

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра геометрии и топологии

В. А. ШАРАФУТДИНОВ
ВВЕДЕНИЕ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ТОПОЛОГИЮ
И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

Учебное пособие

Новосибирск

2018

УДК 515.12 515.16

ББК 22.15

Ш 250

Рецензент
академик РАН И. А. Тайманов

Шарафутдинов, В. А.

Ш 250 Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию: учеб. пособие / В. А. Шарафутдинов; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. – 282 с. ISBN 978-5-4437-0718-1

Книга возникла из лекционного курса, читавшегося автором в Новосибирском университете и содержавшего систематическое изложение современной топологии. Она охватывает следующие разделы: основы общей топологии, гладкие многообразия, теория Морса, тензорный анализ, римановы многообразия, вариационная теория геодезических. Книга рассчитана на студентов-математиков и физиков, а также на аспирантов и научных работников в области математики и смежных областях.

УДК 515.12 515.16

ББК 22.15

© Новосибирский государственный
университет, 2018

ISBN 978-5-4437-0718-1

© В. А. Шарафутдинов, 2018

Оглавление

Предисловие	6
1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА	13
1.1. Определение топологического пространства	13
1.2. Непрерывные отображения	15
1.3. Примеры топологических пространств	16
1.4. Связные пространства и связные множества	24
1.5. Хаусдорфовы и нормальные пространства	26
1.6. Компактность	27
1.7. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность	33
1.8. Конечные клеточные комплексы. Эйлерова характеристика	35
1.9. Гомотопические свойства клеточных комплексов	39
2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ	47
2.1. Определение гладкого многообразия	47
2.2. Примеры гладких многообразий	51
2.3. Разбиение единицы	56
2.4. Касательное пространство и дифференциал	62
2.5. Векторные поля	71
2.6. Подмногообразие и теорема о неявной функции	76
2.7. Теорема Сарда	85
2.8. Вложение многообразий в евклидово пространство	92
2.9. Многообразие с краем	98
2.10. Теорема Брауэра о неподвижной точке	103
2.11. Ориентация многообразия	105
2.12. Классификация одномерных и двумерных многообразий	108

2.13. Риманова метрика	110
3. ТЕОРИЯ МОРСА	113
3.1. Пример функции Морса	113
3.2. невырожденные критические точки	117
3.3. Строение многообразия вдали от критических точек . .	125
3.4. Многообразие вблизи невырожденной критической точки	127
3.5. Теорема Морса	133
3.6. Неравенства Морса	137
3.7. Группы гомологий и числа Бетти	138
3.8. Два примера	156
3.9. Дальнейшее развитие теории Морса	159
4. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА	162
4.1. Тензорная алгебра над векторным пространством	162
4.2. Тензорные поля на многообразии	170
4.3. Связность на многообразии	177
4.4. Тензоры кручения и кривизны	186
4.5. Параллельный перенос	189
5. РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ	193
5.1. Определение риманова многообразия	193
5.2. Тензор кривизны риманова многообразия	200
5.3. Геодезические и экспоненциальное отображение	206
5.4. Поля Якоби	215
5.5. Геодезические и кратчайшие	224
5.6. Полные римановы многообразия	230
6. ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ	235
6.1. Пространство путей гладкого многообразия	235
6.2. Функционал длины и функционал энергии	238
6.3. Формула первой вариации	239
6.4. Формула второй вариации	245
6.5. Нулевое пространство гессиана. Сопряженные точки . .	249
6.6. Теорема об индексе	255
6.7. Конечномерная аппроксимация пространства путей . .	260
6.8. Топология пространства путей	265
6.9. Некоторые соотношения между топологией и кривизной	269

Литература	275
Предметный указатель	277

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой обработку годового лекционного курса под тем же названием, который автор читал на протяжении многих лет в Новосибирском государственном университете. В расписании этот курс именуется более кратко “Риманова геометрия”.

Топология, зародившаяся в конце XIX века в недрах действительного и комплексного анализа под первоначальным названием *analysis situs*, в настоящее время является обширной дисциплиной, состоящей из нескольких больших разделов (общая топология; алгебраическая топология; гомотопическая топология; дифференциальная топология, или теория гладких многообразий; теория узлов; вычислительная топология) с разносторонними связями между ними и другими математическими дисциплинами, а также имеющей многочисленные приложения как внутри математики, так и за ее пределами.

Особо следует отметить плодотворные двусторонние связи между топологией и некоторыми современными разделами теоретической физики (квантовая механика, теория поля, теория струн). В наше время каждый математик (как, впрочем, и физик-теоретик) должен обладать минимальной топологической подготовкой независимо от его узкой специализации.

Второй основной предмет наших лекций, *риманова геометрия*, или *теория римановых многообразий*, также имеет большую и поучительную историю. Основы этой теории были заложены Риманом в 1846 г. *Тензорный анализ*, возникший на рубеже XIX и XX веков в работах Риччи и Леви-Чивиты, оказался наиболее подходящим аналитическим аппаратом для римановой геометрии. Наряду с Риманом, основоположником римановой геометрии по праву считается Эйнштейн, поскольку созданная им *общая теория относительности* с математической точки зрения является некоторой разновидностью римановой

геометрии (точнее, теорией *псевдоримановых*, или *лоренцевых* многообразий). Общая теория относительности оказала (и продолжает оказывать) большое влияние на развитие римановой геометрии.

Первые шесть параграфов главы 1 посвящены основам общей топологии. Приведя определение топологического пространства, мы затем обсуждаем три основные понятия общей топологии: непрерывность, связность и компактность. Приводятся точные формулировки всех определений и утверждений, но во многих случаях вместо подробного доказательства приводится ссылка на соответствующую теорему из “Анализа” (так, ради краткости, мы именуем содержание курса математического анализа, читаемого на первых двух курсах математического факультета). Многие теоремы общей топологии являются непосредственными обобщениями соответствующих теорем “Анализа”, и мы надеемся, что вдумчивый читатель сможет самостоятельно воспроизвести опущенные доказательства либо найти их в рекомендованной литературе. Такой стиль обучения требует несколько большего времени, но приносит гораздо больше пользы, чем чтение подробно изложенного текста.

В последних трех параграфах первой главы вводятся основные понятия гомотопической топологии — гомотопия и гомотопическая эквивалентность — и обсуждаются гомотопические свойства конечных клеточных комплексов. В последнем параграфе стиль изложения резко меняется: мы приводим достаточно подробные доказательства всех утверждений. Частично это объясняется тем, что материал последнего параграфа не столь популярен, как материал предыдущих параграфов, и не отражен в учебной литературе. Но в большей степени это продиктовано желанием автора дать читателю представление о специфическом стиле гомотопической топологии, для которого характерно сочетание наглядных геометрических картинок и громоздких многострочных формул.

Изложение основного предмета нашего курса — дифференциальной топологии — начинается во второй главе, содержащей основы теории гладких многообразий. Не буду здесь описывать содержание главы, оно близко к стандартному и хорошо отражено в оглавлении. Отмечу лишь, что при доказательстве существования разбиения единицы в §2.3 нам придется вернуться на некоторое время в общую топологию, чтобы изложить основные факты, относящиеся к паракомпакт-

ным топологическим пространствам. Подобные ситуации весьма типичны: занимаясь той или иной задачей, на первый взгляд далекой от общей топологии (а иногда — далекой от любой топологии), мы нередко сталкиваемся с общетопологическими вопросами.

Следует предупредить читателя, впервые знакомящегося с предметом, о трудности, поджидающей его в самом начале второй главы: приводимое в §2.1 определение гладкого многообразия довольно громоздко и требует определенного терпения и усидчивости для своего усвоения. Здесь можно дать лишь один совет: наберитесь терпения и постарайтесь подробно разобраться с каждым из примеров, приводимых в §2.2. Через некоторое время произойдет качественный скачок в вашем понимании предмета, и это определение станет очевидным.

Некоторые авторы избегают описанной в предыдущем абзаце логической трудности, с самого начала ограничиваясь рассмотрением подмногообразий евклидова пространства. Например, так поступает Дж. Милнор в своей прекрасной книге “Топология с дифференциальной точки зрения”; в русском переводе это — вторая часть книги [12] (цифры в квадратных скобках означают ссылки на список литературы, приведенный в конце книги). Такой подход не уменьшает степени общности, поскольку, согласно теореме Уитни, любое многообразие можно вложить в евклидово пространство (см. теорему 2.8.1). Определение гладкого многообразия становится гораздо проще при таком подходе, но в дальнейшем возникают другие логические трудности того же характера. Образно говоря, линейная структура объемлющего евклидова пространства постоянно “путается под ногами”, мешая инвариантному (т. е. независимому от выбора координат) истолкованию многих понятий.

Роль гладких многообразий в современной математике двоякая. С одной стороны, многообразия являются наиболее адекватным аппаратом для глобального изучения многих нелинейных задач. Здесь уместно привести цитату из книги М. Морса “Вариационное исчисление в целом”: “Классический анализ применяется при решении нелинейных задач как средство предварительного локального изучения, последующая глобализация производится с помощью топологии или теории групп”. Материал второй главы вполне достаточен для освоения этой роли многообразий.

С другой стороны, гладкие многообразия сами являются объек-

том изучения в дифференциальной топологии. Одной из основных задач здесь является проблема классификации, до сих пор до конца не решенная. Приведем точную постановку: классифицировать, с точностью до диффеоморфизма, все компактные гладкие многообразия данной размерности n . Читателю, не знакомому с предметом, может показаться удивительным следующий факт: в размерностях $n = 3$ и $n = 4$ проблема классификации гораздо труднее, чем для $n \geq 5$. *Трехмерная топология* и *четырёхмерная топология* являются двумя большими разделами дифференциальной топологии, которые в настоящее время интенсивно развиваются и находят новые важные приложения в теоретической физике.

По-видимому, М. Морс первым обратил внимание на глубокие связи, существующие между топологией многообразия и количеством и характером критических точек гладкой действительной функции, определенной на этом многообразии. Основные работы Морса опубликованы в 20-е годы XX века. Сейчас этот раздел дифференциальной топологии принято называть *теорией Морса*. Основы этой теории излагаются в главе 3. Здесь наше изложение ограничено естественными рамками: мы приводим лишь те факты теории Морса, которые можно доказать, не прибегая к средствам алгебраической топологии. Алгебраическая топология остается вне рамок нашего курса, и мы не предполагаем у читателя знания этой дисциплины. Но все-таки при изложении теории Морса нам приходится сделать одно исключение из последнего правила. Основным результатом главы 3 является теорема Морса (теорема 3.5.2). В нашем изложении утверждение теоремы Морса сформулировано в терминах клеточных комплексов. Когда Морс получал эти результаты, клеточных комплексов еще не существовало. Сам Морс формулировал свои основные результаты в виде некоторых неравенств (*неравенства Морса*), связывающих числа Бетти рассматриваемого многообразия с количествами критических точек различных индексов гладкой функции, определенной на этом многообразии, при условии, что все критические точки невырождены. *Числа Бетти* (= ранги групп гомологий) являются одним из понятий алгебраической топологии. Нам кажется неестественным изложение теории Морса без упоминания неравенств Морса. Поэтому мы включили §3.7, в котором приводится определение (целочисленных) групп гомологий компактного многообразия и даже вычисляются эти группы

для некоторых многообразий. Этот параграф ни в коей мере нельзя считать введением в теорию гомологий, для знакомства с этой теорией надо прослушать курс алгебраической топологии либо почитать соответствующие учебники. Глава 3 завершается небольшим обзором дальнейшего развития теории Морса в §3.9. Здесь мы приводим (без доказательства) теорему Смейла, которая вытекает из важной *теоремы об h -кобордизме*, лежащей в основе классификации многообразий размерности ≥ 5 . Чтобы проиллюстрировать силу этой теоремы, мы показываем, как из нее вытекает гипотеза Пуанкаре в размерности ≥ 5 .

Глава 4 посвящена основам *тензорного анализа*. Здесь наше изложение несколько избыточно по сравнению с тем, что нужно для понимания двух последних глав. Отчасти это связано со вкусами автора, считающего тензорный анализ своей “узкой специальностью”. Но в большей степени эта избыточность обусловлена следующим: владение основами тензорного анализа поможет вашей будущей работе во многих областях, порой весьма далеких от чистой математики (электродинамика, задачи теории упругости, кристаллография и многие другие).

Глава 5 является введением в риманову геометрию. Этот предмет настолько обширен, что приходится делать выбор вопросов, которые могут быть освещены в рамках одной главы. Мы сконцентрировались на изучении *геодезических* в римановом многообразии (аналог прямых в евклидовом пространстве), но не стали ограничиваться локальной теорией, включив несколько теорем о глобальном поведении геодезических. В частности, глава завершается доказательством теоремы Ринова – Хопфа об эквивалентности геодезической полноты и метрической полноты риманова многообразия.

Заключительная глава нашего курса называется “Вариационная теория геодезических”. Эту главу следует рассматривать как важнейшую часть курса, поскольку она объединяет и развивает основные идеи глав 3 и 5. Кроме этого, роль шестой главы состоит в следующем. Когда-то *вариационное исчисление* читалось на математических факультетах большинства российских университетов. Позднее этот курс был исключен из списка обязательных на том основании, что он перекрывается курсом *функционального анализа*. Тем не менее, последнее утверждение зачастую далеко от истины. Правда, некоторые важные аспекты вариационного исчисления излагаются в курсе *теоретиче-*

ской механики под названием *вариационные принципы механики*, но и там им не всегда уделяется должное внимание. Говоря весьма приблизительно, вариационное исчисление занимается поиском экстремалей и изучением их свойств для различных нелинейных функционалов. В главе 6 мы развиваем вариационное исчисление для единственного функционала — *функционала энергии* (называемого также *функционалом действия*, что более правильно с физической точки зрения). Этот функционал сыграл особую роль в вариационном исчислении: многие важные утверждения сначала доказывались для функционала энергии и лишь затем обобщались на более общие функционалы. Мы надеемся, что заинтересованный читатель, усвоив содержание шестой главы, сможет потом без большого труда освоить и остальные разделы вариационного исчисления, например, по прекрасному учебнику [5].

Выше мы уже упомянули гипотезу Пуанкаре. Завершая предисловие, не могу удержаться от краткого рассказа об истории этой гипотезы, насчитывающей ровно сто лет и являющейся, пожалуй, самой яркой страницей в истории дифференциальной топологии и римановой геометрии. Надеюсь, что хотя бы один молодой математик, вдохновленный этой историей, решит стать профессиональным топологом.

В 1904 г. А. Пуанкаре сформулировал следующий вопрос: “Верно ли, что компактное односвязное n -мерное многообразие гомеоморфно сфере S^n , если оно имеет те же группы гомологий, что и S^n ?” Сам Пуанкаре знал ответ лишь в двумерном случае. В начале 60-х годов прошлого века гипотеза была доказана в размерностях ≥ 5 . Как мы уже отметили выше, это произошло в результате развития теории Морса. Таким образом, гипотеза Пуанкаре оставалась открытой в размерностях 3 и 4. Прорыв в четырехмерной топологии произошел в середине 80-х годов в значительной степени благодаря идеям, пришедшим из квантовой механики (поля Янга – Миллса). В частности, была доказана четырехмерная гипотеза Пуанкаре. Трехмерный случай оказался самым трудным. Отметим, что трехмерная гипотеза Пуанкаре может быть сформулирована без упоминания гомологий: “Верно ли, что компактное односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно (= диффеоморфно) сфере S^3 ?” Известно несколько подходов к этой проблеме, порой приводивших к интересным побочным результатам, но не к доказательству гипотезы. В частности, Р. Гамильтон в середине 80-х годов предложил подход, основанный на использовании так называе-

мого *потока Риччи*. Сам Гамильтон на этом пути доказал трехмерную гипотезу Пуанкаре лишь в весьма частном случае. Полностью подход Гамильтона был реализован Г. Я. Перельманом, опубликовавшим доказательство трехмерной гипотезы Пуанкаре в 2004 г. Фактически Перельман доказал *геометризационную гипотезу Тёрстона*, значительно более общую, чем трехмерная гипотеза Пуанкаре. В доказательстве Перельмана наибольшее впечатление производит разнообразие применяемых им методов, которые Перельман усиливает и развивает. Так, он успешно использует совсем недавно созданную (при участии физиков) теорию нелинейных параболических уравнений. Кроме того, Перельман применяет разнообразные результаты и методы римановой геометрии, а также методы нерегулярной геометрии. Последнее направление в геометрии, на Западе часто именуемое *русской геометрией*, было заложено в работах А. Д. Александрова, являющегося, кстати, основателем кафедры геометрии и топологии в НГУ.

