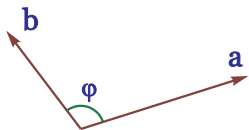


Скалярное произведение векторов

Рассматриваем векторы на плоскости или в пространстве.



$|a|$, $|b|$ — длины векторов,
 φ — угол между векторами
 $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Скалярное произведение векторов можно определить так:

$$\langle a, b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi.$$

Если известно, что такое длина вектора и угол между векторами.

Отметим (важно!) наоборот, через скалярное произведение вычисляются длины векторов и косинус угла между ними

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}, \quad \cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{|a| \cdot |b|}.$$

Свойства скалярного произведения

- ❶ $\langle a, a \rangle \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{V}; \quad \langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0.$
- ❷ $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \quad \forall a, b \in \mathcal{V}.$
- ❸ $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \quad \forall a, b, c \in \mathcal{V}.$
- ❹ $k \langle a, b \rangle = \langle ka, b \rangle = \langle a, kb \rangle \quad \forall a, b \in \mathcal{V}, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$

Определение

Скалярным произведением на векторном пространстве $\mathcal{V}$ называется функция, которая каждой паре векторов $a, b \in \mathcal{V}$ сопоставляет число $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$,
при этом должны аксиоматически выполняться свойства 1.—4.

Векторное пространство $\mathcal{V}$, в котором задано скалярное произведение $\langle a, b \rangle$ называется **евклидовым векторным пространством**.

В евклидовом векторном пространстве

длина вектора (норма вектора) обозначается $|a|$ ($\|a\|$)

и определяется формулой: $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$,

а угол φ между двумя ненулевыми векторами формулой:

$$\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{|a| \cdot |b|}; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Отметим

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского)

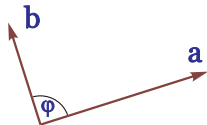
$\forall a, b \in \mathcal{V}$ выполняется неравенство: $|\langle a, b \rangle| \leq |a| \cdot |b|$.

Определение

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются **ортогональными** ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

При $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ это равносильно тому, что угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = 0$$



Выразим скалярное произведение в координатах.

Пусть $\vec{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$ и

$\vec{y} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + \dots + y^n \mathbf{e}_n$, тогда

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n, y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + \dots + y^n \mathbf{e}_n \rangle = \\ &= \sum_{j,k=1}^n x^j y^k \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{j,k=1}^n g_{jk} x^j y^k.\end{aligned}$$

$\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = g_{jk}$ — метрические коэффициенты

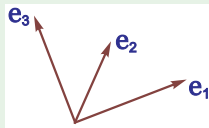
Мы получили выражение скалярного произведения в координатах:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j,k=1}^n g_{jk} x^j y^k$$

Определение

Базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется **ортонормированным**, если

$$g_{jk} \equiv \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$



В случае ортонормированного базиса, формула для скалярного произведения

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j,k=1}^n g_{jk} x^j y^k$$

принимает более простой вид:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x^j y^j = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n.$$

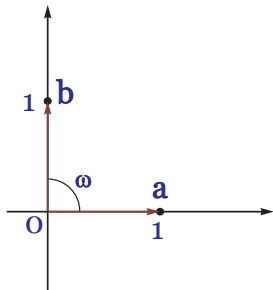
Упражнение

В векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ задать скалярное произведение так,

что длина вектора $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ равна p ,

длина вектора $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ равна q ,

а угол между этими векторами равен ω .



Вычислить скалярное произведение векторов

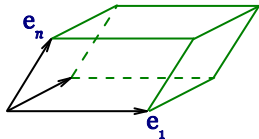
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Показать что оно равно,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = p^2 x_1 y_1 + pq \cos \omega (x_1 y_2 + x_2 y_1) + q^2 x_2 y_2.$$

Как задать скалярное произведение?

Скалярное произведение можно задать, указав, какой базис следует считать ортонормированным.



И этот базис может быть любым !

