ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

2000 г.

1. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 1$$
по линии, центр которой находится в точке $(4, 4, 3)$.

2. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$$
по линии, центр которой находится в точке $(1, 1, 1)$.

3. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 2z$$
по линии, центр которой находится в точке $(1, 3, 5)$.

4. Выписать уравнение плоскости, пересекающей поверхность
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 2z$$
по линии, центр которой находится в точке $(3, 5, 1)$.

2001 г.

1. Найти уравнение цилиндра с направляющим вектором $(1, 1, 1)$, все образующие которого касаются эллипсоида
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\,.$$

2. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $(1, 1, 1)$, все образующие которого касаются эллипсоида
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\,.$$

3. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $(1, 1, 1)$ и сечением, $x^2 - 2y^2 = 1$ плоскостью $z = 0$.

4. Найти уравнение цилиндра с направляющим вектором $(1, 1, 1)$ и сечением $x^2 + 2y^2 = 1 + z^2$ плоскостью $x + y + z = 1$.

2002 г.

1. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R^3}$ фиксирована точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0, z_0)}$. Найти условие (уравнение) на координаты точки $\boldsymbol{M}$, при выполнении которого эллипс $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 = 1}$, $\boldsymbol{z = 0}$, виден из точки $\boldsymbol{M}$ как окружность.

2. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R^3}$ фиксирована точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0, z_0)}$. Найти условие (уравнение) на координаты точки $\boldsymbol{M}$, при выполнении которого окружность $\boldsymbol{x^2 + z^2 = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$, видна из точки $\boldsymbol{M}$ как эллипс с отношением полуосей $\boldsymbol{1 : \sqrt{2}}$.

3. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R^3}$ фиксирована точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0, z_0)}$. Найти условие (уравнение) на координаты точки $\boldsymbol{M}$, при выполнении которого эллипс $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 = 1}$, $\boldsymbol{z = 1}$, виден из точки $\boldsymbol{M}$ как окружность.

4. В евклидовом пространстве $\boldsymbol{R^3}$ фиксирована точка $\boldsymbol{M(x_0, y_0, z_0)}$. Найти условие (уравнение) на координаты точки $\boldsymbol{M}$, при выполнении которого эллипс $\boldsymbol{y^2 + 2z^2 = 1}$, $\boldsymbol{x = 0}$, виден из точки $\boldsymbol{M}$ как эллипс с отношением полуосей $\boldsymbol{1 : \sqrt{3}}$.

2003 г.

1. Пусть $\boldsymbol{M}$ — точка пересечения эллипса $\boldsymbol{x^2+2y^2 = 1}$ и параболы $\boldsymbol{y^2 = 2(x-a)}$. При каком значении параметра $\boldsymbol{a}$ касательная к параболе в точке $\boldsymbol{M}$ сопряжена направлению касательной к эллипсу в точке $\boldsymbol{M}$ относительно эллипса?

2. Пусть $\boldsymbol{M}$ — точка пересечения параболы $\boldsymbol{x^2 = 2(y - a)}$ и гиперболы $\boldsymbol{2y^2 - x^2 = 1}$. При каком значении параметра $\boldsymbol{a \geq 0}$ касательная к параболе в точке $\boldsymbol{M}$ сопряжена направлению касательной к гиперболе в точке $\boldsymbol{M}$ относительно гиперболы?

3. При каком значении параметра $\boldsymbol{p > 0}$ параболы $\boldsymbol{y^2 = -2x}$, $\boldsymbol{y^2 = 2p(x + 1)}$ пересекаются под прямым углом?

4. При каком значении параметра $\boldsymbol{p > 0}$ эллипс $\boldsymbol{x^2 + py^2 = 1}$ и парабола $\boldsymbol{y^2 = 2x}$ пересекаются под прямым углом?

2004 г.

1. К поверхности $\boldsymbol{\alpha : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6}$ провести касательную плоскость $\boldsymbol{\rho}$, содержащую прямую $\boldsymbol{x = y = 2 - z}$.
   Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ относительно плоскости $\boldsymbol{\rho}$.

2. К поверхности $\boldsymbol{\alpha : x^2 + 2y^2 - z = 6}$ провести касательную плоскость $\boldsymbol{\rho}$, содержащую прямую $\boldsymbol{-1 - x = y - 3 = \dfrac{z-1}{2}}$.
   Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ относительно плоскости $\boldsymbol{\rho}$.

