. Моденов, Пархоменко №919)

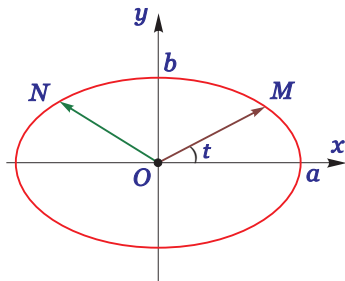
Аполлоний Пергский — один из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, живших в III веке до н. э.

Как известно, эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

можно задать параметрически

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$$



Показать, что для вектора  $\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

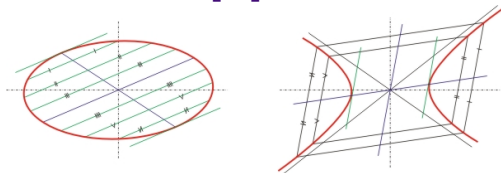
сопряжённым является вектор  $\overrightarrow{ON} = \begin{bmatrix} x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}.$

(ср. Моденов, Пархоменко №890)

Вернёмся к понятию диаметра кривой второго порядка

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \quad (1)$$

Рассматривали семейство параллельных прямых, направляющим вектором  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  ( $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$ ).



Средины параллельных хорд лежат на прямой

$$l(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + m(a_{12}x + a_{22}y + b_2) = 0,$$

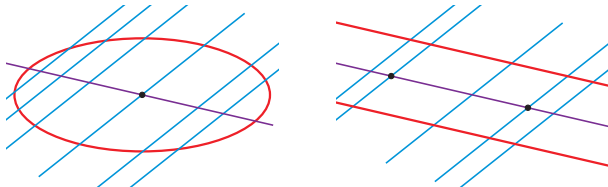
Эта прямая называется **диаметром** кривой второго порядка (1)

сопряжённым направлением  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$ .

### Утверждение

Все диаметры кривой второго порядка проходят через **каждый** её центр.

Это не сложно установить и геометрически

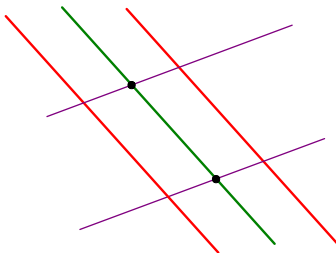
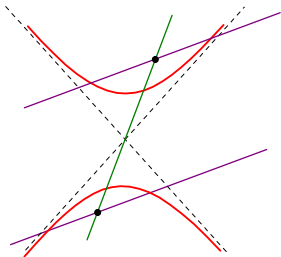


Для этого нужно, рассматривая семейство параллельных прямых, по которому строится диаметр, проводить прямую этого семейства и через центр.

Повторим сказанное отдельно для центральных и нецентральных кривых.

У центральных кривых центр единственный, и значит, каждый диаметр проходит через единственный центр.

У нецентральных кривых центры симметрии образуют целую прямую, и диаметр должен проходить через каждую из них, а значит, диаметр совпадает с прямой центров и он единственный.

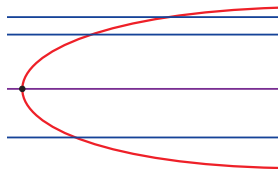
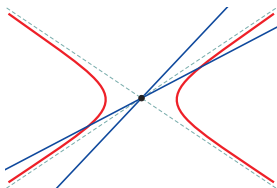
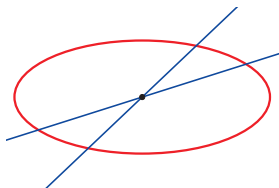


Докажите следующие утверждения:

Каждая прямая, проходящая через центр эллипса, является диаметром этого эллипса.

Каждая прямая, проходящая через центр гиперболы, и не являющаяся асимптотой, есть диаметр этой гиперболы.

Каждая прямая, параллельная фокальной оси параболы, является его диаметром этой параболы.



**Замечание** о собственных числах и собственных векторах симметрической вырожденной матрице размера  $2 \times 2$ .

Пусть матрица  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$  вырождена:  $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ .

Собственные числа:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ .

Соответствующие собственные векторы:

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad \text{если} \quad a_{11} \neq 0$$

и

$$\begin{bmatrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{если} \quad a_{22} \neq 0.$$

---

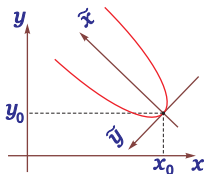
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = (a_{11} + a_{22}) \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}.$$

Пусть уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

задаёт параболу.

Опишем как найти вершину этой параболы — начало канонической системы координат.



Пусть  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  собственной вектор, отвечающий нулевому собственному числу матрицы  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$  :  $A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$ .