К сожалению, учебный план не предусматривает практических занятий по нашему курсу. В связи с этим большое значение приобретают *упражнения*, приводимые в конце большинства параграфов. Автор настоятельно рекомендует читателю выполнять эти упражнения по ходу чтения или хотя бы подумать над ними.

Будучи учебным пособием, настоящая книга ни в коей мере не претендует на оригинальность. Автор, не стесняясь и не заботясь о приоритете, использовал отдельные абзацы и более значительные фрагменты из других книг, если находил их подходящими для этого курса. Особенно велико влияние замечательной книги [10] Джона Милнора в главах 3 и 6 нашего курса. Среди топологов бытует мнение: если какой-то вопрос затронут в одной из книг или статей Милнора, то лучшего изложения этого вопроса не найти. Автор на себе испытал справедливость этого тезиса, несколько раз пытаясь видоизменить изложение Милнора; результат неизменно оказывался значительно хуже, чем у Милнора.

Приношу свою искреннюю благодарность моим помощникам Александру Маслею, сделавшему большинство рисунков книги, и Андрею Голдину, проделавшему большую работу по объединению моих разрозненных лекций в цельную книгу.

Новосибирск, октябрь 2017

В.А. Шарафутдинов

Глава 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Определение топологического пространства

Топология на множестве — это минимальная структура, позволяющая определить предел, непрерывность и другие связанные с непрерывностью понятия.

Пусть X — произвольное множество, элементы которого называем точками, и $\mathcal{S}(X)$ — множество всех подмножеств множества X .

Определение 1.1.1. Семейство $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}(X)$ подмножеств множества X называется топологией на X , если оно удовлетворяет следующим трем аксиомам.

1. Пустое множество и все пространство принадлежат топологии, т. е. $\emptyset \in \mathcal{T}$ и $X \in \mathcal{T}$.

2. Объединение любого семейства множеств из \mathcal{T} снова принадлежит \mathcal{T} ; т. е. если $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство подмножеств множества X , таких, что каждое $U_\alpha \in \mathcal{T}$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

3. Пересечение конечного семейства множеств из \mathcal{T} снова принадлежит \mathcal{T} ; т. е. если $\{U_k\}_{k=1}^n$ — конечный набор подмножеств множества X таких, что каждое $U_k \in \mathcal{T}$, то $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{T}$.

Множество вместе с зафиксированной на нем топологией называется топологическим пространством.

Топологическое пространство обозначается (X, \mathcal{T}) или просто X , когда из контекста ясно, о какой топологии идет речь. Принадлежащие \mathcal{T} множества называются *открытыми* (в топологии \mathcal{T}). В этой терминологии наши аксиомы звучат так: пустое множество и все пространство являются открытыми множествами, объединение любого числа открытых множеств открыто, пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Множество $F \subset X$ в топологическом пространстве (X, \mathcal{T}) называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus F$ открыто. Из приведенных аксиом следует, что (докажите): пустое множество и все пространство являются замкнутыми множествами, пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто, объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Биективное отображение $f : X \rightarrow X'$ называется *гомеоморфизмом* топологического пространства (X, \mathcal{T}) на топологическое пространство (X', \mathcal{T}') , если произвольное $A \subset X$ принадлежит \mathcal{T} тогда и только тогда, когда его образ $f(A)$ принадлежит \mathcal{T}' . Говорим, что два топологических пространства *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм одного на другое. Будучи отождествленными с помощью гомеоморфизма, гомеоморфные пространства устроены одинаково с точки зрения нашей аксиоматики, хотя первоначально могут иметь совершенно разную природу.

Две топологии \mathcal{T} и \mathcal{T}' на одном и том же множестве X можно иногда сравнивать между собой, поскольку обе они являются подмножествами множества $\mathcal{S}(X)$. Говорим, что топология \mathcal{T} *не сильнее* топологии \mathcal{T}' и пишем $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$, если $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Часто вместо термина *не сильнее* используется менее четкий термин *слабее*.

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Говорим, что множество $O \subset X$ является *окрестностью* множества A , если найдется такое открытое U , что $A \subset U \subset O$. В частном случае одноточечного множества $A = \{x\}$ говорим об *окрестности точки* $x \in X$.

Пусть по-прежнему A — множество в топологическом пространстве X . Говорим, что точка $x \in A$ является *внутренней точкой* множества A , если найдется окрестность этой точки, целиком лежащая в A . Множество всех таких точек обозначается $\overset{\circ}{A}$ и называется *внутренностью* множества A . Докажите: множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $A \subset X$, если любая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с A . Подчеркнем отличие этого понятия от понятия предельной точки: точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества A , если любая окрестность этой точки содержит отличные от x точки множества A . Множество всех точек прикосновения множества A обозначается \bar{A} и называется *замыканием* множества A . Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием (докажите).

Точка $x \in X$ называется *граничной точкой* множества $A \subset X$, если любая окрестность этой точки имеет непустое пересечение как с самим множеством A , так и с его дополнением. Множество всех таких точек обозначается \dot{A} (иногда ∂A) и называется *границей* множества A .

Упражнения

1. Найдите все топологии на множестве, состоящем из двух (трех) точек.

2. Внутренность множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A ; докажите. Двойственное утверждение: замыкание множества A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A .

$$3. (A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$4. \dot{A} = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

1.2. Непрерывные отображения

Пусть X и Y — два топологических пространства. Говорим, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $x \in X$, если для любой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x)$ найдется такая окрестность $U \subset X$ точки x , что $f(U) \subset V$.

Очевидна родственность этого определения с известным из “Анализа” определением непрерывности действительной функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ “на ε/δ -языке”: функция непрерывна в точке $x \in (a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x' - x| < \delta$ следует $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ для любой точки $x' \in (a, b)$. Как хорошо известно, это эквивалентно определению непрерывности “на языке последовательностей”: для любой сходящейся к x последовательности x_n последовательность $f(x_n)$ должна сходиться к $f(x)$. Важное предупреждение: эти два определения вовсе не эквивалентны для отображения $f : X \rightarrow Y$ произвольных

топологических пространств. Они становятся эквивалентными, если потребовать, чтобы X и Y удовлетворяли первой аксиоме счетности. Топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если для любой точки $x \in X$ существует такая счетная система $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ окрестностей, что для любой окрестности U точки x найдется такое n , что $U_n \subset U$.

Говорим, что отображение $f : X \rightarrow Y$ *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. Доказательство следующего важного утверждения оставляю в качестве упражнения, поскольку оно не требует ничего сверх приобретенных в “Анализе” навыков.

Предложение 1.2.1. Пусть X, Y — два топологических пространства. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ следующие четыре утверждения эквивалентны.

1. f непрерывно.
2. Для любого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ является открытым множеством в X .
3. Для любого замкнутого множества $G \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(G)$ является замкнутым множеством в X .
4. $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset X$.

Вы без труда докажете утверждения, содержащиеся в следующих двух абзацах. Они приводятся лишь потому, что будут далее постоянно использоваться.

Если $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f и g непрерывны, то и $g \circ f$ непрерывно.

Биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда f и f^{-1} непрерывны.

Упражнение.

Докажите, что тождественное отображение $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$.

1.3. Примеры топологических пространств

Пример 1. Простейшую топологию на произвольном множестве X зададим равенством $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, т. е. объявив открытыми лишь пустое множество и все пространство. Эта топология называется *слабейшей*.

Пример 2. Противоположный к предыдущему пример получим, положив $\mathcal{T} = \mathcal{S}(X)$, т. е. объявив открытыми все множества в X . Эта топология называется *дискретной*.

Пример 3. Метрические пространства. Напомним, что *метрикой* на множестве X называется функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$ причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых трех точек.

Множество вместе с зафиксированной на нем метрикой называется *метрическим пространством*. Метрическое пространство обозначается (X, ρ) или просто X , когда из контекста ясно, о какой метрике идет речь.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Открытым шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in X$ называется множество $\mathbb{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$. Множество $A \subset X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором открытом шаре.

На каждом метрическом пространстве X каноническим образом вводится топология посредством следующего определения: множество $U \subset X$ объявляется открытым, если для любой точки $x \in U$ можно указать такое $r > 0$, что $\mathbb{B}_r(x) \subset U$. Конечно, все открытые шары становятся открытыми множествами в этой топологии. Обратно, любое открытое множество представимо в виде объединения некоторого семейства открытых шаров. В дальнейшем, говоря о топологии метрического пространства, мы всегда будем подразумевать только что введенную топологию, если явно не оговорено противное.

В связи с приведенным определением топологии метрического пространства полезно ввести следующее понятие. Пусть (X, \mathcal{T}) — топологическое пространство и $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ — некоторое семейство открытых множеств этого пространства. Говорим, что \mathcal{B} является *базой* топологии \mathcal{T} , если любое множество из \mathcal{T} можно представить в виде объединения множеств некоторого подсемейства семейства \mathcal{B} . В случае метрического пространства семейство всех открытых шаров является базой топологии.

Напомним, что на $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ имеется стандартная метрика $\rho(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$, определяющая *стандартную* (или *каноническую*) топологию.

Топологическое пространство (X, \mathcal{T}) называется *метризуемым*, если на X существует метрика, по которой топология \mathcal{T} восстанавливается с помощью приведенного выше определения. Большинство из топологических пространств, которые мы будем рассматривать в настоящем курсе, являются метризуемыми. Однако неметризуемые пространства также нередки и некоторые из них весьма важны в различных разделах математики. Например, в математической физике большую роль играет топологическое пространство *обобщенных функций* (или *распределений*) на области евклидова пространства; это пространство не метризуемо.

Пример 4. Подпространства топологического пространства. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Превратим A в топологическое пространство, объявив множество $V \subset A$ открытым, если оно представимо в виде $V = A \cap U$, где U — открытое в X множество. Так определенная на A топология называется *индуцированной* из X топологией, а само множество A вместе с этой топологией называется *подпространством* топологического пространства X . Если не оговорено противное, подмножества топологического пространства всегда рассматриваются с индуцированной топологией. Предупреждение: открытое в индуцированной топологии множество $U \subset A$ вовсе не обязано быть открытым в объемлющем пространстве X . Чтобы разобраться с этим, опишите все открытые множества отрезка $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, снабженного индуцированной из \mathbb{R} топологией.

В частности, *n -мерный диск* или *замкнутый n -мерный шар* $\mathbb{D}_r^n(x) = \overline{\mathbb{B}_r^n(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$ и *$(n - 1)$ -мерная сфера* $\mathbb{S}_r^{n-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}$ пространства \mathbb{R}^n становятся самостоятельными топологическими пространствами, будучи наделенными индуцированной из \mathbb{R}^n топологией, как, впрочем, и любое множество в \mathbb{R}^n . Мы отдельно упомянули диск и сферу, поскольку в дальнейшем они будут многократно использоваться. Примем следующее соглашение: в дальнейшем термин “шар” всегда означает открытый шар, в то время как для замкнутых шаров используется термин “диск”. Отметим, что любые две сферы $\mathbb{S}_r^{n-1}(x)$ и $\mathbb{S}_{r'}^{n-1}(x')$ гомеоморфны (постройте гомеоморфизм). Поэтому мы сокращаем обозначение $\mathbb{S}_r^{n-1}(x)$ до \mathbb{S}^{n-1} , если сфера интересует нас лишь как топологическое пространство. Аналогичное замечание справедливо для дисков.

Пример 5. Произведение топологических пространств. Пусть X и Y — два топологических пространства. Введем на $X \times Y$ топологию, взяв в качестве ее базы семейство всевозможных произведений $U \times V$,

где U открыто в X , а V открыто в Y . Говоря о произведении топологических пространств, мы всегда будем подразумевать введенную топологию. В частности, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Приведенное определение топологии на произведении двух (а следовательно, и на произведении конечного числа) топологических пространств было обобщено А. Н. Тихоновым на случай произведения $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ произвольного семейства топологических пространств (так называемая тихоновская топология). Нам это понятие не понадобится. Интересующихся отсылаем к §6.4 книги [1].

Пример 6. Фактор-пространство. Пусть на множестве X определено отношение эквивалентности R . Тогда X разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается X/R и называется *фактор-множеством* множества X по данному отношению эквивалентности. *Проекция* $\pi : X \rightarrow X/R$ определяется равенством $\pi(x) = [x]$, где $[x]$ — класс эквивалентности точки x .

Пусть теперь дополнительно X наделено топологией. Тогда на X/R определяется *фактор-топология* как сильнейшая из всех топологий, относительно которых проекция π непрерывна. Другими словами, множество $V \subset X/R$ открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(V) \subset X$ открыто. Отсюда легко получить следующий критерий непрерывности (докажите): отображение $f : X/R \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ непрерывно. На первый взгляд, определение фактор-топологии может показаться слишком абстрактным. Чтобы привыкнуть к нему, рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 6а. На отрезке $[a, b]$ введем отношение эквивалентности R , объявив концевые точки a и b эквивалентными друг другу, а все прочие точки эквивалентными лишь себе. Тогда $[a, b]/R \approx S^1$ (докажите). Здесь знак \approx означает гомеоморфность. Этот факт можно выразить словами: окружность получается из отрезка отождествлением концевых точек.

Пример 6б. Многомерный вариант предыдущего примера. Сфера S^n получается из диска \mathbb{D}^n отождествлением всех точек граничной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$. Придайте этой фразе точный смысл в стиле предыдущего абзаца.

Пример 6в. Введем на множестве $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ отношение эквивалентности R , объявив x и y эквивалентными, если $x = \lambda y$ для неко-

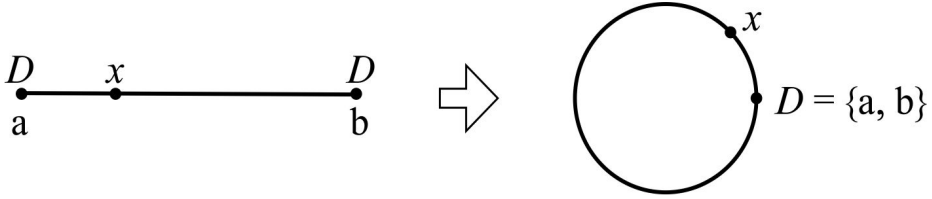


Рис. 1.1. Окружность “клеится” из отрезка

торого числа $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Фактор-пространство $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/R$ называется n -мерным действительным *проективным пространством*. Класс эквивалентности точки (x_1, \dots, x_{n+1}) принято обозначать через $(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$, подчеркивая тем самым, что в этом обозначении имеют смысл не сами координаты, а лишь их попарные отношения.

То же самое пространство $\mathbb{R}P^n$ можно получить из сферы \mathbb{S}^n , отождествив ее диаметрально противоположные точки. Придайте этому утверждению точный смысл, введя соответствующее отношение эквивалентности на \mathbb{S}^n ; а затем докажите его, построив гомеоморфизм.

Пример 6г. *Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется путем дословного повторения первого абзаца предыдущего примера с единственным изменением: действительные числа везде заменяются комплексными числами. А вот содержание второго абзаца предыдущего примера надо существенно изменить в комплексном случае. Подумайте над этим изменением.*

Пример 6д. Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 вертикальную полосу $[0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$, ограниченную прямыми $\{0\} \times \mathbb{R}$ и $\{1\} \times \mathbb{R}$. Отождествив точки $(0, y)$ и $(1, y)$ этих граничных прямых, очевидно, получим цилиндр $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Если же мы склеим граничные прямые более хитро, предварительно “перевернув” одну из них, т.е. отождествляя $(0, y)$ и $(1, -y)$, то получится новое интересное топологическое пространство \mathcal{M} , называемое *лентой Мебиуса*. Покажите, что множество всех прямых на плоскости имеет естественную топологию, в которой это множество гомеоморфно ленте Мебиуса.

