**Программа курса**

# ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ТОПОЛОГИЮ И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

## Глава 1. Топологические пространства

Топология, топологическое пространство. Гомеоморфизм, сравнение топологий. Открытые и замкнутые множества. Внутренность, замыкание и граница множества.

Непрерывные отображения.

Примеры топологических пространств. Дискретная топология. Метрические пространства, метризуемая топология. Подпространства топологического пространства, индуцированная топология. Произведение топологических пространств. Фактор-пространство. Шары, сферы, действительное и комплексное проективные пространства, лист Мебиуса, бутылка Клейна.

Связные топологические пространства, связные множества в топологическом пространстве. Сохранение связности при непрерывном отображении. Связность объединения семейства связных множеств, имеющего непустое пересечение. Связная компонента точки. Вполне несвязные пространства. Компоненты связности.

Хаусдорфовы пространства. Принцип продолжения тождеств, замкнутость графика непрерывного отображения. Нормальные пространства. Нормальность метрического пространства.

Компактность. Компактные топологические пространства и компактные множества в топологическом пространстве. Сохранение компактности при непрерывном отображении. Связь компактных и замкнутых множеств. Теорема Тихонова (непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово есть гомеоморфизм). Теорема Вейерштрасса. Компактность произведения. Нормальность хаусдорфова компактного пространства. Ограниченность компактного множества в метрическом пространстве. Компактные метрические пространства. Компактные множества в евклидовом пространстве.

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Стягиваемые пространства. Деформационный ретракт.

Склеивание топологических пространств по непрерывному отображению. Конечный клеточный комплекс, полиэдр, эйлерова характеристика полиэдра.

Гомотопические свойства клеточных комплексов. Инвариантность гомотопического типа клеточного комплекса по отношению к (а) изменению порядка приклеивания клеток, (б) замены приклеивающего отображения на гомотопное ему, (в) замены пространства, к которому приклеивается клетка, на гомотопически ему эквивалентное.

## Глава 2. Гладкие многообразия

Топологическое многообразие. Карты и атласы, дифференцируемая структура. Гладкое многообразие. Гладкие отображения, диффеоморфизмы. Примеры гладких многообразий: евклидово пространство, векторное пространство, сфера, проективные пространства, грассманово многообразие. Произведение многообразий.

Разбиение единицы. Определение разбиения единицы, подчиненного данному открытому покрытию. Существование гладкой функции на $\mathbb{R}^n$, равной единице на шаре $B_1$ и нулю вне шара $B_2$. Вписанность покрытий, паракомпактные пространства. Паракомпактность локально компактного хаусдорфова пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности. Существование разбиения единицы, подчиненного данному открытому покрытию.

Касательный вектор, касательное пространство многообразия в точке. Лемма о локализации. Координатный базис, координаты касательного вектора в локальной системе координат, преобразование координат вектора при замене координат. Отождествление касательного пространства к векторному пространству $V$ с самим $V$. Дифференциал гладкого отображения. Дифференциал композиции отображений (цепное правило). Представление дифференциала в координатном базисе, матрица Якоби. Касательное расслоение.

Векторные поля на многообразии. Векторное поле как сечение касательного расслоения. Векторное поле как дифференцирование алгебры гладких функций. Алгебраические операции над векторными полями, скобка Ли. Координатное представление векторного поля. Локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем. Полные векторные поля.

Классические версии теорем об обратной функции и о неявной функции. Теорема об обратной функции для многообразий. Подмногообразия, погружения и вложения многообразий. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Малая теорема о неявной функции. Трансверсальность отображения к подмногообразию, большая теорема о неявной функции.

Множества меры нуль в многообразии. Теорема Сарда.

Вложение многообразий в евклидово пространство. Вложимость компактного многообразия в евклидово пространство большой размерности. Вложимость компактного $n$-мерного многообразие в евклидово пространство размерности $2n+1$ (слабая теорема Уитни). Сильная теорема Уитни (без доказательства).

Многообразия с краем. Инвариантность края. Теорема о неявной функции для многообразий с краем.

Невозможность ретракции компактного многообразия на его край. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Ориентация многообразия. Классификация одномерных и компактных двумерных многообразий.

## Глава 3. Теория Морса

Симметричные билинейные формы на конечномерном векторном пространстве, нулевое пространство формы, степень вырождения и индекс формы. Невырожденные критические точки гладкой функции. Гессиан функции в критической точке, индекс критической точки, связь гессиана с матрицей вторых производных. Лемма Морса. Изолированность невырожденных критических точек. Функции Морса.

Строение многообразия вдали от критических точек. Строение многообразия вблизи критической точки. Теорема Морса. Равенство Морса. Неравенства Морса. Теорема Риба. Существование функций Морса.

## Глава 4. Введение в тензорный анализ

Тензорная алгебра над конечномерным векторным пространством. Сопряженное пространство, каноническое спаривание. Тензоры валентности $(r, s)$. Алгебраические операции над тензорами, тензорное произведение и свертка. Координаты тензора, правило преобразования координат тензора при замене базиса.