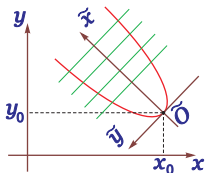
Вектор  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  является направляющим вектором фокальной оси.

Перпендикулярный ему вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix}$  является направляющим вектором другой оси канонической системы координат.

Построим семейство параллельных прямых

с направляющим вектором  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$

и диаметр сопряжённый направлению  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$ :



$$l(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + m(a_{12}x + a_{22}y + b_2) = 0.$$

Этот диаметр и есть фокальная ось.

Вершину параболы теперь можно найти, как точку пересечения фокальной оси и параболы

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

## Определение

Вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  называется асимптотическим для кривой

$$F(x, y) \equiv \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\mathbf{b}^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0;$$

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

если  $\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = 0;$

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

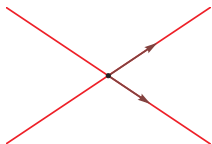
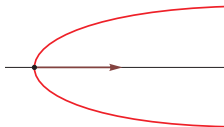
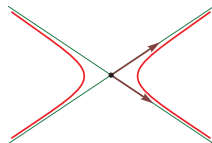
Т.о., асимптотический вектор это вектор сопряжённый самому себе (самосопряжённый).

Рассмотреть эллипс, гиперболу и параболу  
в канонических координатах  
и показать, что:

у эллипса нет асимптотических векторов,

у гиперболы асимптотическими являются  
направляющие векторы асимптот,

у параболы асимптотическим является  
направляющий вектор фокальной оси.



у пар прямых пересекающихся, параллельных, совпадающих  
асимптотическими являются направляющие векторы этих прямых.

### Упр.

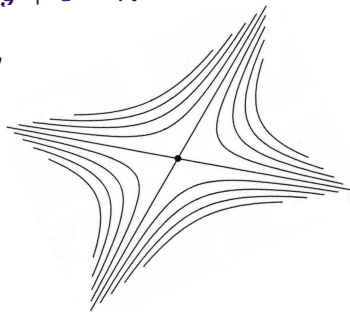
Пусть уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

задаёт гиперболу. Показать, что при  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = \lambda$$

задаёт гиперболу с теми же асимптотами,  
либо пару пересекающихся прямых.



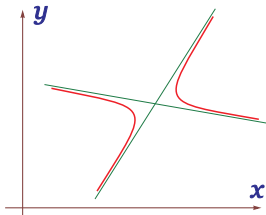
### Упр.

Если пара пересекающихся прямых

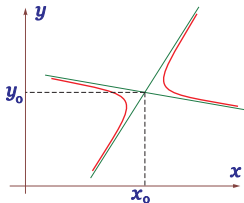
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

является асимптотами некоторой гиперболы,  
то уравнение этой гиперболы имеет вид:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = \lambda.$$



## Построение асимптоты гиперболы



Пусть уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

задаёт гиперболу. Пусть вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  является асимптотическим,

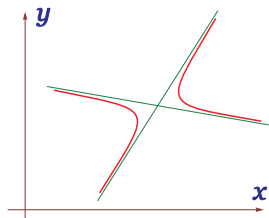
то есть,  $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ .

Пусть  $(x_0, y_0)$  — центр гиперболы, т. е., 
$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 = 0 \end{cases}.$$

Так как  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  — направляющий вектор асимптоты,

то прямая  $\frac{(x - x_0)}{l} = \frac{(y - y_0)}{m}$  является асимптотой гиперболы.

## Ещё один способ построения асимптоты гиперболы



Пусть уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

задаёт гиперболу. Пусть вектор  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$  является асимптотическим,

то есть,  $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ .

Выпишем диаметр сопряжённый направлению  $\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$ :

$$l(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + m(a_{12}x + a_{22}y + b_2) = 0.$$

Утверждается, что эта прямая является асимптотой исходной гиперболы. Обосновать.

Задачи по аналитической геометрии, предлагавшиеся  
на Государственном экзамене по математике

2003 г.

Пусть  $M$  — точка пересечения эллипса  $x^2 + 2y^2 = 1$   
и параболы  $y^2 = 2(x - a)$ . При каком значении параметра  $a$   
касательная к параболе в точке  $M$  сопряжена направлению  
касательной к эллипсу в точке  $M$  относительно эллипса?

2010 г.

Провести касательную прямую  $\alpha$  к кривой  $y = 1 - x^4$  так,  
чтобы диаметр  $\beta$  эллипса  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ ,  
сопряженный направлению прямой  $\alpha$ , проходил через точку  $(1, 1)$ .  
Найти угол между прямыми  $\alpha$  и  $\beta$ .