Пример 6е. Двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ можно получить из квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ путем попарной склейки противоположных сторон квадрата: $(-1, y)$ отождествляется с $(1, y)$, а $(x, -1)$ отождествляется с $(x, 1)$; рис. 1.2. Отметим, что при этом все четыре вершины квадрата

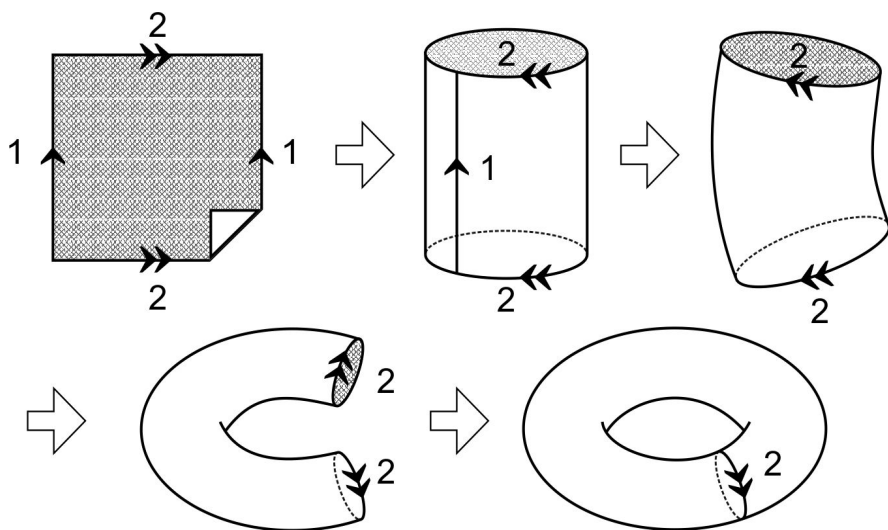


Рис. 1.2. Тор “клеится” из квадрата

склеиваются в одну точку. Теперь немного изменим правило склейки: $(-1, y)$ отождествляется с $(1, y)$, а $(x, -1)$ отождествляется с $(-x, 1)$; рис. 1.3. В результате получим новое интересное пространство, называемое *бутылкой Клейна*. Не знаю, кто первый применил это название, но наверняка это был человек с хорошим чувством юмора. Действительно, в эту “бутылку” нельзя ничего налить, поскольку бутылка Клейна является односторонней поверхностью, как мы убедимся в следующей главе.

Упражнения

1. Как устроены непрерывные отображения $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где X снабжено слабой топологией? Тот же вопрос для X , снабженного дискретной топологией.

2. Пусть A — замкнутое множество в топологическом пространстве X , рассматриваемое с индуцированной из X топологией. Докажите, что если B — замкнутое множество в A , то B замкнуто в X .

3. Пространство $\mathbb{R}P^1$ часто называется проективной прямой. Докажите, что проективная прямая гомеоморфна окружности S^1 .

4. Отождествив диаметрально противоположные граничные точки диска $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, получим пространство, гомеоморфное

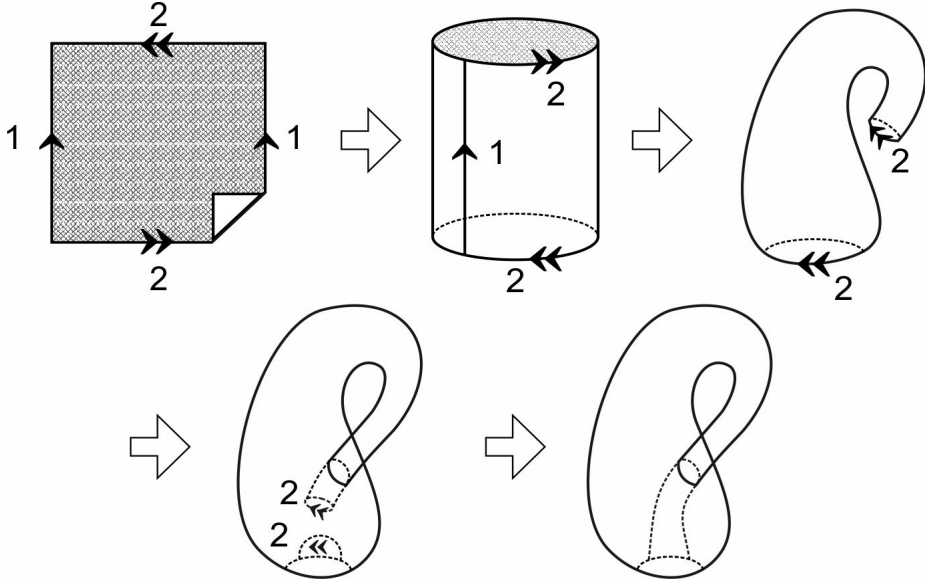


Рис. 1.3. Бутылка Клейна “клеится” из квадрата

проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Докажите.

5. Несколько иной, чем в примере бд, вариант ленты Мебиуса, получим из прямоугольника $[0, a] \times [-1, 1]$ путем склеивания граничных вертикальных отрезков $\{0\} \times [-1, 1]$ и $\{a\} \times [-1, 1]$, предварительно перевернув один из них, т.е. путем отождествления точек $(0, y)$ и $(a, -y)$. Эту процедуру склеивания легко представить и даже осуществить физически с помощью бумаги, ножниц и клея, выбрав достаточно большое значение параметра $a > 0$. Обозначим результат \mathcal{M} , рис. 1.4. Это пространство является двумерным многообразием с краем, в то время как построенное в примере бд пространство $\tilde{\mathcal{M}}$ есть двумерное многообразие без края. Точный смысл последней фразе будет придан в следующей главе. Пока лишь заметим, что объединение горизонтальных сторон $[0, a] \times \{1\}$ и $[0, a] \times \{-1\}$ прямоугольника при склеивании перейдет в замкнутую кривую $\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, гомеоморфную окружности. Окружность $\partial\mathcal{M}$ называется краем ленты Мебиуса \mathcal{M} . В некотором смысле край $\partial\mathcal{M}$ ограничивает ленту Мебиуса \mathcal{M} . Докажите, что выбросив край, мы получим ленту Мебиуса без края, т.е. что $\mathcal{M} \setminus \partial\mathcal{M}$ гомеоморфно $\tilde{\mathcal{M}}$.

Заметим, что средняя линия $[0, a] \times \{0\}$ прямоугольника при склеивании также становится окружностью, поскольку точки $(0, 0)$ и $(a, 0)$ отождествляются. Эта окружность также называется средней линией ленты Мебиуса. Вопрос: что получится, если мы разрежем ленту Мебиуса по ее средней линии? Если затрудняетесь найти умозрительный ответ на этот вопрос, поэкспериментируйте с помощью бумаги, ножниц и клея.

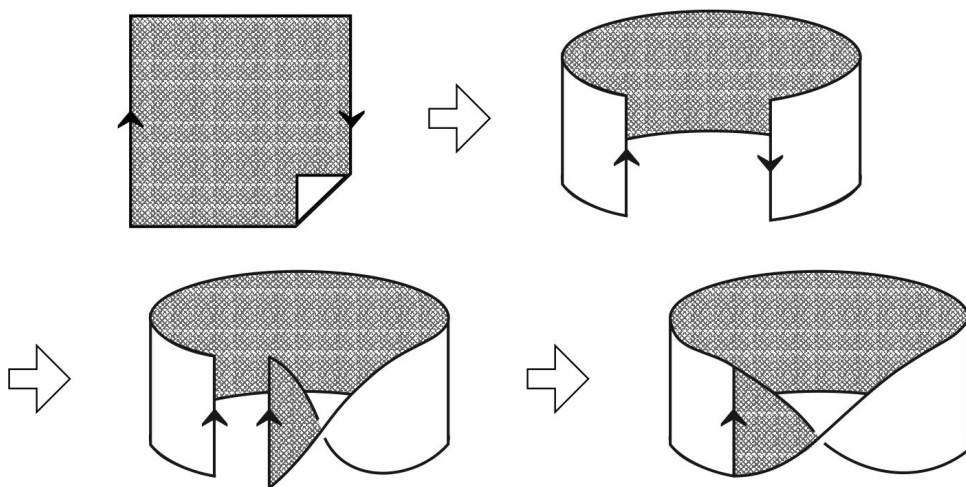


Рис. 1.4. Лента Мебиуса “клеится” из квадрата

6. Краем диска $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ является окружность $\partial\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Краем ленты Мебиуса \mathcal{M} также является окружность. Рассмотрим \mathbb{D}^2 и \mathcal{M} как непересекающиеся множества и отождествим их края с помощью гомеоморфизма $\partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \partial\mathcal{M}$. В результате получится пространство, гомеоморфное проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Докажите.

7. На бутылке Клейна можно найти такую окружность, что после разрезания вдоль этой окружности бутылка распадется на две ленты Мебиуса. Докажите. Обратив эту процедуру, получаем утверждение: бутылку Клейна можно получить из двух экземпляров ленты Мебиуса, отождествив их края.

1.4. Связные пространства и связные множества в топологическом пространстве

Определение 1.4.1. Говорим, что топологическое пространство X связно, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств. Говорим, что множество $A \subset X$ связно, если оно связно, рассматриваемое как топологическое пространство с индуцированной из X топологией.

Примеры. \mathbb{R} связно, докажите. (Указание: предварительно докажите, что всякое открытое множество в \mathbb{R} является объединением не более чем счетного числа попарно непересекающихся открытых интервалов). Множество рациональных чисел \mathbb{Q} , рассматриваемое с индуцированной из \mathbb{R} топологией, не связно; докажите.

Теорема 1.4.2 (о сохранении связности при непрерывном отображении). Пусть X, Y — топологические пространства и $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Если A — связное множество в X , то $f(A)$ — связное множество в Y .

Доказательство. Ограничим отображение f на множество A , одновременно сузив область значений, т. е. определим новое отображение $f|_A : A \rightarrow f(A)$, полагая $(f|_A)(x) = f(x)$ для $x \in A$. Отображение $f|_A$ сюръективно и непрерывно, если A и $f(A)$ рассматриваются с индуцированными из X и Y топологиями (докажите). Предположим, вопреки утверждению теоремы, что $f(A)$ не связно. Это означает возможность представления $f(A) = V_1 \cup V_2$, где каждое V_i ($i = 1, 2$) не пусто и открыто в $f(A)$, а $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Полагаем $U_i = f^{-1}(V_i) \subset A$ ($i = 1, 2$). Тогда $A = U_1 \cup U_2$, каждое U_i ($i = 1, 2$) не пусто и открыто в A , а $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Получили противоречие со связностью A . \square

Остальные утверждения этого параграфа приводятся без доказательств.

Предложение 1.4.3. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — такое семейство множеств в топологическом пространстве X , что $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Если каждое A_i связно, то и объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ связно.

Следствие 1.4.4. Пусть $x \in X$. Объединение всех связных множеств из X , содержащих точку x , есть связное множество. Таким образом, это — наибольшее связное множество, содержащее данную точку x .

Определение 1.4.5. Связной компонентой точки $x \in X$ называется наибольшее связное множество в X , содержащее точку x .

Определение 1.4.6. Пространство X называется вполне несвязным, если связная компонента любой точки состоит из одной этой точки.

Примеры вполне несвязных пространств: дискретное пространство, пространство \mathbb{Q} рациональных чисел с индуцированной из \mathbb{R} топологией.

Теорема 1.4.7. В топологическом пространстве X связная компонента любой точки есть замкнутое множество. Отношение “ y принадлежит связной компоненте точки x ” является отношением эквивалентности на X . Фактор-пространство пространства X по этому отношению эквивалентности вполне несвязно.

Упражнения

1. Если $A \subset B \subset \bar{A}$ и A связно, то и B связно. В частности, замыкание связного множества связно.

2. Пусть A — произвольное множество в топологическом пространстве X . Если B — связное множество в X , пересекающееся с A и с $X \setminus A$, то B пересекается с границей множества A . Отсюда следует: в связном топологическом пространстве X всякое непустое отличное от X множество имеет хотя бы одну граничную точку.

3. Выбросив из \mathbb{R} произвольную точку, получим несвязное множество (докажите). Отсюда следует, что \mathbb{R} не гомеоморфно пространству \mathbb{R}^n ($n > 1$).

Г. Кантор, один из создателей теории множеств, долго пытался доказать, что множества \mathbb{R} и \mathbb{R}^2 имеют разную мощность, т. е. между ними нельзя установить взаимно-однозначного соответствия, и был сильно удивлен, обнаружив, что эти множества равномощны. Но как топологические пространства они различны.

1.5. Хаусдорфовы и нормальные пространства

Приведенные в первом параграфе три аксиомы, определяющие топологическое пространство, имеют очень общий характер. Если не накладывать дополнительных ограничений, то общее топологическое пространство может иметь свойства весьма далекие от привычных нам свойств метрических пространств. Поэтому в общей топологии, наряду с тремя основными аксиомами, часто накладываются дополнительные требования на рассматриваемые топологические пространства. В частности, имеется целый ряд так называемых аксиом отделимости, последовательно усиливающих друг друга. В настоящем параграфе мы обсудим две аксиомы из этого довольно длинного ряда.

Определение 1.5.1. *Топологическое пространство называется хаусдорфовым (или отделимым), если любые две различные точки этого пространства имеют непересекающиеся окрестности.*

Доказательства следующих двух предложений не сложны и оставляются читателю в качестве упражнений.

Предложение 1.5.2. *Для топологического пространства X следующие три утверждения эквивалентны:*

- 1) X хаусдорфово;
- 2) пересечение всех замкнутых окрестностей произвольной точки из X есть множество, сводящееся к одной этой точке;
- 3) диагональ $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ есть замкнутое множество в $X \times X$.

Следствие 1.5.3. *В хаусдорфовом пространстве всякое конечное множество замкнуто.*

Предложение 1.5.4. *Пусть $f, g : X \rightarrow Y$ — два непрерывных отображения между топологическими пространствами, причем Y хаусдорфово. Множество тех $x \in X$, для которых $f(x) = g(x)$, замкнуто.*

Говорим, что множество $A \subset X$ *плотно* в топологическом пространстве X , если $\bar{A} = X$.

Следствие 1.5.5 (принцип продолжения тождеств). *Если, в условиях предложения 1.5.4, $f(x) = g(x)$ для всех x из некоторого плотного в X множества, то $f = g$.*

Следствие 1.5.6. *Пусть X произвольно, Y хаусдорфово. График непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ замкнут в $X \times Y$.*

Определение 1.5.7. *Хаусдорфово топологическое пространство X называется нормальным, если любые два замкнутых непересекающихся множества в X имеют непересекающиеся окрестности.*

Предложение 1.5.8. *Метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A, B — два непересекающихся замкнутых множества в метрическом пространстве X . Определим функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}, \quad \text{где} \quad \rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Функция f непрерывна (проверьте) и удовлетворяет $f|_A = 0$, $f|_B = 1$. Следовательно, открытые множества $\{x \mid f(x) < 1/2\}$ и $\{x \mid f(x) > 1/2\}$ являются непересекающимися окрестностями множеств A и B соответственно. \square

Приведем без доказательства следующее утверждение, показывающее, насколько богат запас непрерывных функций на нормальном пространстве.

Теорема 1.5.9 (большая лемма Урысона). *Пусть A, B — два непересекающихся замкнутых множества в нормальном топологическом пространстве X . Существует такая непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, что $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ и $0 \leq f(x) \leq 1$ для всех $x \in X$.*

1.6. Компактность

В “Анализе” есть замечательная теорема Кантора, утверждающая, что из любого покрытия отрезка $[a, b]$ системой открытых интервалов

можно выделить конечное подпокрытие. В дальнейшем с этой теоремой произошло то, что нередко случается с хорошими теоремами, — она стала аксиомой.

Семейство множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в топологическом пространстве X называется *покрытием* этого пространства, если $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. Такая система называется *открытым покрытием*, если каждое U_α открыто. Говорим, что покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является *подпокрытием* покрытия $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$, если для каждого $\alpha \in A$ найдется такое $\beta = \beta(\alpha) \in B$, что $U_\alpha = V_{\beta(\alpha)}$.

Определение 1.6.1. *Топологическое пространство называется компактным, если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие. Множество K в топологическом пространстве X называется компактным, если K компактно, рассматриваемое как топологическое пространство с индуцированной из X топологией.*

Теорема 1.6.2 (сохранение компактности при непрерывном отображении). *Пусть X, Y — два топологических пространства и $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Если K — компактное множество в X , то $f(K)$ — компактное множество в Y .*

Доказательство. Определим $f|_K : K \rightarrow f(K)$ так же, как при доказательстве теоремы 1.4.2. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства $f(K)$, тогда $\{(f|_K)^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие пространства K . Выбираем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{(f|_K)^{-1}(U_{\alpha_i})\}_{i=1}^n$, т. е.

$$\bigcup_{i=1}^n (f|_K)^{-1}(U_{\alpha_i}) = K.$$

Тогда $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ — покрытие пространства $f(K)$. □

Предложение 1.6.3 (связь между компактными и замкнутыми множествами).

1. *Замкнутое множество в компактном пространстве тоже компактно.*
2. *Компактное множество в хаусдорфовом пространстве замкнуто.*

Доказательство. Первое утверждение вы без труда докажете самостоятельно. Приведу доказательство второго.