Гладкие тензорные поля валентности $(r, s)$ на многообразии. Алгебраические операции на тензорных полях. Характеризация тензорных полей валентности $(0, s)$ и $(1, s)$ как полилинейных отображений на $\mathcal{F}$-модуле $\mathcal{V}$. Векторные и ковекторные поля, дифференциал функции как ковекторное поле. Координаты тензорного поля относительно локальной системы координат, правило преобразования координат тензорного поля при замене координат.

Связность на многообразии. Символы Кристоффеля, преобразование символов Кристоффеля при замене координат. Ковариантная производная тензорного поля, выражение в координатах.

Тензоры кручения и кривизны. Выражение координат тензоров кручения и кривизны через символы Кристоффеля. Формула коммутации для вторых ковариантных производных.

Векторные поля вдоль параметризованной кривой. Абсолютная производная. Параллельный перенос вдоль кривой.

## Глава 5. Римановы многообразия

Римановы многообразия. Существование римановой метрики. Связь с внутренней геометрией поверхности. Отождествление ко- и контравариантных тензоров с помощью метрического тензора, поднятие и опускание индексов тензора. Изометрия римановых многообразий.

Связность, совместная с метрикой. Правило дифференцирования скалярного произведения. Связность Леви-Чивиты. Тензор кривизны риманова многообразия, симметрии тензора кривизны. Секционная кривизна, тензор Риччи, скалярная кривизна.

Длина кривой, естественная параметризация кривой. Геодезические. Пропорциональность параметра на геодезической длине дуги. Дифференциальные уравнения геодезических. Единственность и локальное существование геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении. Экспоненциальное отображение. Локальная диффеоморфность экспоненциального отображения в окрестности нулевого вектора. Краевая задача для геодезических, единственность и локальное существование короткой геодезической, соединяющей две близкие точки.

Поля Якоби вдоль геодезической. Задача Коши для уравнения Якоби. Первый интеграл уравнения Якоби: линейность скалярного произведения поля Якоби с вектором скорости.

Параметризованная поверхность в многообразии. Векторное поле вдоль параметризованной поверхности. Абсолютные частные производные векторного поля вдоль поверхности, формула коммутации для них.

Геодезическая вариация геодезической. Связь геодезических вариаций с полями Якоби. Выражение дифференциала экспоненциального отображения в терминах полей Якоби. Лемма Гаусса.

Геодезические и кратчайшие. Геодезическая длины $\leq r$, выходящая из $p$ является кратчайшей, если экспоненциальное отображение $\exp_p$ инъективно на шаре $B_r$. Каждая кратчайшая, параметризованная длиной дуги, является геодезической. Достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей. Локальное существование и единственность кратчайшей, соединяющей две данные точки.

Геодезические в евклидовом пространстве, на круглом цилиндре и сфере.

Расстояние между точками риманова многообразия. Метрическая полнота и геодезическая полнота. Лемма о существовании кратчайшей, соединяющей две данные точки, в геодезически полном римановом многообразии. Эквивалентность метрической и геодезической полноты (теорема Ринова - Хопфа).

### Глава 6. Вариационная теория геодезических

Пространство кусочно-гладких путей. Вариация пути, векторное поле вариации.

Сравнение функционалов длины и энергии на пространстве путей.

Формула первой вариации функционала энергии. Критические точки функционала энергии.

Гессиан функционала энергии. Формула второй вариации.

Сопряженные точки. Связь сопряженных точек с критическими точками экспоненциального отображения. Существование в полном римановом многообразии пары точек, не сопряженных ни вдоль какой геодезической.

Нулевое пространство гессиана. Гессиан вырожден тогда и только тогда, когда концы геодезической сопряжены. Конечность степени вырождения гессиана.

Теорема об индексе (без доказательства).

Метрика на $\Omega(M;p,q)$. Конечномерная аппроксимация пространства путей $\Omega^a$, удовлетворяющих $E(\omega) \leq a$. Гладкая структура на многообразии ломаных геодезических. Гомотопическая эквивалентность пространства путей и многообразия ломаных геодезических. Конечномерная модель $(\operatorname{Int}\Omega^a(t_0,t_1,\ldots,t_k),E')$ бесконечномерной задачи $(\operatorname{Int}\Omega^a,E)$ (без доказательств).

Пространство $\Omega^a(M;p,q)$ имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса, число и размерность клеток которого определяются геодезическими из $p$ в $q$ (без доказательства).

Бесконечные клеточные комплексы. Основная теорема теории Морса (без доказательства).

Отсутствие сопряженных точек в многообразии неположительной секционной кривизны. Теорема Адамара-Картана.

## Список литературы

[1] П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., “Наука”, 1977.
[2] Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М., “Наука”, 1968.
[3] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., “Физматгиз”, 1961.
[4] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М., “Наука”, 1979.
[5] Дж. Келли. Общая топология. М., “Наука”, 1968.
[6] Дж. Милнор. Теория Морса. М., “Мир”, 1965.
[7] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М., “Мир”, 1972.
[8] М.М. Постников. Введение в теорию Морса. М., “Наука”, 1971.
[9] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., “Наука”, 1967.
[10] Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., “Мир”,
[11] М. Хирш. Дифференциальная топология. М., “Мир”, 1979.
[12] Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М., “ИЛ”, 1948.