# Векторное произведение

$\mathcal{V}$ — евклидовое, ориентированное, $\dim \mathcal{V} = 3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$.

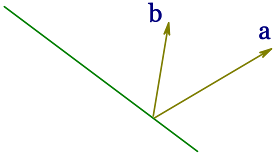
**Определение**

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что:

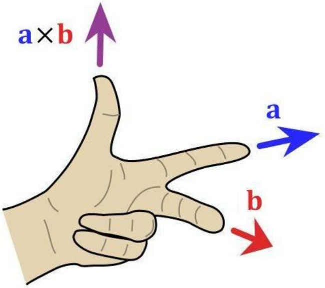
- $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ т.е., $\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{0}$,
- векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют базис ориентированный положительно,
- $|\mathbf{c}| = \mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$.

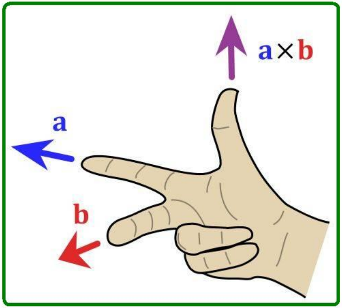
Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Обозначение: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

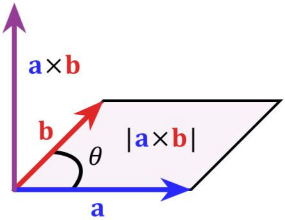


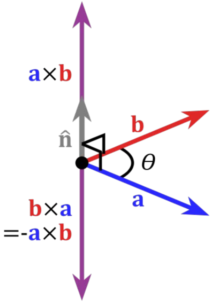

Первое свойство определяет ось вектора $\mathbf{c}$, второе — направление на оси, третье — длину вектора $\mathbf{c}$.



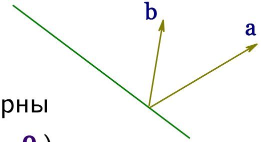




Обычно в качестве положительной ориентации выбирается правая



1) $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$




2) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ линейно коллинеарны

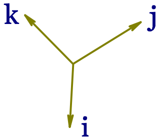
(в частности, $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}$ выполняется $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$)

Пусть векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathcal{V}$ образуют ортонормированный положительно ориентированный базис, тогда

4) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\,, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}\,,$

$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\,\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\,\mathbf{i}\,, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\,\mathbf{j}\,,$

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}\,.$




5) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}\,,$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2\,.$

# Векторное произведение в ортонормированном базисе

Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — ортонормированный положительно ориентированный базис и $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, тогда

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Или, если $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$,

то $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

# Двойное векторное произведение

**Замечание**

Векторное произведение неассоциативно: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Пример, пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — ортонормированный положительно ориентированный базис, тогда

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \qquad (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

**Утверждение**

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

Правило для запоминания:

*двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных.*

Правило годится и в случае $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{a}\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

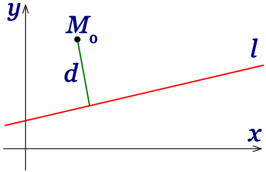
# Скалярное произведение двух векторных произведений

**Утверждение**

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \mathbf{det} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle \end{bmatrix}$$

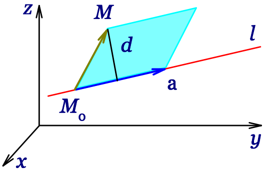
$$l: \quad Ax + By + C = 0,$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$




$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

# Расстояние от точки до прямой в пространстве




$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$$

$$M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in l, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{M_0M} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

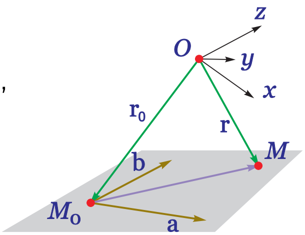
В координатах

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

Пусть плоскость $\alpha$ в трёхмерном пространстве задана в параметрическом виде:

$$\alpha: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b};$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$




$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + tk + sp \\ y = y_0 + tl + sq \\ z = z_0 + tm + sr \end{cases}$$

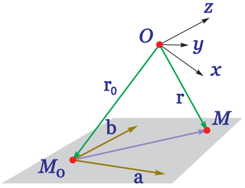
Система координат $Oxyz$, вообще говоря, аффинная.

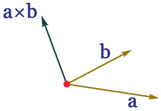
Требуется записать плоскость $\alpha$ в виде общего уравнения —

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + tk + sp \\ y = y_0 + tl + sq \\ z = z_0 + tm + sr \end{cases}$$

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$




Если система координат $Oxyz$ прямоугольная, то вектор $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ — нормаль плоскости $\alpha$ и $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

Следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} l & q \\ m & r \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} m & r \\ k & p \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix}; \text{ и}$$

$$\alpha: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

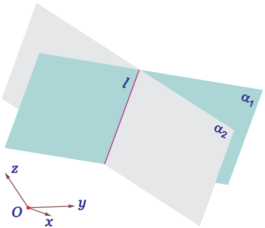
Показать, что формулы в рамочке верны и в аффинной системе координат.

# Пересечение плоскостей в трёхмерном пространстве

Даны две пересекающиеся плоскости
в трёхмерном пространстве

$$\alpha_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Найти направляющий вектор прямой,
по которой эти плоскости пересекаются.




Система координат $Oxyz$, вообще говоря, аффинная.

Обозначим через $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ искомый направляющий вектор. Если система координат $Oxyz$ прямоугольная, то $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$

Следовательно, $$\boxed{a = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Показать, что формулы в рамочке верны и в аффинной системе координат.