3. К поверхности $\boldsymbol{\alpha : 2x^2 + 3y^2 = 1 + 4z^2}$ провести касательную плоскость $\boldsymbol{\rho}$, содержащую прямую $\boldsymbol{2x - 1 = y = z}$.
   Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ относительно плоскости $\boldsymbol{\rho}$.

4. К поверхности $\boldsymbol{\alpha : 3x^2 + 2y^2 = 6z^2 - 1}$ провести касательную плоскость $\boldsymbol{\rho}$, содержащую прямую $\boldsymbol{3x + 3 = 2y + 4 = 3z + 3}$.
   Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ относительно плоскости $\boldsymbol{\rho}$.

2005 г.

1. Найти коэффициент $\boldsymbol{a \neq 0}$ в уравнении поверхности
   $$\boldsymbol{\alpha :}\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + y^2 + 2z^2 = 1},$$
   если известно, что поверхность $\boldsymbol{\alpha}$ касается плоскости $\boldsymbol{x + 2y + 6z + 5 = 0}$.

2. Найти коэффициент $\boldsymbol{b \neq 0}$ в уравнении поверхности
   $$\boldsymbol{\alpha :}\quad \boldsymbol{x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 + 3z^2}$$
   если известно, что поверхность $\boldsymbol{\alpha}$ касается плоскости $\boldsymbol{4x + y + 9z + 1 = 0}$.

3. Найти коэффициент $\boldsymbol{a \neq 0}$ в уравнении поверхности
   $$\boldsymbol{\alpha :}\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + 3y^2 = 2z},$$
   если известно, что поверхность $\boldsymbol{\alpha}$ касается плоскости $\boldsymbol{2x + 6y + 2z + 11 = 0}$.

4. Найти коэффициент $\boldsymbol{b \neq 0}$ в уравнении поверхности
   $$\boldsymbol{\alpha :}\quad \boldsymbol{5x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 2z},$$
   если известно, что поверхность $\boldsymbol{\alpha}$ касается плоскости $\boldsymbol{15x + y + 2z + 3 = 0}$.

2006 г.

1. Найти уравнения диаметральных плоскостей для поверхности

$$x^2 - 10x + 3y^2 + 18 = 0\,,$$

которые бы касались эллипсоида

$$\frac{x^2}{16} + y^2 + 5z^2 = 1\,.$$

2. Найти уравнения диаметральных плоскостей для гиперболического цилиндра

$$(x-1)^2 - 2(y-2)^2 = 1\,,$$

которые бы касались эллипсоида

$$\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{7} + \frac{z^2}{5} = 1\,.$$

3. Найти уравнения диаметральных плоскостей для поверхности

$$3(x-5)^2 + (y-2)^2 = 1\,,$$

которые бы касались эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{4} + 9z^2 = 2y\,.$$

4. Найти уравнения диаметральных плоскостей для гиперболического цилиндра

$$5(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1\,,$$

которые бы касались однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{2} + z^2 = 1 + \frac{y^2}{17}\,.$$

2007 г.

1. В прямоугольной системе координат гиперболический параболоид

   задан уравнением $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 2z}$ с параметром $\boldsymbol{a \neq 0}$.

   Найти все значения параметра $\boldsymbol{a > 0}$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного гиперболического параболоида, параллельных плоскости $\boldsymbol{2\sqrt{2}y - z = 0}$ и пересекающихся под углом $\boldsymbol{\pi/3}$.

2. В прямоугольной системе координат однополостный гиперболоид

   задан уравнением $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$ с параметром $\boldsymbol{c \neq 0}$.

   Найти все значения параметра $\boldsymbol{c > 0}$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного однополостного гиперболоида, параллельных плоскости $\boldsymbol{x = 0}$ и пересекающихся под углом $\boldsymbol{\pi/3}$.

3. В прямоугольной системе координат гиперболический параболоид

   задан уравнением $\boldsymbol{2x^2 - b^2y^2 = 2z}$ с параметром $\boldsymbol{b \neq 0}$.

   Найти все значения параметра $\boldsymbol{b > 0}$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного гиперболического параболоида, параллельных плоскости $\boldsymbol{\sqrt{2}x - z = 0}$ и пересекающихся под углом $\boldsymbol{\pi/3}$.

4. В прямоугольной системе координат однополостный гиперболоид

   задан уравнением $\boldsymbol{a^2x^2 + 9y^2 - z^2 = 1}$ с параметром $\boldsymbol{a \neq 0}$.

   Найти все значения параметра $\boldsymbol{a > 0}$, для которых существует пара прямолинейных образующих данного однополостного гиперболоида, параллельных плоскости $\boldsymbol{y = 0}$ и пересекающихся под углом $\boldsymbol{\pi/3}$.

