

Диаметральная плоскость

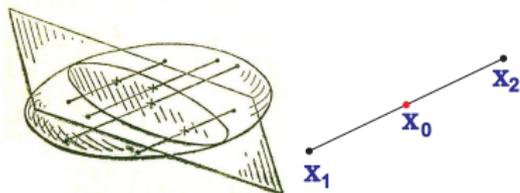
Рассматривается поверхность

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0. \quad (1)$$

Пусть \mathbf{u} направляющий вектор прямой l .

Пусть \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 — точки пересечения
прямой l с поверхностью.

Пусть \mathbf{x}_0 — середина отрезка $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$.



Тогда, координаты \mathbf{x}_0 удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{u}^T [\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}] = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) определяет плоскость.

Эта плоскость называется **диаметральной плоскостью**
поверхности (1), **сопряжённой** направлению \mathbf{u} .

Утверждение

Всякая диаметральная плоскость содержит все центры данной поверхности.

◀ Точка \mathbf{x}_0 тогда и только тогда является центром симметрии поверхности

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

когда удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

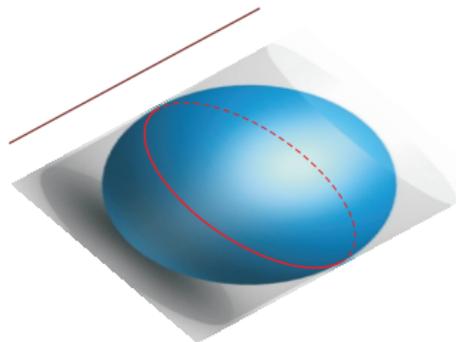
Ясно, что если точка \mathbf{x}_0 удовлетворяет этому уравнению, то она удовлетворяет уравнению диаметальной плоскости

$$\mathbf{u}^T [\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}] = 0. \quad \blacktriangleright$$

Замечание

Пусть \mathbf{n} — вектор нормали диаметальной плоскости сопряжённой направлению \mathbf{u} . Тогда $\mathbf{n} = \mathbf{A} \mathbf{u}$.

Если вокруг эллипсоида описать цилиндр, образующие которого имеют направляющий вектор \mathbf{u} , то диаметральной плоскостью, сопряжённой направлению \mathbf{u} , будет плоскость, содержащая точки касания цилиндра и эллипсоида.



Пример

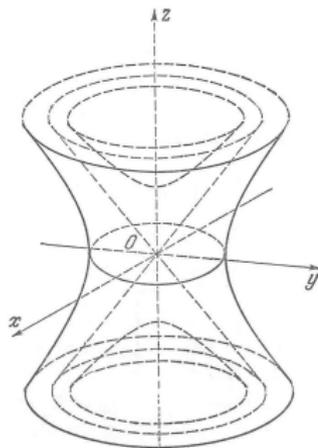
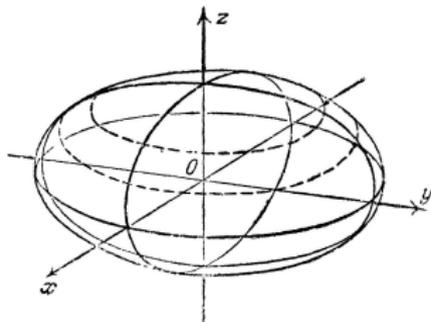
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — эллипсоид,}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix},$$

$$\frac{kx}{a^2} + \frac{ly}{b^2} + \frac{mz}{c^2} = 0 \text{ — диаметральной плоскость,}$$

сопряжённая направлению \mathbf{u} .

Упр. Диаметральными плоскостями центральной поверхности являются плоскости, проходящие через центр и только они.