Пусть $K \subset X$, K компактно, X хаусдорфово. Фиксируем точку $x \notin K$. Для любой точки $y \in K$ найдем такие открытые $V_y(x) \ni x$ и $W(y) \ni y$, что $V_y(x) \cap W(y) = \emptyset$. Тогда $\bigcup_{y \in K} W(y) \supset K$, т. е. $\{W(y)\}_{y \in K}$ — открытое покрытие K . Выбираем из него конечное подпокрытие, т. е. $K \subset \bigcup_{i=1}^n W(y_i)$. Тогда $V(x) = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}(x)$ есть окрестность точки x , не пересекающаяся с K . \square

Предложение 1.6.4 (теорема Тихонова). *Пусть X — компактное топологическое пространство, а Y — хаусдорфово. Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное биективное отображение, то f — гомеоморфизм.*

Эта теорема имеет многочисленные применения, в первую очередь при решении задач математической физики. Ее смысл состоит в том, что мы избавлены от необходимости непосредственной проверки непрерывности обратного отображения f^{-1} при соблюдении условий этой теоремы. Такая проверка во многих случаях весьма затруднительна.

Доказательство. Мы должны установить непрерывность обратного отображения f^{-1} . Согласно предложению 1.2.1, для этого достаточно доказать, что множество $f(K)$ замкнуто в Y для любого замкнутого в X множества K . В силу первого утверждения предложения 1.6.3, K компактно. Отсюда с помощью теоремы 1.6.2 следует, что $f(K)$ компактно. Применяя второе утверждение предложения 1.6.3, убеждаемся, что $f(K)$ замкнуто. \square

Приведем еще несколько утверждений без доказательства.

Предложение 1.6.5. *Произведение двух компактных пространств тоже компактно.*

Предложение 1.6.6. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Предложение 1.6.7. *Компактное множество в метрическом пространстве ограничено.*

Предложения 1.6.5 и 1.6.7 доказываются очень просто, достаточно лишь вспомнить соответствующие определения. А вот доказательство

предложения 1.6.6 требует некоторой изобретательности. Доказав его, вы получите большое удовольствие и приобретете навыки работы с компактными пространствами. Из теоремы 1.6.2 и предложения 1.6.7 вытекает

Следствие 1.6.8 (теорема Вейерштрасса). *Непрерывная функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на компактном пространстве ограничена, достигает своего максимума и минимума.*

Теорема 1.6.9 (о характеристике компактных метрических пространств). *Для метрического пространства X следующие три утверждения эквивалентны:*

- 1) X компактно;
- 2) убывающая последовательность непустых замкнутых множеств имеет непустое пересечение, т. е. если

$$X \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots, \quad F_n \text{ замкнуто, } F_n \neq \emptyset,$$

то $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$;

- 3) из любой последовательности точек пространства X можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Импlications 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) доказываются просто и справедливы для произвольного топологического пространства. А вот доказательство импlications 3) \Rightarrow 1) гораздо труднее.

В заключение параграфа приведем несколько примеров компактных пространств и множеств.

Пример 1. Самым классическим примером является замкнутый отрезок $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < a \leq x \leq b < \infty\}$ действительной прямой.

Пример 2. Компактные множества в евклидовом пространстве. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Докажите.

Пример 3. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно. Докажите с помощью теоремы 1.6.2, выбрав компактное X и непрерывное сюръективное отображение $X \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Пример 4. Ортогональная группа $O(n)$ компактна. Это нуждается в пояснении. Пусть $M(n)$ — множество всех действительных $n \times n$ -матриц. Его можно отождествить с \mathbb{R}^{n^2} , линейно упорядочив элементы

матрицы. Перенеся стандартную топологию пространства \mathbb{R}^{n^2} на $M(n)$ с помощью этого отождествления, мы превращаем $M(n)$ в топологическое пространство. Тем самым и множество $O(n) \subset M(n)$ ортогональных матриц становится топологическим пространством. Напомню, что матрица A ортогональна, если $AA^t = I$, где A^t — транспонированная матрица. Докажите, что множество $O(n)$ замкнуто и ограничено в \mathbb{R}^{n^2} . В силу примера 2 это означает компактность ортогональной группы.

Пример 5. Из предыдущих примеров может сложиться неверное впечатление, что компактность связана с конечномерностью. Чтобы развеять это впечатление, приведем пример компактного множества в бесконечномерном пространстве. Напомню, что действительное гильбертово пространство ℓ_2 определяется как пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, для которых $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Метрика на ℓ_2 вводится равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Замкнутый единичный шар $\{x \in \ell_2 \mid \|x\| \leq 1\}$ в этом пространстве не компактен. А вот *гильбертов кирпич* $H = \{x \in \ell_2 \mid |x_n| \leq 2^{-n}\}$ компактен. Докажите.

На этом мы завершаем изучение основ *общей топологии*. Оставшиеся три параграфа этой главы будут посвящены основам двух других больших разделов топологии: *гомотопической* и *комбинаторной* топологии.

Историческая справка. Основы общей топологии как самостоятельной дисциплины были заложены в 20-е годы предыдущего столетия в работах московских математиков П. С. Александрова, А. Н. Тихонова и П. С. Урысона. Основные итоги их исследований подведены в небольшой книге [2]. Следует дать предупреждение тем, кто захочет почитать эту книгу: вместо нашего термина “компактность” авторы используют “бикомпактность”, зарезервировав термин “компактность” за более слабым свойством: из любого *счетного* открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. В дальнейшем выяснилось, что последнее понятие не играет большой роли, и терминология была изменена. Наше определение компактности согласуется с общепринятой сейчас терминологией.

Введя определение топологического пространства, авторы в первую очередь задались вопросом: как это новое понятие связано с понятием метрического пространства, хорошо изученным к тому времени? Поэтому их исследования были в

значительной степени направлены на поиск условий метризуемости топологических пространств. Упомянем простейший из целого ряда результатов, полученных в этом направлении.

Теорема 1.6.10 (первая метризациянная теорема Урысона). *Нормальное топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности (т. е. имеющее счетную базу топологии), метризуемо.*

Упражнения

1. Докажите, что в хаусдорфовом топологическом пространстве любые два компактные непересекающиеся множества имеют непересекающиеся окрестности.

2. Пусть X и Y — два топологических пространства и A (соответственно B) — компактное множество в X (соответственно в Y). Покажите, что для любой окрестности U множества $A \times B$ в $X \times Y$ существуют такие окрестности V множества A в X и W множества B в Y , что $V \times W \subset U$.

3. Напомню, что расстояние между двумя подмножествами метрического пространства определяется равенством

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$

Докажите, что если A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства, причем A компактно, то найдется точка $x \in A$, для которой $\rho(A, B) = \rho(x, B) > 0$. Если B тоже компактно, то найдутся такие точки $x \in A$ и $y \in B$, что $\rho(A, B) = \rho(x, y)$.

4. Пусть X и Y — метрические пространства, причем X компактно, и f — изометрия пространства X на подпространство пространства Y , а g — изометрия пространства Y на подпространство пространства X . Тогда f отображает X на все Y . Докажите (Указание: Пусть h — изометрия пространства X на его собственную часть и $x \in X \setminus h(X)$. Положим $a = \rho(x, h(X))$. Определим по индукции последовательность точек, начинающуюся с $x_0 = x$, правилом: $x_{n+1} = h(x_n)$. Докажите, что при $m \neq n$ будет $\rho(x_m, x_n) \geq a$.)

1.7. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

Определение 1.7.1. Пусть X, Y — топологические пространства и $I = [0, 1]$. Говорим, что два непрерывных отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны и пишем $f_0 \sim f_1$, если существует такое непрерывное отображение $F : X \times I \rightarrow Y$, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$. Само отображение F называем гомотопией между отображениями f_0 и f_1 .

Если F — гомотопия между f_0 и f_1 , то семейство отображений $f_t : X \rightarrow Y$, $f_t(x) = F(x, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) можно рассматривать как непрерывную деформацию отображения f_0 в f_1 . Легко убедиться, что гомотопность является отношением эквивалентности на множестве $\text{Map}(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y (проверьте). Элементы фактор-множества $[X, Y] = \text{Map}(X, Y)/\sim$ называются *гомотопическими классами* отображений из X в Y .

Пример 1. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, X произвольно. Любые два отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны, гомотопию можно определить равенством $F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$. Таким образом, в этом случае $[X, Y]$ состоит из одного элемента.

Пример 2. Пусть S^1 — окружность и $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Непрерывное отображение $f : S^1 \rightarrow Y$ можно рассматривать как замкнутую кривую на плоскости, не проходящую через точку 0. Каждой такой кривой однозначно сопоставляется некоторое целое число, называемое индексом кривой f относительно точки 0, равное числу оборотов (со знаком), совершаемому этой кривой вокруг точки 0. Попробуйте сформулировать точное определение индекса (Указание: это определение приводится в курсе ТФКП при изложении принципа аргумента). Можно доказать, что два отображения $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопны тогда и только тогда, когда их индексы совпадают. Таким образом, $[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}]$ изоморфно группе \mathbb{Z} целых чисел.

Пример 3. Топологическое пространство Y называется *односвязным*, если $[S^1, Y]$ состоит из одного элемента. Как видно из предыдущего примера, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ не односвязно. А вот $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ односвязно. Докажите.

Определение 1.7.2. Говорим, что топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентны (или имеют одинаковый гомото-

нический тип), если существуют такие непрерывные отображения $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$, что $g \circ f \sim I_X$ и $f \circ g \sim I_Y$. Здесь и далее I_X — тождественное отображение пространства X . Такое отображение f (или g) называется *гомотопической эквивалентностью*.

Гомеоморфные пространства очевидным образом гомотопически эквивалентны. Поэтому понятие гомотопической эквивалентности шире понятия гомеоморфности. Например, пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны при $n \neq m$, но имеют одинаковый гомотопический тип. Более того, любое выпуклое множество в \mathbb{R}^n гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{*\}$, как мы убедимся ниже. Топологическое пространство называется *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{*\}$.

В общем случае нелегко построить гомотопическую эквивалентность между двумя пространствами. Чаще всего мы будем рассматривать более простой случай, когда одно пространство является подпространством другого. Приведем соответствующие определения.

Если A — подмножество топологического пространства X , то через $i : A \hookrightarrow X$ обозначаем тождественное вложение (которое рассматривается в качестве непрерывного отображения пространства A , снабженного индуцированной топологией). Говорим, что A является *ретрактом* пространства X , если существует такое непрерывное отображение $r : X \rightarrow A$, что $r \circ i = I_A$; при этом само r называется *ретракцией*. Если дополнительно ретракцию можно выбрать так, что $i \circ r \sim I_X$, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X . Ясно, что в этом случае $i : A \hookrightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью, т. е. деформационный ретракт пространства X имеет тот же гомотопический тип, что и само X .

Пример. Пусть X — выпуклое множество в \mathbb{R}^n . Докажем, что одноточечное множество $\{x_0\}$ является деформационным ретрактом пространства X для любой точки $x_0 \in X$, т. е. выпуклое множество евклидова пространства стягиваемо. Для этого рассмотрим семейство отображений

$$r_t : X \rightarrow X, \quad r_t(x) = (1-t)x + tx_0, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Ясно, что $r_0 = I_X$ и r_1 отображает все X в точку x_0 .

Упражнение

1. Пусть \mathbb{S}^1 — граничная окружность диска $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $I = [0, 1]$. Подмножество $A = (\mathbb{D}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^1 \times I)$ цилиндра $\mathbb{D}^2 \times I$ является объединением нижнего основания и боковой поверхности цилиндра. Докажите, что A — деформационный ретракт пространства $\mathbb{D}^2 \times I$. Это утверждение известно в гомотопической топологии под именем “леммы о стакане”: стакан является деформационным ретрактом “заполненного стакана”.

1.8. Конечные клеточные комплексы.

Эйлерова характеристика

Пусть $X \sqcup Y$ — *дизъюнктное объединение* двух топологических пространств, т. е. объединение X и Y , рассматриваемых как непересекающиеся множества (хотя первоначально они могли иметь общие элементы). Введем на $X \sqcup Y$ топологию, считая множество $U \subset X \sqcup Y$ открытым тогда и только тогда, когда $U \cap X$ и $U \cap Y$ открыты в X и Y соответственно. Пусть теперь $X \supset A \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение, определенное на подмножестве A пространства X . Определим на $X \sqcup Y$ отношение эквивалентности, объявив каждую точку $a \in A$ эквивалентной точке $f(a) \in Y$. Две точки $a, b \in A$ становятся эквивалентными тогда и только тогда, когда $f(a) = f(b)$. Факторпространство $X \sqcup Y / \sim$ по этому отношению эквивалентности называется *результатом приклеивания* пространства X к пространству Y по отображению f и обозначается $Y \bigcup_f X$.

Пример. Пусть \mathbb{S}^{n-1} — граничная сфера диска \mathbb{D}^n и $\{*\}$ — одноточечное пространство. Отображение $\mathbb{D}^n \supset \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{f} \{*\}$ определено однозначно. Докажите, что пространство $\{*\} \bigcup_f \mathbb{D}^n$ гомеоморфно сфере \mathbb{S}^n .

Обозначения и терминология теории клеточных комплексов несколько отличаются от использованных нами ранее. Диск $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ будем называть *n -мерной клеткой* и обозначать через c^n . При $n > 0$ обозначаем через $\dot{c}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ граничную сферу n -мерной клетки и через $\circ c^n = c^n \setminus \dot{c}^n$ — внутренность клетки. Удобно также считать, что $\circ c^0 = c^0$ и $\dot{c}^0 = \emptyset$. (Наш смысл термина “клетка”

близок к используемому в биологии: пространство строится из клеток подобно тому, как организм построен из живых клеток).

Определение 1.8.1. Конечным клеточным комплексом называется объект, получаемый за конечное число шагов с помощью следующей индуктивной конструкции.

Шаг 0. задается конечное число нульмерных клеток $c_1^0, \dots, c_{r_0}^0$ и на конечном множестве $K^0 = \{c_1^0, \dots, c_{r_0}^0\}$ вводится дискретная топология. K^0 называется нульмерным остовом.

Шаг 1. задается конечное число одномерных клеток $c_1^1, \dots, c_{r_1}^1$ и для каждой из них задается непрерывное отображение $\varphi_i^1 : \dot{c}_i^1 \rightarrow K^0$ ($1 \leq i \leq r_1$). Одномерный остов K^1 получается путем приклеивания к K^0 заданных одномерных клеток по заданным приклеивающим отображениям: $K^1 = K^0 \cup_{\varphi_1^1} c_1^1 \cup \dots \cup_{\varphi_{r_1}^1} c_{r_1}^1$.

.....

Шаг k . Пусть уже построен $(k-1)$ -мерный остов K^{k-1} . задается конечное число k -мерных клеток $c_1^k, \dots, c_{r_k}^k$, и для каждой из них задается непрерывное отображение $\varphi_i^k : \dot{c}_i^k \rightarrow K^{k-1}$ ($1 \leq i \leq r_k$). k -мерный остов K^k получается путем приклеивания к K^{k-1} заданных k -мерных клеток по заданным приклеивающим отображениям: $K^k = K^{k-1} \cup_{\varphi_1^k} c_1^k \cup \dots \cup_{\varphi_{r_k}^k} c_{r_k}^k$.

.....

Шаг n . Пусть уже построен $(n-1)$ -мерный остов K^{n-1} . задается конечное число n -мерных клеток $c_1^n, \dots, c_{r_n}^n$ и для каждой из них задается непрерывное отображение $\varphi_i^n : \dot{c}_i^n \rightarrow K^{n-1}$ ($1 \leq i \leq r_n$). n -мерный остов K^n получается путем приклеивания к K^{n-1} заданных n -мерных клеток по заданным приклеивающим отображениям: $K^n = K^{n-1} \cup_{\varphi_1^n} c_1^n \cup \dots \cup_{\varphi_{r_n}^n} c_{r_n}^n$.

На этом процесс заканчивается и полагается $K = K^n$. Подчеркнем, что набор приклеивающих отображений входит в определение клеточного комплекса. Всякое топологическое пространство, которое можно получить с помощью этой конструкции, называется полиэдром.

Подчеркнем, что в процессе построения клеточного комплекса каждая клетка c_i^k приклеивается к K^{k-1} по своей граничной сфере \dot{c}_i^k , в то время как точки внутренности $\circ c_i^k$ не отождествляются с точками из K^{k-1} . Отсюда следует возможность представления всего комплекса в

виде объединения непересекающихся множеств:

$$K = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^{r_k} \mathring{c}_i^k.$$

Пока мы находимся в множестве \mathring{c}_i^k , мы можем производить любые построения, которые возможны в открытом шаре \mathbb{B}^k . Это — основное преимущество клеточных комплексов. Приближаясь к граничной сфере \dot{c}_i^k , мы должны следить, чтобы наши построения согласовывались с приклеивающими отображениями.