2008 г.

1. Найти уравнение эллипса, если известно, что
   а) полуоси эллипса равны $\mathbf{3}$ и $\mathbf{2\sqrt{2}}$, причем бóльшая полуось лежит на прямой $\boldsymbol{x+y=0}$;
   б) эллипс проходит через точку $\mathbf{(3,1)}$.

2. Найти уравнение гиперболы, если известно, что
   а) действительная и мнимая полуоси гиперболы равны $\mathbf{3\sqrt{2}}$ и $\mathbf{5}$ соответственно, причем мнимая полуось лежит на прямой $\boldsymbol{x+y+1=0}$;
   б) гипербола проходит через точку $\mathbf{(3,2)}$.

3. Найти уравнение эллипса, если известно, что
   а) полуоси эллипса равны $\mathbf{2\sqrt{5}}$ и $\mathbf{2\sqrt{7}}$, причем бóльшая полуось лежит на прямой $\boldsymbol{x+2y+2=0}$;
   б) эллипс проходит через точку $\mathbf{(4,2)}$.

4. Найти уравнение гиперболы, если известно, что
   а) действительная и мнимая полуоси гиперболы равны $\mathbf{2\sqrt{5}}$ и $\mathbf{7}$ соответственно, причем мнимая полуось лежит на прямой $\boldsymbol{2x+y+1=0}$;
   б) гипербола проходит через точку $\mathbf{(2,5)}$.

2009 г.

1. Найти все прямые на поверхности $\boldsymbol{\alpha}$: $\boldsymbol{x^2+4y^2=1+z^2}$,
   проходящие через точку $\mathbf{(1,1,2)}$.
   Вдоль одной из этих прямых по поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ скользит касательная (к поверхности $\boldsymbol{\alpha}$) плоскость $\boldsymbol{\pi}$.
   Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость $\boldsymbol{\pi}$.

2. Найти все прямые на поверхности $\boldsymbol{\alpha}$: $\boldsymbol{x^2-y^2=3z}$,
   проходящие через точку $\mathbf{(2,1,1)}$.
   Вдоль одной из этих прямых по поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ скользит касательная (к поверхности $\boldsymbol{\alpha}$) плоскость $\boldsymbol{\pi}$.
   Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость $\boldsymbol{\pi}$.

3. Найти все прямые на поверхности $\boldsymbol{\alpha}$: $\boldsymbol{2y^2+2z^2=1+x^2}$,
   проходящие через точку $\mathbf{(3,1,2)}$.
   Вдоль одной из этих прямых по поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ скользит касательная (к поверхности $\boldsymbol{\alpha}$) плоскость $\boldsymbol{\pi}$.
   Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость $\boldsymbol{\pi}$.

4. Найти все прямые на поверхности $\boldsymbol{\alpha}$: $\boldsymbol{5z^2-y^2=4x}$,
   проходящие через точку $\mathbf{(1,4,2)}$.
   Вдоль одной из этих прямых по поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ скользит касательная (к поверхности $\boldsymbol{\alpha}$) плоскость $\boldsymbol{\pi}$.
   Найти максимальный угол, на который поворачивается плоскость $\boldsymbol{\pi}$.

2010 г.

1. Провести касательную прямую $\boldsymbol{\alpha}$ к кривой $\boldsymbol{y = 1 - x^4}$ так, чтобы диаметр $\boldsymbol{\beta}$ эллипса $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{20} = 1}$, сопряженный направлению прямой $\boldsymbol{\alpha}$, проходил через точку $\boldsymbol{(1, 1)}$. Найти угол между прямыми $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

2. Провести касательную прямую $\boldsymbol{\alpha}$ к кривой $\boldsymbol{y = 1 + x^6}$ так, чтобы диаметр $\boldsymbol{\beta}$ гиперболы $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{12} = 1}$, сопряженный направлению прямой $\boldsymbol{\alpha}$, проходил через точку $\boldsymbol{(2, 2)}$. Найти угол между прямыми $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

3. Провести касательную прямую $\boldsymbol{\alpha}$ к кривой $\boldsymbol{y = 7 + x^4}$ так, чтобы диаметр $\boldsymbol{\beta}$ эллипса $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{28} = 1}$, сопряженный направлению прямой $\boldsymbol{\alpha}$, проходил через точку $\boldsymbol{(-1, 1)}$. Найти угол между прямыми $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

4. Провести касательную прямую $\boldsymbol{\alpha}$ к кривой $\boldsymbol{y = 2 - x^6}$ так, чтобы диаметр $\boldsymbol{\beta}$ гиперболы $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{18} = 1}$, сопряженный направлению прямой $\boldsymbol{\alpha}$, проходил через точку $\boldsymbol{(3, -3)}$. Найти угол между прямыми $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

2011 г.