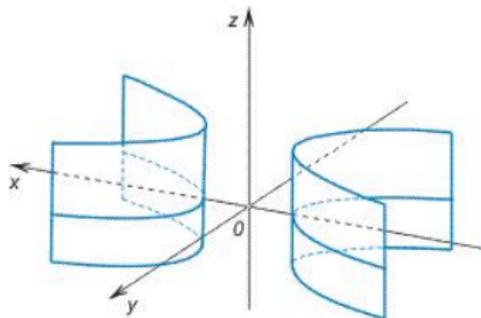
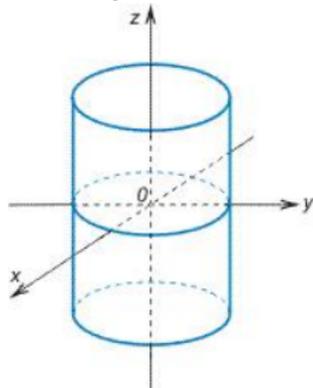


Замечание

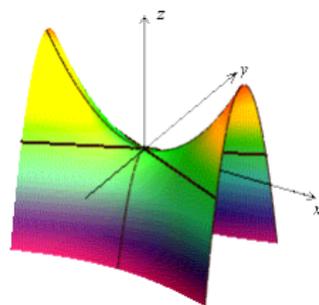
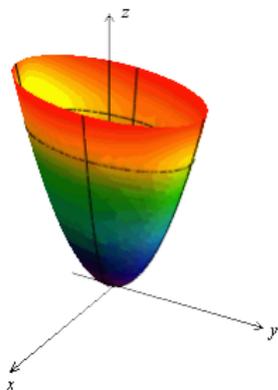
Пусть \mathbf{n} — вектор нормали диаметральной плоскости сопряжённой направлению \mathbf{u} . Тогда $\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Центральные поверхности характеризуются тем, что матрица \mathbf{A} невырождена.

Упр. Если поверхность имеет ось симметрии, то диаметрными плоскостями являются плоскости, проходящие через ось симметрии и только они.



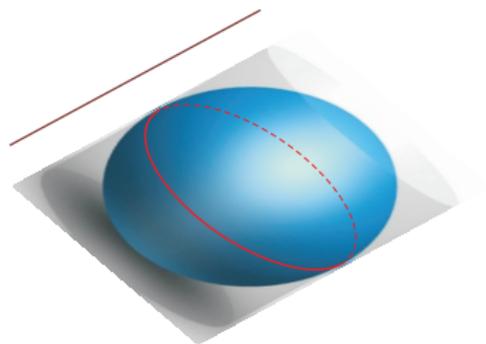
Упр. Диаметральными плоскостями параболоида являются плоскости параллельные оси параболоида и только они.



Задача (Гос. экзамен 2001 г. вариант 1)

Найти уравнение цилиндра с направляющим вектором $(1, 1, 1)$, все образующие которого касаются эллипсоида

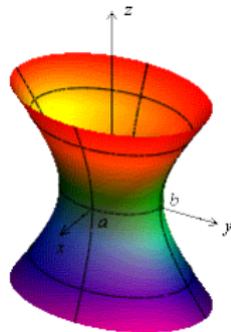
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$



Задача

Найти уравнение цилиндра с направляющим вектором $(1, 1, 1)$, все образующие которого касаются эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1.$$

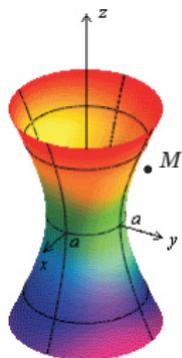


Задача (Гос. экзамен 2000 г. вариант 1)

Выписать уравнение плоскости,
пересекающей поверхность

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 1$$

по линии, центр которой находится в точке $(4, 4, 3)$.



Задача (Гос. экзамен 2006 г. вариант 1)

Найти уравнения диаметральных плоскостей для поверхности

$$x^2 - 10x + 3y^2 + 18 = 0,$$

которые бы касались эллипсоида $\frac{x^2}{16} + y^2 + 5z^2 = 1$.

Задача (Гос. экзамен 2013 г. вариант 1)

Цилиндр Σ в \mathbb{R}^3 задан своим сечением

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$$

с плоскостью $z = 0$ и направлением $v = (2, 3, -13)$

прямолинейных образующих.

Найти диаметрально плоскость цилиндра Σ ,

сопряженную направлению $m = (1, 1, 0)$.

Задача (Гос. экзамен 2014 г., ноябрь, вариант 1)

Цилиндр C задан своим сечением $(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 1$ с плоскостью $z = 0$ и направлением $(\alpha : \beta : \gamma)$ прямолинейных образующих.

При каком значении параметров α, β, γ поверхность $x^2 + 3y^2 + (z - 1)^2 = 1$ и цилиндр C имеют бесконечно много общих диаметральных плоскостей?

Найти уравнение цилиндра C для этих направлений.