Выберем в пространстве $\mathcal{V}$ базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$,
и объявим его ортонормированным, т.е.,

$$\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} ;$$

Тем самым скалярное произведение задано:

для векторов

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n \\ \vec{y} &= y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + \dots + y^n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x^j y^j.$$

В этом скалярном произведении параллелепипед,
изображённый на рисунке является единичным кубом!

- Любое ли скалярное произведение может быть задано таким способом?
- При любом ли скалярном произведении существует ортонормированный базис?
- При любом ли скалярном произведении существует единичный куб?

Эти вопросы эквивалентны.

Утвердительный ответ на эти вопросы даёт процедура ортогонализации Грама-Шмидта.

Таким образом,

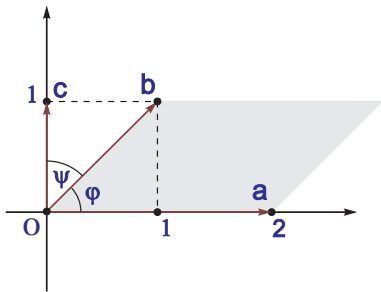
Задание скалярного произведения эквивалентно выбору ортонормированного базиса.

Упражнение

В векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ задать скалярное произведение так, что векторы $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ортонормированы:

$$|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 1, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

В этом скалярном произведении параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, является единичным квадратом, $\varphi = 90^\circ$.



Вычислить в указанном скалярном произведении

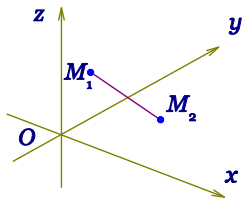
длину вектора $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Показать что, $|\mathbf{c}| = \frac{\sqrt{5}}{2} > |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$; $\cos \psi = \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\psi < 30^\circ$.

Некоторые применения скалярного произведения векторов

Наличие в плоскости или в пространстве скалярного произведения позволяет существенно дополнить теорию прямых и плоскостей.

Расстояние между двумя точками



$$M_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix};$$

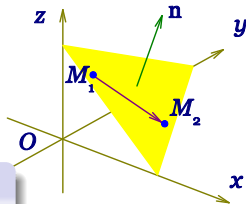
$$|M_1 M_2| = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Перпендикуляр к плоскости

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат,

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ —

общее уравнение плоскости.



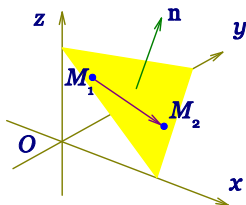
Утверждение

Пусть $M_1, M_2 \in \alpha$, тогда $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \perp \overrightarrow{M_1 M_2}$.

$$\blacktriangleleft M_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in \alpha, \quad M_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{cases}, \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \iff \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 0. \blacktriangleright$$



Т.о., вектор $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ перпендикулярен

любой прямой $l \in \alpha$.

На этом основании говорят, что вектор

$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ перпендикулярен плоскости α ;
 $\mathbf{n} \perp \alpha$.

Замечание. Обозначим $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

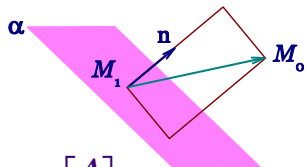
тогда общее уравнение плоскости
может быть записано так:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\alpha : \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0; \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0,$$



$$M_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in \alpha,$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \text{ — вектор перпендикулярный } \alpha, \quad \overrightarrow{M_1 M_0} = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{bmatrix}, \text{ тогда}$$

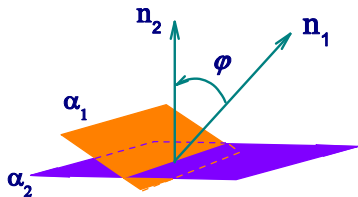
$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{M_1 M_0} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rho(M_0, \alpha) = \frac{|\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle + D|}{|\mathbf{n}|}$$

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

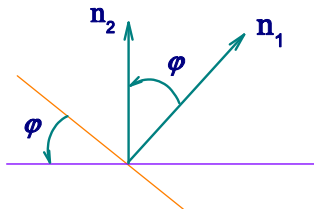
Угол между двумя плоскостями



$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_1 \rangle + D_1 = 0,$$

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}_2 \rangle + D_2 = 0,$$

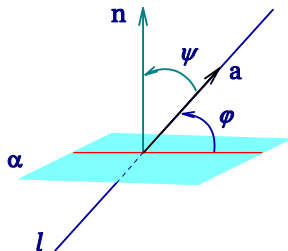
$$\cos \varphi = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$$