1. Пусть $\boldsymbol{p}$ — некоторое положительное число.
   Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $\boldsymbol{y = 0}$, для которых прямые $\boldsymbol{x = p}$, $\boldsymbol{x = 3p}$ являются директрисами.
   При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь?
   При каком значении $\boldsymbol{p > 1}$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $\boldsymbol{y - x = \sqrt{2} - 3}$?

2. Пусть $\boldsymbol{q}$ — некоторое отрицательное число.
   Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $\boldsymbol{y = 0}$, для которых прямые $\boldsymbol{x = q}$, $\boldsymbol{x = 3q}$ являются директрисами.
   При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь?
   При каком значении $\boldsymbol{q < -1}$ этот эллипс (максимальной площади) касается прямой $\boldsymbol{y + x = \sqrt{2} - 3}$?

3. Пусть $\boldsymbol{p}$ — некоторое положительное число.
   Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $\boldsymbol{x = 0}$,
   для которых прямые $\boldsymbol{y = p}$, $\boldsymbol{y = 3p}$ являются директрисами.
   При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь?
   При каком значении $\boldsymbol{p > 1}$ этот эллипс (максимальной площади)
   касается прямой $\boldsymbol{y - x = 3 - \sqrt{2}}$?

4. Пусть $\boldsymbol{q}$ — некоторое отрицательное число.
   Найти уравнение семейства эллипсов с центром на прямой $\boldsymbol{x = 0}$,
   для которых прямые $\boldsymbol{y = q}$, $\boldsymbol{y = 3q}$ являются директрисами.
   При каком значении полуосей эллипс имеет максимальную площадь?
   При каком значении $\boldsymbol{q < -1}$ этот эллипс (максимальной площади)
   касается прямой $\boldsymbol{y - x = \sqrt{2} - 3}$?

2012 г.

1. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{11} = 1}$,
   проходящие через прямую $\boldsymbol{x = 5,\ y = 0}$.
   При каких значениях параметра $\boldsymbol{b}$ эти плоскости составляют
   прямой двугранный угол?

2. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{64} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$,
   проходящие через прямую $\boldsymbol{y = 10,\ z = 0}$.
   При каких значениях параметра $\boldsymbol{c}$ эти плоскости составляют
   прямой двугранный угол?

3. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{13} + \dfrac{z^2}{36} = 1}$,
   проходящие через прямую $\boldsymbol{x = 0,\ z = 10}$.
   При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ эти плоскости составляют
   прямой двугранный угол?

4. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{14} = 1}$,
   проходящие через прямую $\boldsymbol{x = 0,\ y = 13}$.
   При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ эти плоскости составляют
   прямой двугранный угол?

2013 г.

1. Цилиндр $\boldsymbol{\Sigma}$ в $\mathbb{R}^3$ задан своим сечением $\boldsymbol{x^2+2xy+2y^2+4x+4y+3=0}$ с плоскостью $\boldsymbol{z=0}$ и направлением $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{(2,3,-13)}$ прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{(1,1,0)}$ относительно цилиндра $\boldsymbol{\Sigma}$.
2. Цилиндр $\boldsymbol{\Sigma}$ в $\mathbb{R}^3$ задан своим сечением $\boldsymbol{x^2-2xy+4x-4y-1=0}$ с плоскостью $\boldsymbol{z=0}$ и направлением $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{(2,5,7)}$ прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{(1,2,0)}$ относительно цилиндра $\boldsymbol{\Sigma}$.
3. Цилиндр $\boldsymbol{\Sigma}$ в $\mathbb{R}^3$ задан своим сечением $\boldsymbol{2xy-5x^2-y^2+4x+6y+1=0}$ с плоскостью $\boldsymbol{z=0}$ и направлением $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{(3,4,14)}$ прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{(1,3,0)}$ относительно цилиндра $\boldsymbol{\Sigma}$.
4. Цилиндр $\boldsymbol{\Sigma}$ в $\mathbb{R}^3$ задан своим сечением $\boldsymbol{x^2+4xy-y^2+2x+4y-4=0}$ с плоскостью $\boldsymbol{z=0}$ и направлением $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{(1,1,7)}$ прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{(1,4,0)}$ относительно цилиндра $\boldsymbol{\Sigma}$.