Один и тот же полиэдр можно реализовать в виде клеточного комплекса многими способами. В качестве примера приведем несколько вариантов реализации двумерной сферы \mathbb{S}^2 в виде клеточного комплекса.

Пример 1. Двумерную сферу можно реализовать в виде клеточного комплекса, состоящего из одной нульмерной клетки c^0 и одной двумерной клетки c^2 , рис. 1.5, *a*. Приклеивающее отображение $\dot{c}^2 \rightarrow c^0$ очевидно. Фактически это совпадает с рассмотренным в начале этого параграфа примером при $n = 2$. Здесь $r_0 = 1, r_1 = 0, r_2 = 1$ (Напомним, что r_k — число k -мерных клеток).

Пример 2. Пусть \mathbb{S}^1 — экватор сферы \mathbb{S}^2 . Выберем на экваторе две диаметрально противоположные точки c_{\pm}^0 и объявим их нульмерными клетками. Эти точки разбивают экватор на два замкнутых отрезка c_{\pm}^1 , которые мы объявляем одномерными клетками. Правило подклеивания одномерных клеток к нуль-мерному остову $\{c_1^0, c_2^0\}$ диктуется расположением этих точек и отрезков на окружности \mathbb{S}^1 . Экватор разбивает сферу \mathbb{S}^2 на северную и южную полусферы c_+^2 и c_-^2 . Мы объявляем их двумерными клетками, поскольку каждая из полусфер гомеоморфна двумерному шару. Опять правило подклеивания двумерных клеток к одномерному остову диктуется расположением полусфер по отношению к экватору (рис. 1.5, *б*). Мы получили представление \mathbb{S}^2 в виде клеточного комплекса с $r_0 = 2, r_1 = 2, r_2 = 2$.

Пример 3. Рассмотрим тетраэдр, расположенный в \mathbb{R}^3 так, что центр сферы \mathbb{S}^2 лежит внутри тетраэдра. Спроектируем тетраэдр на сферу \mathbb{S}^2 путем центрального проектирования из центра сферы. Четыре вершины тетраэдра спроектируются в четыре точки на сфере, которые мы объявляем нульмерными клетками. Шесть ребер тетраэдра спро-

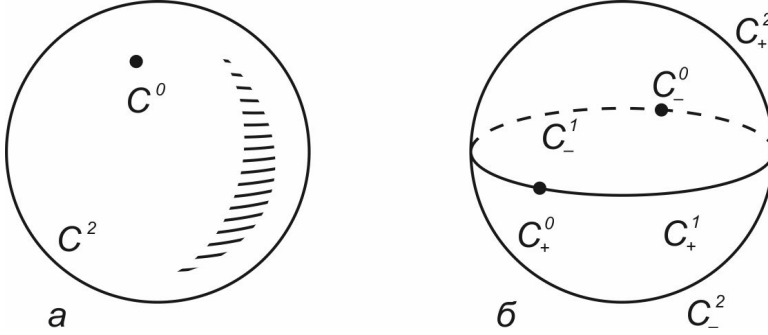


Рис. 1.5. Двумерная сфера, реализованная в виде двух клеточных комплексов

ектируются в шесть дуг окружностей на сфере, которые мы объявляем одномерными клетками. Наконец, четыре грани тетраэдра спроектируются в четыре криволинейных треугольника на сфере, которые объявляются двумерными клетками. Правило приклеивания клеток диктуется комбинаторной структурой тетраэдра (т. е. указанием того, какие ребра ограничивают данную грань и какие вершины являются концами данного ребра). Мы получили представление \mathbb{S}^2 в виде клеточного комплекса с $r_0 = 4, r_1 = 6, r_2 = 4$.

Пример 4. Предыдущий пример имеет очевидное обобщение: вместо тетраэдра можно использовать любой выпуклый многогранник. Получается представление \mathbb{S}^2 в виде клеточного комплекса с $r_0 = v, r_1 = e, r_2 = f$, где v — число вершин многогранника, e — число ребер и f — число граней.

Во всех приведенных примерах справедливо равенство $r_0 - r_1 + r_2 = 2$. Альтернированная сумма $\chi(K) = \sum_{k=0}^n (-1)^k r_k$ называется *эйлеровой характеристикой* конечного клеточного комплекса K . Здесь r_k — число клеток размерности k и n размерность комплекса, т. е. максимальная из размерностей его клеток. Имеет место следующая важная

Теорема 1.8.2. *Эйлерова характеристика полиэдра X*

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k r_k$$

не зависит от представления X в виде конечного клеточного комплекса.

Доказательство этой теоремы не приводится, поскольку оно требует привлечения некоторых средств алгебраической топологии. Отметим, что Леонард Эйлер доказал, что $v - e + f = 2$ для любого выпуклого многогранника, где v, e, f — соответственно число вершин, ребер и граней.



Рис. 1.6. Ориентируемая поверхность рода 2, или крендель

Упражнения

1. Найдите эйлерову характеристику двумерного тора $T^2 = S^1 \times S^1$.
2. “Научное” название поверхности, изображенной на рис. 1.6, — ориентируемая поверхность рода 2, хотя ее чаще называют кренделем. Найдите ее эйлерову характеристику.

1.9. Гомотопические свойства клеточных комплексов

Согласно приведенному в предыдущем параграфе определению, клеточный комплекс строится из клеток, подклеиваемых в порядке возрастания их размерностей. На практике это условие часто нарушается. Следующее утверждение разрешает такие нарушения, если результат интересует нас лишь с точностью до гомотопической эквивалентности.

Теорема 1.9.1. *Если K — конечный клеточный комплекс и $\varphi : \dot{c}^k \rightarrow K$ — непрерывное отображение, то $K \bigcup_{\varphi} c^k$ гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, у которого число k -мерных клеток на 1 больше, чем у K , а числа клеток остальных размерностей такие же, как и у K .*

На рис. 1.7 приведена простейшая иллюстрация к этой теореме. Комплекс K , изображенный в левой части рисунка, представляет окружность в виде объединения одной нульмерной клетки и одной одномерной. В средней части рисунка изображен результат “неправильного” подклеивания одномерной клетки \tilde{c}^1 к комплексу K . Конечно, этот объект также можно превратить в клеточный комплекс, увеличив число нульмерных клеток до трех и число одномерных клеток до четырех. В правой части рисунка изображен клеточный комплекс, полученный “правильным” подклеиванием той же клетки \tilde{c}^1 к комплексу K . Полученный комплекс состоит из одной нульмерной клетки и двух одномерных, как утверждает теорема 1.9.1. Очевидно, пространства, изображенные в средней и правой частях рисунка, гомотопически эквивалентны.

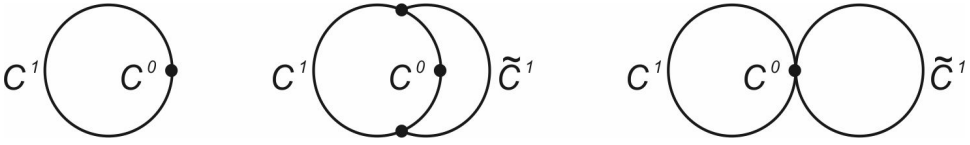


Рис. 1.7. Неправильное и правильное приклеивание клетки к клеточному комплексу

Если клеточный комплекс интересует нас с точностью до гомотопической эквивалентности, то мы имеем еще одну возможность изменять конструкцию этого комплекса, как показывает следующая

Теорема 1.9.2. *Гомотопический тип конечного клеточного комплекса не изменится, если каждое из приклеивающих отображений, участвующих в построении комплекса, заменить на гомотопное ему отображение.*

Теоремы 1.9.1 и 1.9.2 вытекают из следующих трех лемм.

Лемма 1.9.3. *Пусть K — конечный клеточный комплекс и $\psi_0 : \dot{c}^k \rightarrow K$ — непрерывное отображение. Существует отображение $\psi_1 : \dot{c}^k \rightarrow K^{k-1}$ гомотопное ψ_0 , где K^{k-1} — $(k-1)$ -мерный остов K .*

Доказательство. Занумеруем все клетки комплекса K , обозначив их

$$c_1^{n_1}, \dots, c_M^{n_M},$$

где n_i — размерность клетки. Пусть $n = \dim K = \max\{n_1, \dots, n_M\}$. Как мы отмечали в предыдущем параграфе, K можно представить в виде объединения непересекающихся множеств — внутренностей клеток:

$$K = \bigcup_{i=1}^M \mathring{c}_i^{n_i}, \quad \mathring{c}_i^{n_i} \cap \mathring{c}_j^{n_j} = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Зафиксируем какую-нибудь клетку \mathring{c}_j^n максимальной размерности n и докажем следующее утверждение.

(*) Если $k \leq n$, то любое отображение $\psi_0 : \dot{c}^k \rightarrow K$ гомотопно некоторому отображению $\psi_1 : \dot{c}^k \rightarrow K \setminus \mathring{c}_j^n$, образ которого не задевает клетку \mathring{c}_j^n .

Из утверждения (*) следует утверждение леммы. Действительно, применив утверждение (*) ко всем клеткам старшей размерности n , мы получим отображение $\psi_1 : \dot{c}^k \rightarrow K^{n-1}$, гомотопное ψ_0 . Если $k \leq n-1$, то мы можем повторить наши рассуждения, получив отображение $\psi_2 : \dot{c}^k \rightarrow K^{n-2}$, гомотопное ψ_1 , и так далее.

Доказательство утверждения (*) основано на единственном факте: размерность $(k-1)$ сферы \dot{c}^k меньше размерности n клетки \mathring{c}_j^n . Отождествим \mathring{c}_j^n с диском $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, а \dot{c}_j^n отождествим со сферой $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Множество $\Gamma^{k-1} = \mathring{c}_j^n \cap \psi_0(\dot{c}^k)$ является $(k-1)$ -мерной поверхностью в n -мерном шаре \mathring{c}_j^n . Без ограничения общности можно считать, что эта поверхность гладкая, поскольку отображение ψ_0 можно аппроксимировать близким гладким отображением, гомотопным ψ_0 . По теореме Сарда 2.7.3, которая будет доказана в следующей главе, найдется точка $x_0 \in \mathring{c}_j^n$, не принадлежащая поверхности Γ^{k-1} . Если точка $x \in \dot{c}^k$ такова, что $\psi_0(x) \in \Gamma^{k-1}$, то через $z(x)$ обозначим точку сферы \dot{c}_j^n , лежащую на луче, выходящем из x_0 и проходящем через $\psi_0(x)$. Точка $z(x)$ непрерывно зависит от x , поскольку $x_0 \neq \psi_0(x)$.

Пусть $\varphi_j : \dot{c}_j^n \rightarrow K^{n-1}$ — отображение приклеивания клетки \mathring{c}_j^n , участвующее в определении клеточного комплекса. Определим семейство отображений $\psi_t : \dot{c}^k \rightarrow K$ ($0 \leq t \leq 1$) следующим образом:

$$\psi_t(x) = \begin{cases} (1-t)\psi_0(x) + tz(x), & \text{если } \psi_0(x) \in \mathring{c}_j^n \text{ и } t < 1; \\ \varphi_j(z(x)), & \text{если } \psi_0(x) \in \mathring{c}_j^n \text{ и } t = 1; \\ \psi_0(x), & \text{если } \psi_0(x) \notin \mathring{c}_j^n. \end{cases}$$

Очевидно, при $t = 0$ мы имеем исходное отображение ψ_0 . При $t = 1$ образ отображения ψ_1 не пересекает \dot{c}_j^n . Наконец, надо проверить непрерывность $\psi_t(x)$ по (x, t) , т. е. согласованность строк этой формулы там, где одновременно имеют смысл две из них. При t , стремящемся к единице, $\psi_t(x)$ стремится к $z(x)$, согласно первой строке формулы. Согласно второй строке, $\psi_1(x) = \varphi_j(z(x))$. Но точки $z \in \dot{c}_j^n$ и $\varphi_j(z)$ отождествляются приклеивающим отображением φ_j . \square

Лемма 1.9.4. Пусть X — топологическое пространство и $\varphi_0, \varphi_1 : \dot{c}^n \rightarrow X$ — два непрерывных отображения. Если φ_0 и φ_1 гомотопны, то тождественное отображение пространства X продолжается до гомотопической эквивалентности $k : X \bigcup_{\varphi_0} \dot{c}^n \rightarrow X \bigcup_{\varphi_1} \dot{c}^n$.

Сначала поясним идею доказательства в случае $n = 1$, взяв в качестве X прямоугольник на плоскости. На рис. 1.8, а изображены результаты приклеивания одномерной клетки $c^1 = [-1, 1]$ к прямоугольнику X по отображениям φ_0 и φ_1 . Гомотопность этих отображений означает в данном случае существование в X двух кривых $\varphi_t(\pm 1)$, соединяющих точки $\varphi_0(\pm 1)$ и $\varphi_1(\pm 1)$.

Определим отображение $k : X \bigcup_{\varphi_0} c^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi_1} c^1$, как указано на рис. 1.8, б, где соответственные точки обозначены одинаковыми буквами и дуги кривых между этими точками переводятся отображением k друг в друга с соответствующим растяжением (или сжатием). Отображение $\ell : X \bigcup_{\varphi_1} c^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi_0} c^1$ определяется аналогично с перестановкой ролей левой и правой частей.

Композиция $\ell \circ k : X \bigcup_{\varphi_0} c^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi_0} c^1$ изображена на рис. 1.8, в, где кривые $\varphi_t(\pm 1)$ проходятся дважды, в прямом и обратном направлениях. Из этого рисунка ясно, как построить гомотопию h_t между тождественным отображением и $\ell \circ k$: надо лишь в правой части этого рисунка заменить кривую ABC кривой AB_tC , где $B_t = \varphi_t(-1)$, и аналогично поступить с DEF .

В общем случае доказательство тоже следует этой идее. Поведение всех отображений на каждом диаметре клетки c^n соответствует этим рисункам.

Доказательство леммы 1.9.4. Пусть $\varphi_t : \dot{c}^n \rightarrow X$ — гомотопия между

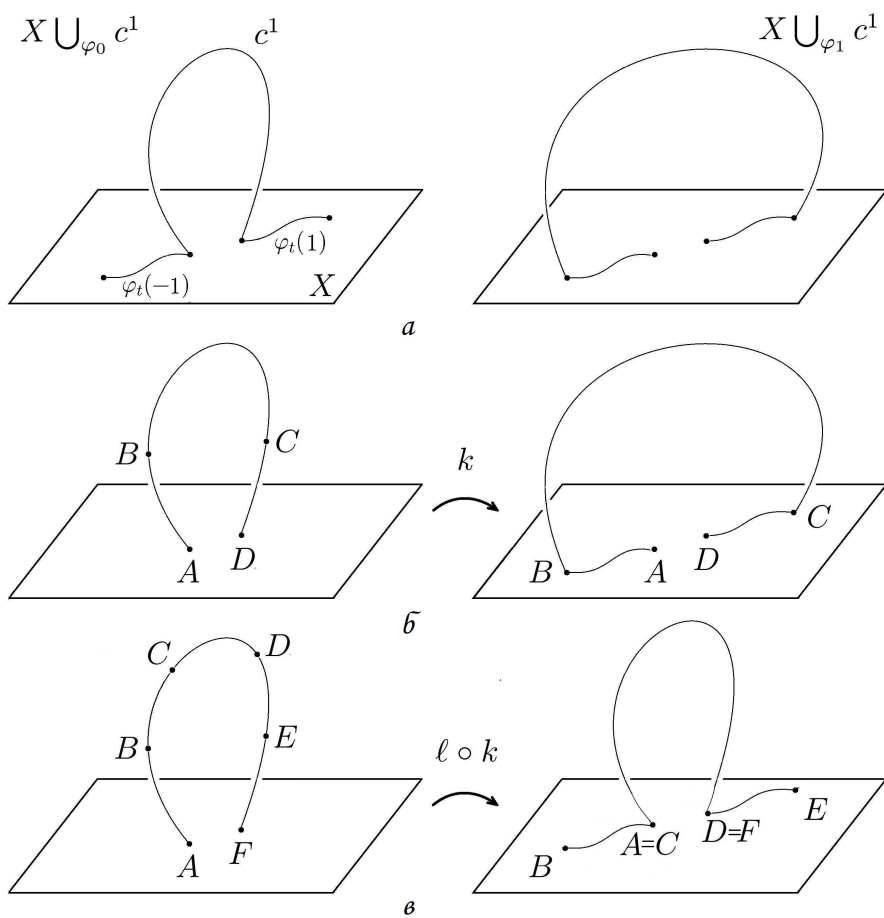


Рис. 1.8. Если φ_0 и φ_1 гомотопны, то $X \cup_{\varphi_0} c^1$ и $X \cup_{\varphi_1} c^1$ гомотопически эквивалентны

φ_0 и φ_1 . Определим отображение $k : X \bigcup_{\varphi_0} c^n \rightarrow X \bigcup_{\varphi_1} c^n$ формулой

$$\begin{cases} k(x) = x & \text{при } x \in X; \\ k(ty) = 2ty & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, y \in \dot{c}^n; \\ k(ty) = \varphi_{2-2t}(y) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1, y \in \dot{c}^n. \end{cases}$$

Отображение $\ell : X \bigcup_{\varphi_1} c^n \rightarrow X \bigcup_{\varphi_0} c^n$ определяется аналогично с заменой ролей φ_0 и φ_1 . Нетрудно проверить, что обе композиции $\ell \circ k$ и $k \circ \ell$ гомотопны тождественным отображениям (найдите гомотопию, руководствуясь приведенными рисунками). \square

Лемма 1.9.5. Пусть $\varphi : \dot{c}^n \rightarrow X$ — отображение приклеивания. Каждая гомотопическая эквивалентность $f : X \rightarrow Y$ продолжается до гомотопической эквивалентности $F : X \bigcup_{\varphi} c^n \rightarrow Y \bigcup_{f\varphi} c^n$.