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

Угол между прямой и плоскостью

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix},$$

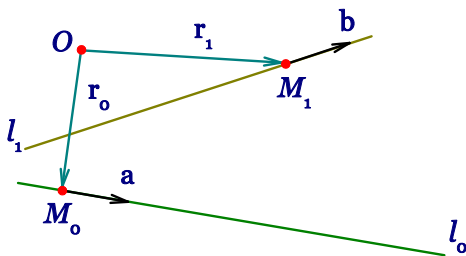


$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}; \quad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}; \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

т.к. $\cos \psi = \sin \varphi$, то

$$\sin \varphi = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|l \cdot A + m \cdot B + n \cdot C|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между двумя прямыми в пространстве

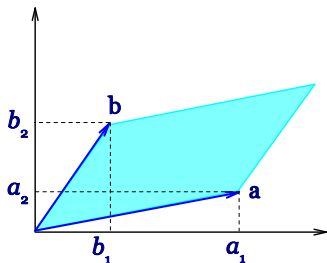


$$l_0 : r = r_0 + ta$$

$$l_1 : r = r_1 + tb$$

$$\cos \varphi = \frac{|\langle a, b \rangle|}{|a| \cdot |b|}$$

Площадь параллелограмма на плоскости в прямоугольной системе координат



Пусть $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$
в **прямоугольной** системе координат.

Доказать формулу для площади параллелограмма,
построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

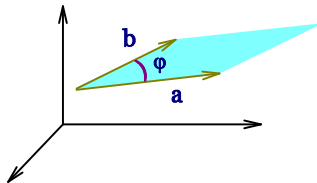
$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|.$$

Площадь параллелограмма

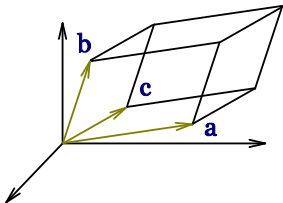
Площадь параллелограмма, построенного на паре векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ ($\dim \mathcal{V} \geq 2$)

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi .$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\det \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \end{bmatrix}} .$$



Объём параллелепипеда в трёхмерном пространстве

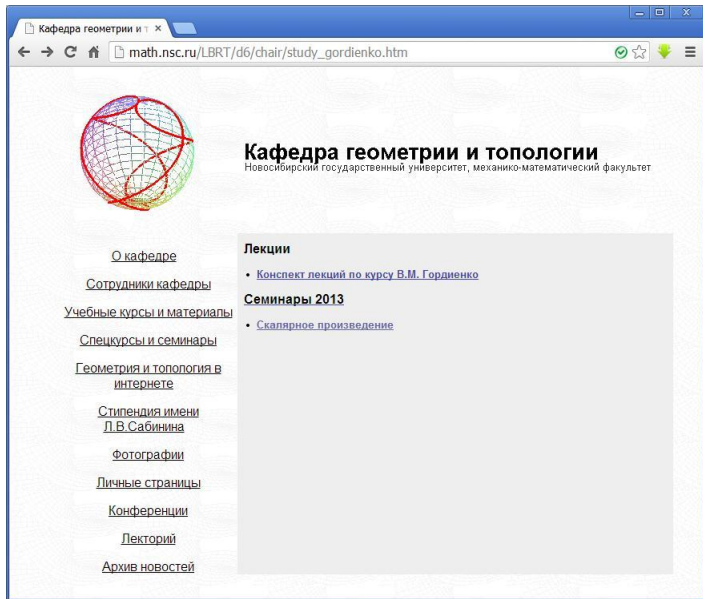


Пусть $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$
в **прямоугольной** системе координат.

Формула для объёма параллелепипеда,
построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right|.$$



http://math.nsc.ru/LBRT/d6/chair/study_gordienko.htm