Доказательство. Определим F условиями

$$F|_X = f, \quad F|_{\dot{c}^n} = I,$$

где I — тождественное отображение. Пусть $g : Y \rightarrow X$ — гомотопически обратное к f . Определим $G : Y \bigcup_{f\varphi} c^n \rightarrow X \bigcup_{g\varphi} c^n$ аналогично:

$$G|_Y = g, \quad G|_{\dot{c}^n} = I.$$

Так как $gf\varphi \sim \varphi$, то с помощью леммы 1.9.4 получаем гомотопическую эквивалентность

$$k : X \bigcup_{gf\varphi} c^n \rightarrow X \bigcup_{\varphi} c^n.$$

Докажем, что композиция

$$kGF : X \bigcup_{\varphi} c^n \rightarrow X \bigcup_{\varphi} c^n$$

гомотопна тождественному отображению.

Пусть $h_t : X \rightarrow X$ — гомотопия между gf и I_X . Пользуясь специальным видом отображений F, G и k (вид последнего описан в доказательстве леммы 1.9.4), видим, что

$$\begin{cases} kGF(x) = gf(x) & \text{при } x \in X; \\ kGF(ty) = 2ty & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, y \in \dot{c}^n; \\ kGF(ty) = h_{2-2t}(\varphi(y)) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1, y \in \dot{c}^n. \end{cases}$$

Теперь искомая гомотопия

$$g_\tau : X \bigcup_\varphi c^n \rightarrow X \bigcup_\varphi c^n$$

между kGF и I определяется формулами

$$\begin{cases} g_\tau(x) = h_\tau(x) & \text{при } x \in X; \\ g_\tau(ty) = \frac{2}{1+\tau}ty & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, y \in \dot{c}^n; \\ g_\tau(ty) = h_{2-2t+\tau}(\varphi(y)) & \text{при } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, y \in \dot{c}^n. \end{cases}$$

Итак, $kGF \sim I$, т.е. F имеет левое гомотопически обратное.

Прервем доказательство леммы 1.9.5, чтобы доказать следующее утверждение.

Лемма 1.9.6. *Если отображение $F : X \rightarrow Y$ имеет левое гомотопически обратное L и правое гомотопически обратное R , то F есть гомотопическая эквивалентность, а L (или R) — двустороннее гомотопически обратное к F .*

Доказательство. Мы имеем $LF \sim I$ и $FR \sim I$. Отсюда

$$L \sim L(FR) = (LF)R \sim R.$$

Следовательно, $RF \sim LF \sim I$. □

Окончание доказательства леммы 1.9.5. Мы установили, что $kGF \sim I$, т.е. F имеет левое гомотопически обратное. Поскольку F и G равноправны, то G также имеет левое гомотопически обратное. Теперь доказательство завершается с помощью леммы 1.9.6 в три шага:

- а) поскольку $k(GF) \sim I$ и k имеет левое обратное, то $(GF)k \sim I$;
- б) поскольку $G(Fk) \sim I$ и G имеет левое обратное, то $(Fk)G \sim I$;
- в) поскольку $F(kG) \sim I$ и F имеет левое обратное, то F — гомотопическая эквивалентность. □

Понятно, что теорема 1.9.1 следует из лемм 1.9.3 и 1.9.4. Поясним, как теорема 1.9.2 следует из лемм 1.9.4 и 1.9.5. Пусть комплекс K строится из клеток $c_1^{n_1}, \dots, c_M^{n_M}$ в указанной очередности с помощью приклеивающих отображений $\varphi_1, \dots, \varphi_M$. Допустим, что для некоторого i отображение $\varphi_i : \dot{c}_i^{n_i} \rightarrow K^{n_i-1}$ заменяется гомотопным ему отображением $\tilde{\varphi}_i : \dot{c}_i^{n_i} \rightarrow K^{n_i-1}$. Согласно лемме 1.9.4, имеется гомотопическая

эквивалентность $k : K^{n_i-1} \bigcup_{\varphi_i} c_i^{n_i} \rightarrow K^{n_i-1} \bigcup_{\tilde{\varphi}_i} c_i^{n_i}$. Теперь каждую последующую клетку $c_j^{n_j}$ ($j > i$) надо приклеивать к $K^{n_i-1} \bigcup_{\tilde{\varphi}_i} c_i^{n_i}$ с помощью отображения $k\varphi_j$. В результате, согласно лемме 1.9.5, получим комплекс, гомотопически эквивалентный K . Аналогично обстоит дело, когда несколько приклеивающих отображений заменяются на гомотопически им эквивалентные.

Результаты этого параграфа будут использованы в главе 3.

Литература, рекомендуемая к этой главе: [1, 4, 8].

Глава 2

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Как отмечалось в начале первой главы, на топологическом пространстве возможно рассмотрение непрерывных функций и других понятий, связанных с непрерывностью. В “Анализе”, наряду с непрерывностью, изучаются производные, дифференциалы и другие понятия, связанные с дифференцируемостью. Гладкое многообразие — естественный объект, на котором можно определить подобные понятия.

2.1. Определение гладкого многообразия

Сначала введем вспомогательное понятие топологического многообразия (предупреждение: не путать его с понятием гладкого многообразия). Топологическое пространство M называется *топологическим многообразием* размерности n , если

- 1) M локально гомеоморфно пространству \mathbb{R}^n , т. е. у каждой точки пространства M имеется окрестность, гомеоморфная некоторому открытому множеству в \mathbb{R}^n ;
- 2) M хаусдорфово;
- 3) M удовлетворяет второй аксиоме счетности, т. е. имеет счетную базу топологии.

Дифференцируемая структура на топологическом многообразии вводится путем цепочки определений, представленных в нескольких следующих абзацах.

Пусть M — топологическое многообразие размерности n . *Картой* на M называется пара (U, φ) , где U — открытое множество в M и

$\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм на некоторое открытое множество из \mathbb{R}^n .

Пусть $0 \leq r \leq \infty$ — целое число. Две карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) на топологическом многообразии M называются C^r -согласованными, если

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \quad (2.1.1)$$

— отображение класса C^r , т. е. все частные производные порядка $\leq r$ этого отображения существуют и непрерывны. Отметим, что $\varphi_i(U_1 \cap U_2)$ ($i = 1, 2$) — открытые множества в \mathbb{R}^n (рис. 2.1), так что определено понятие частных производных для отображения между этими множествами. При $r = \infty$ требуется существование и непрерывность всех частных производных.

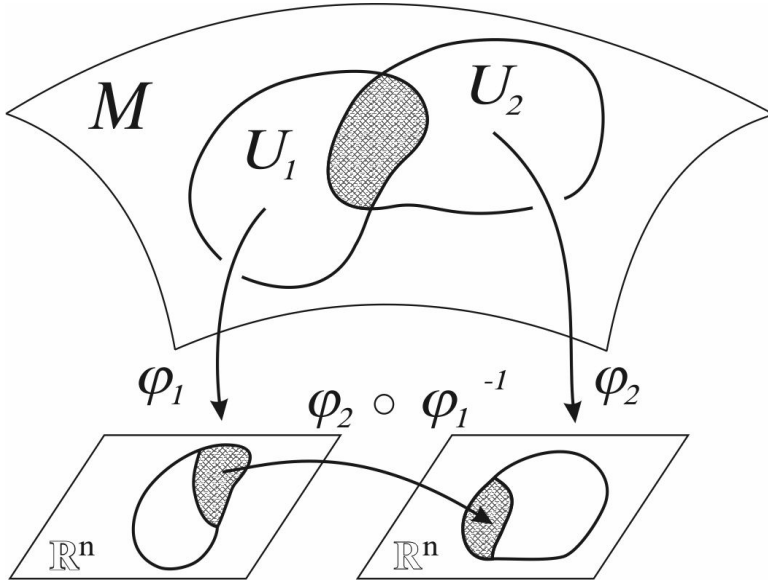


Рис. 2.1. Согласованные карты

Семейство карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ на топологическом многообразии M называется C^r -атласом, если $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и любые две карты этого семейства C^r -согласованы.

Два C^r -атласа \mathcal{A} и \mathcal{A}' на M называются *эквивалентными*, если $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ — тоже C^r -атлас. Как легко видеть, это эквивалентно требованию: любая карта из \mathcal{A} C^r -согласована с любой картой из \mathcal{A}' .

Теперь, наконец, мы можем привести основное

Определение 2.1.1. *Дифференцируемой структурой \mathcal{D} класса C^r на топологическом многообразии M называется класс эквивалентности C^r -атласов. Топологическое многообразие вместе с зафиксированной на нем дифференцируемой структурой класса C^r называется дифференцируемым многообразием класса C^r (или C^r -многообразием). Дифференцируемое многообразие обозначается (M, \mathcal{D}) или просто M , если из контекста ясно, о какой дифференцируемой структуре идет речь.*

Класс эквивалентности атласов однозначно определяется указанием одного представителя этого класса. Поэтому для определения дифференцируемой структуры класса C^r на топологическом многообразии M достаточно указать один C^r -атлас на M . Так чаще всего и поступают. Примеры будут приведены в следующем параграфе.

Мы будем использовать термин “гладкий” как синоним термина “бесконечно дифференцируемый”. Таким образом, *гладкое многообразие* означает дифференцируемое многообразие класса C^∞ . В дальнейшем почти всегда мы будем рассматривать гладкие многообразия. Этот выбор объясняется нежеланием усложнять изложение несущественными деталями. Практически каждое из приводимых далее утверждений справедливо для дифференцируемых многообразий класса C^r с некоторым конечным r . Чтобы найти минимальное значение r , для которого справедливо данное утверждение, надо определить максимальный порядок производных, используемых при его доказательстве; чаще всего это делается очень просто. Не желая загромождать текст подобными мелочами, мы ограничимся случаем, когда все производные существуют и непрерывны.

В дальнейшем, говоря о *карте на гладком многообразии* (M, \mathcal{D}) , мы всегда будем иметь в виду карту (U, φ) , согласованную с гладкой структурой \mathcal{D} , т. е. принадлежащую одному из атласов, образующих класс эквивалентности \mathcal{D} .

Отметим здесь две важные модификации приведенного определения. Если мы потребуем, чтобы отображение (2.1.1) было действительно аналитическим, оставив остальные определения без изменений, то придем к понятию *вещественно аналитического многообразия*. (Напомним, что гладкая действительная функция f , определенная на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, называется действительно аналитической, если каждая точка $x_0 \in U$ обладает такой окрестностью $V \subset U$, что

ряд Тейлора функции f в точке x_0 сходится в V и его сумма совпадает с f .) Если же мы в приведенном определении заменим \mathbb{R}^n комплексным пространством \mathbb{C}^n и потребуем, чтобы отображение (2.1.1) было голоморфным (комплексно аналитическим), то придем к определению *комплексно аналитического многообразия* комплексной размерности n . Действительная размерность такого многообразия равна $2n$. В настоящем курсе мы не будем заниматься теорией аналитических многообразий, которая сильно отличается от теории гладких многообразий.

Пусть M, N — два гладких многообразия и $f : M \rightarrow N$ — непрерывное отображение. В каком случае следует считать f гладким в окрестности точки $p \in M$? Выберем такие карты (U, φ) и (V, ψ) на многообразиях M и N соответственно, что $p \in U$ и $f(p) \in V$. Пусть $\tilde{U} \subset U$ — меньшая открытая окрестность точки p , для которой $f(\tilde{U}) \subset V$. Тогда определено отображение между открытыми множествами евклидовых пространств

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\tilde{U}) \rightarrow \psi(f(\tilde{U})).$$

Если это отображение гладкое, то говорим, что f *гладко в окрестности \tilde{U} точки p* . Очевидно, это свойство не зависит от выбора карт в силу гладкой согласованности любых двух карт данной гладкой структуры. Говорим, что f — *гладкое отображение*, если оно гладко в окрестности любой точки $p \in M$.

Композиция гладких отображений снова является гладким отображением: если $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ — два гладких отображения, то $g \circ f : M \rightarrow L$ — гладкое отображение. Это утверждение доказывается в “Анализе” в случае, когда M, N, L открытые множества евклидовых пространств. Отсюда немедленно следует справедливость утверждения для многообразий.

Гладкое биективное отображение $f : M \rightarrow N$ называется *диффеоморфизмом*, если f^{-1} тоже гладкое. Говорим, что два многообразия *диффеоморфны*, если существует диффеоморфизм одного на другое. Конечно, размерности диффеоморфных многообразий совпадают.

Упражнение

Пример нехаусдорфова пространства локально гомеоморфного \mathbb{R} .

Пусть $\mathbb{R}^2 \supset X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$, рассматриваемое с индуцированной из \mathbb{R}^2 топологией. Введем на X отношение эквивалентности, полагая $(x, 0) \sim (x, 1)$ для $x < 0$; остальные точки пространства X

эквивалентны лишь себе. Пусть $M = X/\sim$ и $\pi : X \rightarrow M$ — естественная проекция. Докажите, что M локально гомеоморфно \mathbb{R} . Обратите внимание, что $x_0 = \pi(0, 0)$ и $x_1 = \pi(0, 1)$ являются различными точками пространства M . Покажите, что если U_i — окрестность точки x_i ($i = 0, 1$), то $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Таким образом, M не является хаусдорфовым пространством.

2.2. Примеры гладких многообразий

Пример 1. Самым простым и важным примером является \mathbb{R}^n , гладкая структура на котором задается атласом $\{(\mathbb{R}^n, I)\}$, состоящем из одной карты. Здесь I — тождественное отображение. Эта гладкая структура на \mathbb{R}^n называется стандартной. Если не оговорено противное, \mathbb{R}^n всегда рассматривается с этой гладкой структурой.

Пример 2 является очевидным обобщением примера 1. Пусть V — n -мерное действительное векторное пространство. Выбрав в нем базис, определим биективное отображение $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопоставляющее вектору набор его координат относительно выбранного базиса. Определим топологию на V , потребовав, чтобы φ было гомеоморфизмом. Зададим на V гладкую структуру с помощью атласа $\{(V, \varphi)\}$, состоящего из одной карты. Эта гладкая структура не зависит от выбора базиса, поскольку при замене базиса координаты вектора преобразуются посредством линейных формул.

Пример 3. На \mathbb{C}^n вводится стандартная структура n -мерного комплексно аналитического многообразия путем дословного повторения примера 1.

Пример 4. Введем на сфере

$$\mathbb{S}^n = \{a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1\}$$

атлас, состоящий из двух карт. Пусть $N = (0, \dots, 0, 1)$ — северный полюс сферы и $S = (0, \dots, 0, -1)$ — южный полюс. Полагаем $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ и $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Рассматриваем $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ в качестве координатной гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+1} . Определим гомеоморфизм $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом. Для точки $a \in U_1$ прямая, проходящая через N и a , пересекает \mathbb{R}^n в единственной точке $x = \varphi_1(a)$

(рис. 2.2). Отображение φ_1 называется *стереографической проекцией*. Аналогично определяется гомеоморфизм $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пара карт $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ образует гладкий атлас на \mathbb{S}^n , определяющий стандартную гладкую структуру на сфере.

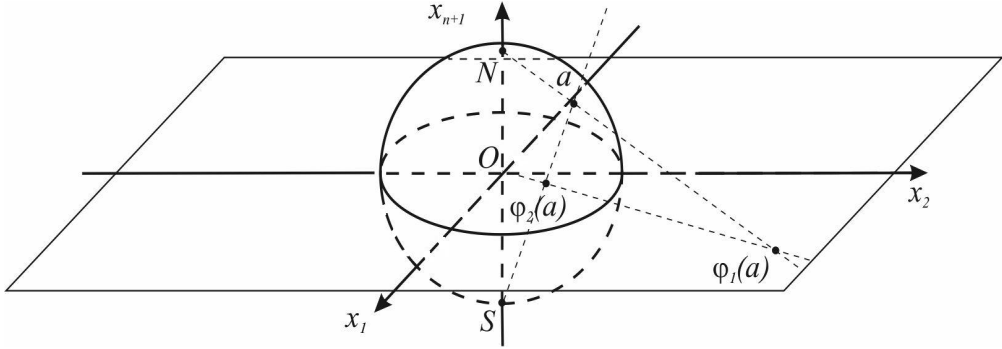


Рис. 2.2. Стереографическая проекция

Чтобы проверить согласованность этих двух карт, найдем аналитическое выражение стереографической проекции. Пусть $a \in \mathbb{S}^n$ и $x = \varphi_1(a)$. Тогда векторы $a - N$ и $x - N$ коллинеарны, т. е. $a - N = \lambda(x - N)$ для некоторого числа λ . Это число находим, используя то, что последняя координата точки x равна нулю: $a_{n+1} - 1 = -\lambda$, т. е. $\lambda = 1 - a_{n+1}$. Подставляя это значение в равенства $a_i = \lambda x_i$ ($1 \leq i \leq n$), получаем

$$x_i = \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.2.1)$$

Отсюда

$$\|x\|^2 = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(1 - a_{n+1})^2} = \frac{1 - a_{n+1}^2}{(1 - a_{n+1})^2} = \frac{1 + a_{n+1}}{1 - a_{n+1}}. \quad (2.2.2)$$

Аналогично если $y = \varphi_2(a)$, то

$$y_i = \frac{a_i}{1 + a_{n+1}} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.2.3)$$

Очевидно, $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Чтобы найти аналитическое выражение для отображения $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, надо выразить точку $y = \varphi_2(a)$ через $x = \varphi_1(a)$. Из (2.2.1) и (2.2.3) следует, что $y = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} x$. С помощью (2.2.2) это преобразуется к виду $y = x/\|x\|^2$, что и доказывает гладкую согласованность карт. Кстати, отображение $x \mapsto y = x/\|x\|^2$ называется инверсией

пространства \mathbb{R}^n относительно единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} .

Пример 5. Напомним (см. пример 6в из §1.3), что действительное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ получается из $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ отождествлением точек (a_1, \dots, a_{n+1}) и $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_{n+1})$ для $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Точки пространства $\mathbb{R}P^n$ обозначаются через $a = (a_1 : \dots : a_{n+1})$, где двоеточия подчеркивают, что важны значения не самих координат, а лишь их попарных отношений. Введем на $\mathbb{R}P^n$ атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, состоящий из $(n+1)$ -й карты. Полагаем $U_i = \{a \in \mathbb{R}P^n \mid a_i \neq 0\}$. Отображение

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a = (a_1 : \dots : a_{n+1}) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_i} \right)$$

является гомеоморфизмом. Проверим, что карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) гладко согласованы. Действительно,

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} (1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n) \xrightarrow{\varphi_2} \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right).$$

Аналогично проверяется согласованность любых двух карт этого атласа.

На комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ вводится структура комплексно аналитического многообразия путем дословного повторения приведенной конструкции с единственным изменением: вместо действительных чисел используются комплексные числа.

Пример 6. На произведении $M \times N$ двух гладких многообразий вводится гладкая *структура произведения* посредством следующей конструкции. Если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — атлас на M и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ — атлас на N , то $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ объявляется атласом на $M \times N$.

Пример 7. Обозначим через $G_{n,k}$ множество всех k -мерных векторных подпространств в \mathbb{R}^n . Снабдим его топологией и структурой гладкого многообразия. Оно называется *многообразием Грассмана k -мерных плоскостей в \mathbb{R}^n* . Пусть V^k — k -мерное векторное подпространство \mathbb{R}^n . Выберем базис $\{a_1, \dots, a_k\}$ в V^k и составим из координат этих векторов матрицу размера $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } A = k.$$

Пространство V^k натянуто на столбцы этой матрицы. Если $\{b_1, \dots, b_k\}$ — другой базис V^k , то $B = AC$, где C — невырожденная $k \times k$ -матрица. Обратно, любой $n \times k$ -матрице ранга k можно сопоставить подпространство $V^k \subset \mathbb{R}^n$, натянутое на столбцы этой матрицы. Двум матрицам A, B будет соответствовать одно и то же V^k тогда и только тогда, когда $A = BC$, где C — невырожденная $k \times k$ -матрица.

Заметим, что множество $M_{n,k}$ всех $n \times k$ -матриц ранга k является открытым множеством в \mathbb{R}^{nk} и тем самым снабжено индуцированной топологией. Введя на этом множестве отношение эквивалентности, $A \sim B \Leftrightarrow A = BC$, мы превращаем $G_{n,k} = M_{n,k}/\sim$ в топологическое пространство.

Теперь определим на $G_{n,k}$ структуру гладкого многообразия. Для каждого набора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, где $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq n$, обозначим через $U_\nu \subset G_{n,k}$ открытое подмножество, состоящее из классов эквивалентности тех матриц, у которых отличен от нуля минор, образованный строками с номерами ν_1, \dots, ν_k . Рассмотрим для примера $\nu = (1, \dots, k)$. Точки множества $U_{(1, \dots, k)}$ можно представить матрицами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix},$$

где I — единичная $k \times k$ -матрица и X — $(n-k) \times k$ -матрица. Матрица X однозначно определяется точкой $[A] \in U_{(1, \dots, k)}$. Отождествив множество $(n-k) \times k$ -матриц с $\mathbb{R}^{k(n-k)}$, мы получаем гомеоморфизм $\varphi_{(1, \dots, k)} : U_{(1, \dots, k)} \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$. Тем самым мы определили карту $(U_{(1, \dots, k)}, \varphi_{(1, \dots, k)})$ на $G_{n,k}$. Аналогично определяются карты (U_ν, φ_ν) для остальных ν . Легко убедиться, что эти карты гладко согласованы. Действительно, отображение $\varphi_\nu \circ \varphi_\mu^{-1} : \mathbb{R}^{k(n-k)} \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ сводится к перестановкам координат, умножению матриц и обращению невырожденных матриц. Все эти операции выражаются рациональными функциями.

В заключение параграфа коснемся вопроса: сколько гладких структур существует на данном топологическом многообразии M ? Начнем с простейшего случая

$M = \mathbb{R}$. В примере 1 мы уже ввели стандартную (каноническую) гладкую структуру \mathcal{D}_{can} посредством атласа $\{(\mathbb{R}, I)\}$, состоящего из одной карты. Определим вторую гладкую структуру \mathcal{D}_3 на \mathbb{R} также посредством атласа $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ из одной карты, где $\varphi(x) = x^3$. Заметим, что карты (\mathbb{R}, I) и (\mathbb{R}, φ) не согласованы, поскольку функция $\varphi^{-1}(x) = x^{1/3}$ недифференцируема в точке $x = 0$. Таким образом, гладкие структуры \mathcal{D}_{can} и \mathcal{D}_3 различны. Тем не менее, многообразия $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{can})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_3)$ диффеоморфны, диффеоморфизм $f : (\mathbb{R}, \mathcal{D}_{can}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{D}_3)$ определяется равенством $f(x) = x^{1/3}$.

Уточним наш вопрос следующим образом: сколько попарно недиффеоморфных гладких структур существует на данном топологическом многообразии M ? Первый нетривиальный результат в этом направлении был получен Джоном Милнором в конце 50-х годов прошлого века. Он установил, что на сфере \mathbb{S}^7 имеются ровно 28 попарно недиффеоморфных гладких структур. Одна из них совпадает со стандартной структурой, введенной в примере 4, остальные определяют так называемые *экзотические сферы*. Опишем вкратце схему рассуждений Милнора. Рассмотрим сферу \mathbb{S}^7 как объединение двух открытых шаров, один из которых чуть больше северной полусферы, а второй чуть больше южной полусферы. На каждом из шаров гладкая структура определяется однозначно. Чтобы получить гладкую структуру на всей сфере \mathbb{S}^7 , надо гладкие структуры на шарах склеить с помощью диффеоморфизма $f : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6$ экваториальной сферы. Милнор доказал, что два диффеоморфизма сферы \mathbb{S}^6 определяют диффеоморфные гладкие структуры на \mathbb{S}^7 тогда и только тогда, когда эти диффеоморфизмы изотопны (понятие изотопности двух диффеоморфизмов $f_0, f_1 : M \rightarrow M$ вполне аналогично понятию гомотопности; надо лишь потребовать, чтобы каждое промежуточное отображение $f_t : M \rightarrow M$ также было диффеоморфизмом). Таким образом, вопрос сводится к классификации диффеоморфизмов сферы \mathbb{S}^6 с точностью до изотопности. Милнор доказал, что, будучи факторизованным по отношению изотопности, множество диффеоморфизмов сферы \mathbb{S}^6 состоит из 28 классов эквивалентности.

На \mathbb{R}^n при $n \neq 4$ существует, с точностью до диффеоморфизма, одна гладкая структура. Четырехмерный случай долгое время оставался загадкой. Прорыв в четырехмерной топологии произошел в 80-е годы прошлого века в значительной степени под влиянием некоторых идей, пришедших из физики (уравнения Янга – Миллса). В частности, оказалось, что на \mathbb{R}^4 существует бесконечно много попарно недиффеоморфных гладких структур. Были также найдены примеры четырехмерных топологических многообразий, на которых нет гладких структур.

2.3. Разбиение единицы

Гладкое многообразие локально устроено как евклидово пространство. Локально мы можем производить на многообразии все построения, которые обычно делаются в области евклидова пространства. Но затем возникает потребность распространить результат до некоторого глобального объекта, определенного на всем многообразии. Разбиение единицы служит основным средством такой глобализации.

Определим *носитель* $\text{supp } f$ непрерывной функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ как замыкание множества $\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$. Дополнение к $\text{supp } f$ есть наибольшее открытое множество, на котором функция f тождественно равна нулю.

В §2.1 мы определили понятие гладкого отображения $f : M \rightarrow N$. В частности, определено понятие гладкой действительной функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком многообразии (\mathbb{R} рассматривается со стандартной гладкой структурой). Напомним также, что в §1.6 было введено понятие открытого покрытия топологического пространства.

Определение 2.3.1. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие гладкого многообразия M и $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство действительных функций на M , занумерованное тем же множеством индексов A . Говорим, что $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является разбиением единицы, подчиненным покрытию \mathcal{U} , если

1) каждая $\lambda_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ является гладкой функцией, причем $0 \leq \lambda_\alpha(x) \leq 1$ для всех $x \in M$;

2) семейство носителей $\{\text{supp } \lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является локально конечным, т. е. у любой точки $x \in M$ существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств этого семейства;

3) для любой точки $x \in M$

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(x) = 1,$$

в силу условия 2) лишь конечное число слагаемых этой суммы отлично от нуля;

4) $\text{supp } \lambda_\alpha \subset U_\alpha$ для любого $\alpha \in A$.

Теорема 2.3.2. Для любого открытого покрытия гладкого многообразия существует подчиненное ему разбиение единицы.

Отметим прежде всего, что теорема 2.3.2 является первым и главным местом, где теория гладких многообразий решительно расходится с теорией (вещественных или комплексных) аналитических многообразий. Действительно, в случае аналитического многообразия естественно потребовать, чтобы все функции λ_α были аналитическими. Но такой вариант теоремы 2.3.2 невозможен ввиду принципа единственности для аналитических функций: если аналитическая функция равна нулю на сколь угодно малом открытом множестве, то она тождественно равна нулю.

Приведем схематический пример того, как разбиение единицы применяется для вывода глобальных свойств из локальных. Допустим, нас интересуют свойства некоторой гладкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Выберем атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ на M и разбиение единицы $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Тогда

$$f = 1 \cdot f = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha, \quad \text{где} \quad f_\alpha = \lambda_\alpha f.$$

Носитель функции f_α лежит в U_α , поэтому все свойства этой функции можно выяснить, рассматривая функцию $f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ на области евклидова пространства. Если интересующее нас свойство “выживает при сложении функций”, то из того, что каждая f_α обладает этим свойством, следует, что и $f = \sum_\alpha f_\alpha$ обладает им.

Выделим частный случай теоремы 2.3.2, поскольку он часто используется.

Следствие 2.3.3. Пусть A и B — два непересекающихся замкнутых множества в гладком многообразии M . Существует такая гладкая функция $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$, что $\mu|_A = 1$, $\mu|_B = 0$ и $0 \leq \mu(x) \leq 1$ для всех $x \in M$.

Для доказательства следствия 2.3.3 достаточно рассмотреть открытое покрытие $\{M \setminus B, M \setminus A\}$ многообразия M , состоящее из двух множеств, и найти подчиненное ему разбиение единицы $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Очевидно, функция $\mu = \lambda_1$ обладает требуемыми свойствами.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 2.3.2. Начнем с некоторых рассуждений на \mathbb{R}^n .

Лемма 2.3.4. Существует такая гладкая функция $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что $\mu(x) = 1$ при $\|x\| \leq 1$, $\mu(x) = 0$ при $\|x\| \geq 2$, $0 \leq \mu(x) \leq 1$ при всех x .

Доказательство. Последовательно определим несколько гладких функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (читателю предлагается нарисовать их графики).

1. Начнем с функции $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенной равенством

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Это — функция класса C^∞ , тождественно равная нулю на $(-\infty, 0]$ и положительная на $(0, \infty)$. В “Анализе” α обычно приводится в качестве примера функции, ряд Тейлора которой сходится, но его сумма отлична от функции. Действительно, все производные функции α обращаются в нуль в точке $x = 0$.

2. Затем определим $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\beta(x) = \alpha(x)\alpha(1-x).$$

Это — гладкая функция, положительная на интервале $(0, 1)$ и тождественно равная нулю вне этого интервала.

3. Определяем $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\gamma(x) = \frac{\int_0^x \beta(t) dt}{\int_0^1 \beta(t) dt}.$$

Это — гладкая функция, удовлетворяющая $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ при всех x , тождественно равная нулю на $(-\infty, 0]$ и тождественно равная единице на $[1, \infty)$.

4. Далее определяем $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\delta(x) = \gamma(x+2)\gamma(2-x).$$

Это — гладкая функция, удовлетворяющая $0 \leq \delta(x) \leq 1$ при всех x , тождественно равная нулю на $(-\infty, -2]$, тождественно равная единице на $[-1, 1]$ и тождественно равная нулю на $[2, \infty)$.

Определенная равенством $\mu(x) = \delta(\|x\|)$ функция $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, очевидно, обладает всеми требуемыми свойствами. \square

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ — два открытых покрытия топологического пространства X . Говорим, что покрытие \mathcal{V} *вписано* в покрытие \mathcal{U} , если для любого $\beta \in B$ существует такое $\alpha = \alpha(\beta) \in A$, что $V_\beta \subset U_\alpha$.

Лемма 2.3.5. Пусть открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ гладкого многообразия M вписано в открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Если \mathcal{V} обладает подчиненным ему разбиением единицы, то и \mathcal{U} обладает подчиненным ему разбиением единицы.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_\beta\}_{\beta \in B}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию \mathcal{V} . Фиксируем такое отображение $f : B \rightarrow A$, что $V_\beta \subset U_{f(\beta)}$, и для каждого $\alpha \in A$ определим гладкую функцию $\mu_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\mu_\alpha(x) = \sum_{\beta \in f^{-1}(\alpha)} \lambda_\beta(x).$$

Заметим, что семейство носителей $\{\text{supp } \mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ локально конечно, поскольку $\mu_\alpha(x) \neq 0$, только если $\alpha = f(\beta)$ и $\lambda_\beta(x) \neq 0$. Ясно, что $\text{supp } \mu_\alpha \subset U_\alpha$ и $\sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(x) = \sum_{\beta \in B} \lambda_\beta(x) = 1$. \square

Открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом U_α . Хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает компактной окрестностью.

Следующее утверждение, играющее основную роль в доказательстве теоремы 2.3.2, представляет и самостоятельный интерес. Отметим, что вторая аксиома счетности включена в определение топологического многообразия, приведенного в начале §2.1, именно для применимости этого утверждения; в других местах нашего курса эта аксиома не используется.

Теорема 2.3.6. Если топологическое пространство X локально компактно, удовлетворяет второй аксиоме счетности и хаусдорфово, то оно паракомпактно. В частности, любое топологическое многообразие паракомпактно.

Доказательство. Сначала докажем, что

1) пространство X обладает счетной базой топологии $\{U_j\}_{j=1}^\infty$, состоящей из открытых множеств с компактными замыканиями.

Действительно, пусть $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ — счетная база топологии. Выберем из этой последовательности подпоследовательность, состоящую из множеств с компактными замыканиями, т. е. $U_j = V_{k_j}$. Покажем, что $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ — снова база топологии. Действительно, пусть U — произвольное открытое множество и $x \in U$. Поскольку X локально компактно, существует компактная окрестность K_x точки x . Множество $U \cap K_x$ есть окрестность точки x . Значит, найдется такое открытое V , что $x \in V \subset U \cap K_x$. Поскольку $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ — база топологии, то найдется такое V_k , что $x \in V_k \subset V \subset U \cap K_x$. Тогда $\bar{V}_k \subset K_x$ и, значит, \bar{V}_k компактно. Следовательно, $V_k = U_j$ для некоторого j . Итак, для каждой точки $x \in U$ мы нашли такое $j = j(x)$, что $x \in U_{j(x)} \subset U$. Тогда $U = \bigcup_{x \in U} U_{j(x)}$, т. е. $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ — база топологии.

Теперь докажем, что

2) в X существует такая последовательность $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ открытых множеств, что \bar{G}_i компактно, $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$ и $X = \bigcup_{i=1}^\infty G_i$ (рис. 2.3).

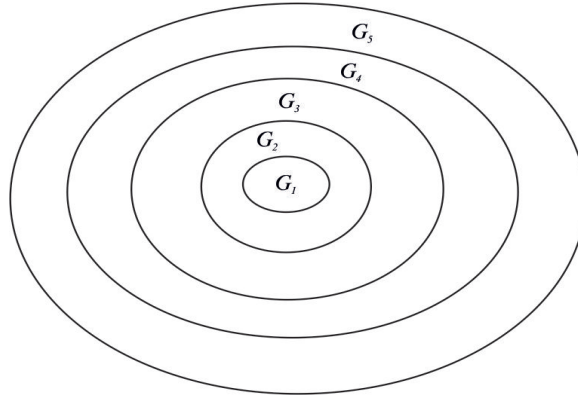


Рис. 2.3. Возрастающая последовательность открытых множеств с компактными замыканиями

Действительно, пусть $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ — база топологии, состоящая из открытых множеств с компактными замыканиями. Полагаем $G_1 = U_1$. Далее строим G_i по индукции. Пусть уже для некоторого i мы построили

$$G_i = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{j_i}$$

так, что \bar{G}_i компактно. Пусть j_{i+1} — наименьшее целое число, большее

j_i , для которого

$$\overline{G}_i \subset \bigcup_{j=1}^{j_{i+1}} U_j.$$

Такое j_{i+1} найдется, поскольку \overline{G}_i компактно. Полагаем

$$G_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{j_{i+1}} U_j.$$

Теперь докажем утверждение теоремы. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное открытое покрытие пространства X . Множество $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$ компактно и содержится в открытом множестве $G_{i+1} \setminus \overline{G}_{i-2}$. Для каждого $i \geq 3$ выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap (G_{i+1} \setminus \overline{G}_{i-2})\}_{\alpha \in A}$ множества $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$. Обозначим это покрытие через $\{V_{i,k}\}_{k=1}^{n_i}$. Кроме того, выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap G_3\}_{\alpha \in A}$ компакта \overline{G}_2 . Обозначим его через $\{V_{2,k}\}_{k=1}^{n_2}$. Объединение $\{V_{i,k}\}_{k=1}^{n_i}$ по всем $i \geq 2$ является локально конечным покрытием, вписанным в \mathcal{U} . □

Для гладких многообразий мы можем усилить утверждение теоремы 2.3.6, вписывая покрытие, состоящее из областей определения карт некоторого атласа.

Лемма 2.3.7. Пусть M — n -мерное гладкое многообразие и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — его открытое покрытие. На M существует такой атлас $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$, что

- 1) $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ есть локально конечное покрытие, вписанное в \mathcal{U} ;
- 2) $\varphi_i(V_i) \subset \mathbb{B}_3^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 3\}$;
- 3) множества $W_i = \varphi_i^{-1}(\mathbb{B}_1^n)$ покрывают M .

Доказательство. Вернемся к доказательству теоремы 2.3.6 и выберем покрытие множества $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$ немного более тщательно. Для каждой точки x открытого множества $(G_{i+1} \setminus \overline{G}_{i-2}) \cap U_\alpha$ можно найти такую карту $(O_{x,\alpha}, \varphi_{x,\alpha})$, что

$$x \in O_{x,\alpha} \subset (G_{i+1} \setminus \overline{G}_{i-2}) \cap U_\alpha, \quad \varphi_{x,\alpha}(O_{x,\alpha}) \supset \mathbb{B}_3^n, \quad \varphi_{x,\alpha}(x) = 0.$$

Положим $V_{x,\alpha} = \varphi_{x,\alpha}^{-1}(\mathbb{B}_3^n)$ и $W_{x,\alpha} = \varphi_{x,\alpha}^{-1}(\mathbb{B}_1^n)$. Затем выберем конечное число открытых множеств $W_{x,\alpha}$, покрывающих $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$, и закончим доказательство так же, как и раньше. □

Доказательство теоремы 2.3.2. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие многообразия M и $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ — атлас, существование которого утверждает лемма 2.3.7. Мы построим разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда, по лемме 2.3.5, покрытие \mathcal{U} также обладает подчиненным ему разбиением единицы.

Для каждого i определим $\mu_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \mu(\varphi_i(x)), & \text{если } x \in V_i, \\ 0, & \text{если } x \notin V_i, \end{cases}$$

где $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция из леммы 2.3.4. Каждая μ_i является гладкой функцией, причем $\text{supp } \mu_i \subset V_i$ и $\mu_i(x) = 1$ при $x \in W_i = \varphi_i^{-1}(\mathbb{B}_1^n)$. Семейство носителей $\{\text{supp } \mu_i\}_{i=1}^\infty$ локально конечно, поскольку покрытие $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ локально конечно. Полагаем

$$\lambda_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^\infty \mu_j(x)}.$$

Заметим, что знаменатель положителен, поскольку $\mu_j(x) \geq 0$ для всех j и $\mu_j(x) = 1$ хотя бы для одного j (множества W_j покрывают M). Следовательно, $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ есть разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_i\}_{i=1}^\infty$. \square

2.4. Касательное пространство и дифференциал

Для гладкого многообразия M обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ множество всех гладких действительных функций $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Отметим, что $\mathcal{F}(M)$ имеет структуру действительного векторного пространства относительно поточечных операций сложения функций и умножения функций на действительные числа

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (f, g \in \mathcal{F}; \alpha \in \mathbb{R}).$$

Кроме того, функции можно поточечно умножать друг на друга

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Таким образом, $\mathcal{F}(M)$ становится коммутативной действительной алгеброй. Роль единицы в этой алгебре играет функция, тождественно равная единице.

Перейдем теперь к обсуждению понятий касательного вектора и касательного пространства. Напомним из курса дифференциальной геометрии, что в каждой точке гладкой кривой, лежащей в \mathbb{R}^3 , определена касательная, которую можно рассматривать как одномерное векторное подпространство в \mathbb{R}^3 . Аналогично, в каждой точке гладкой поверхности, лежащей в \mathbb{R}^3 , определена касательная плоскость — двумерное векторное подпространство в \mathbb{R}^3 . Абстрактное многообразие M не лежит в евклидовом пространстве. Тем не менее, мы сопоставим каждой точке $p \in M$ некоторое векторное пространство $T_p M$.

Определение 2.4.1. Пусть M — гладкое многообразие и $p \in M$. Дифференцированием в точке p алгебры $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ называется отображение $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее

- 1) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha(Xf) + \beta(Xg)$ ($f, g \in \mathcal{F}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$);
- 2) $X(fg) = f(p)(Xg) + g(p)(Xf)$.

Дифференцирование в точке p называется также касательным вектором к многообразию M в точке p .

Заметим, что условие 1) означает, что X есть линейный функционал на векторном пространстве $\mathcal{F}(M)$. Множество всех касательных векторов в точке p (т. е. множество всех дифференцирований в точке p) обозначается $T_p M$. Снабдим это множество структурой действительного векторного пространства, определив

$$(\alpha X + \beta Y)f = \alpha(Xf) + \beta(Yf) \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p M; \quad f \in \mathcal{F}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Векторное пространство $T_p M$ называется касательным векторным пространством многообразия M в точке p . Нашей ближайшей целью является вычисление размерности этого пространства и нахождение его базиса.

Лемма 2.4.2 (о локализации). Пусть $f, g \in \mathcal{F}$. Если существует такая окрестность U точки p , что $f|_U = g|_U$, то $Xf = Xg$ для любого $X \in T_p M$.

Доказательство. Положим $h = f - g$, тогда $h|_U = 0$. Найдем такую окрестность V точки p , что $\bar{V} \subset U$. Далее, найдем такую функцию $\mu \in \mathcal{F}$, что $\mu|_V = 0$ и $\mu|_{M \setminus U} = 1$ (здесь мы воспользовались следствием 2.3.3). Тогда $\mu h = h$. Поэтому

$$Xh = X(\mu h) = \mu(p)(Xh) + h(p)(X\mu) = 0.$$

□

Благодаря этой лемме можно считать, что Xf определено для $X \in T_p M$ в случае $f \in \mathcal{F}(U)$, где U — произвольная окрестность точки p .

Пусть (U, φ) — карта на M и $p \in U$. Определим векторы $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_p M$ ($1 \leq i \leq n = \dim M$) по правилу

$$(\partial_i|_p)f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)). \quad (2.4.1)$$

Теорема 2.4.3. Векторы $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$ образуют базис пространства $T_p M$. Следовательно, $\dim T_p M = \dim M$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, которая также будет неоднократно применяться в дальнейшем.

Лемма 2.4.4. Пусть f — гладкая действительная функция на выпуклом открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ и $a \in U$. Тогда существуют такие $g_i \in \mathcal{F}(U)$, что справедливо представление

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g_i(x),$$

причем $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(f(tx + (1-t)a) \right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx + (1-t)a) (x_i - a_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx + (1-t)a) dt = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x), \end{aligned}$$

где $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx + (1-t)a) dt$. Очевидно, $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. \square

Доказательство теоремы 2.4.3. Применим лемму 2.4.4 к функции $f \circ \varphi^{-1}$:

$$f \circ \varphi^{-1} = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g_i, \quad (a = \varphi(p)),$$

причем $g_i(a) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = (\partial_i|_p)f$. Возьмем композицию предыдущего равенства с φ :

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n (x_i \circ \varphi - a_i)h_i, \quad (h_i = g_i \circ \varphi),$$

причем $h_i(p) = g_i(a) = (\partial_i|_p)f$. Применяя X к предыдущему равенству, имеем

$$\begin{aligned} Xf &= \sum_{i=1}^n X((x_i \circ \varphi - a_i)h_i) = \sum_{i=1}^n X(x_i \circ \varphi)h_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n X(x_i \circ \varphi) (\partial_i|_p)f = \left(\sum_{i=1}^n X(x_i \circ \varphi) \partial_i|_p \right) f. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f \in \mathcal{F}(U)$ произвольна, это можно переписать в виде

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i|_p, \quad \text{где } X_i = X(x_i \circ \varphi). \quad (2.4.2)$$

Итак, любой вектор $X \in T_p M$ представим в виде линейной комбинации векторов $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$. Докажем теперь, что эти векторы линейно независимы. Для этого выберем функции $f_j = x_j \circ \varphi \in \mathcal{F}(U)$ ($1 \leq j \leq n$). Согласно (2.4.1),

$$(\partial_i|_p)f_j = \frac{\partial(f_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица $\left((\partial_i|_p)f_j \right)_{i,j=1}^n$ невырождена, что влечет линейную независимость системы $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$.

Из линейной независимости векторов $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$ следует единственность представления (2.4.2) для любого $X \in T_p M$. Коэффициенты X_i этого представления называются *координатами* вектора X относительно базиса $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$. \square

Любые два n -мерных действительных векторных пространства изоморфны друг другу. В частности, любое V^n изоморфно \mathbb{R}^n . Тем не менее, не следует их отождествлять, поскольку между ними нельзя установить *канонического* изоморфизма. Это верно и для касательных пространств: для $p, q \in M$, $p \neq q$ пространства $T_p M$ и $T_q M$ изоморфны, но рассматриваются как непересекающиеся множества.

Есть одно важное исключение из правила предыдущего абзаца. Рассмотрим случай $M = V^n$, где V^n — действительное n -мерное векторное пространство. Мы знаем, что его можно рассматривать как гладкое многообразие. В этом случае для любой точки $p \in V^n$ касательное пространство $T_p V^n$ можно канонически отождествить с самим V^n . Действительно, определим отображение $i : V^n \rightarrow T_p V^n$ равенством

$$(iv)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv) \quad \text{для } v \in V^n \text{ и } f \in \mathcal{F}(V^n).$$

Заметим, что это определение использует структуру векторного пространства на V^n и не имеет смысла для произвольного многообразия. Докажите, что i — изоморфизм векторных пространств. В дальнейшем мы будем рассматривать i как отождествление.

В дальнейшем наряду с понятием “карта” мы будем часто использовать эквивалентное понятие “локальная система координат”, которое определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта на гладком n -мерном многообразии M . Для каждого $1 \leq i \leq n$ определены гладкие отображения

$$U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R}, \quad \text{где } \pi_i(a_1, \dots, a_n) = a_i.$$

Определим функцию $x_i \in \mathcal{F}(U)$, полагая $x_i = \pi_i \circ \varphi$. Совокупность $(U; x_1, \dots, x_n)$ этих функций называется *локальной системой координат* с областью определения $U \subset M$. Каждая точка $p \in U$ определяется своими координатами: $p = (p_1, \dots, p_n)$, где $p_i = x_i(p)$. Подчеркнем, что координаты p_i зависят не только от самой точки p , но и от

выбора системы координат, т. е., строго говоря, мы должны писать $p = (p_1, \dots, p_n)_{(U; x_1, \dots, x_n)}$.

Каждая гладкая функция $f \in \mathcal{F}(U)$ в локальных координатах записывается как функция n действительных переменных:

$$f = f(x_1, \dots, x_n).$$

Заметим, что формула (2.4.2) теперь приобретает вид

$$X = \sum_{i=1}^n (Xx_i) \partial_i|_p, \quad \text{для } X \in T_p M, \quad p \in U. \quad (2.4.3)$$

Пусть на многообразии M заданы две локальные системы координат $(U; x_1, \dots, x_n)$ и $(U'; x'_1, \dots, x'_n)$. Тогда в $U \cap U'$ определены функции преобразования координат

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.4.4)$$

Это преобразование гладко (поскольку карты согласованы) и взаимнооднозначно, т. е. уравнения (2.4.4) однозначно разрешимы относительно (x_1, \dots, x_n) , причем обратное преобразование

$$x_i = x_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

также задается гладкими функциями.

Пусть $p \in U \cap U'$. Тогда мы имеем два базиса

$$\left\{ \partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n \quad \text{и} \quad \left\{ \partial'_i|_p = \frac{\partial}{\partial x'_i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$$

пространства $T_p M$. Найдем матрицу перехода от одного базиса к другому. Для $f \in \mathcal{F}(U \cap U')$ пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — координатное представление в первой системе координат и $f = f(x'_1, \dots, x'_n)$ — во второй. Тогда справедливо тождество

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x'_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} (\partial_i|_p)f &= \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(x'_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n(x_1, \dots, x_n)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(p) \partial'_j|_p \right) f, \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_i|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(p) \partial'_j|_p.$$

Мы видим, что матрицей перехода от базиса $\{\partial_i|_p\}$ к базису $\{\partial'_i|_p\}$ является матрица Якоби $\left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(p)\right)$ функций преобразования координат. Следовательно, для $T_p M \ni X = \sum_i X_i \partial_i|_p = \sum_i X'_i \partial'_i|_p$ справедливо *правило преобразования координат вектора*

$$X'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(p) X_j. \quad (2.4.5)$$

В некоторых старых учебниках по геометрии (и во многих новых учебниках по физике) вы можете встретить следующее определение: *Касательным вектором в точке $p \in M$ называется правило, сопоставляющее каждой локальной системе координат, определенной в окрестности точки p , упорядоченный набор действительных чисел (X_1, \dots, X_n) , который преобразуется по правилу (2.4.5) при замене координат.* Выбранное нами определение 2.4.1 касательного вектора инвариантно, т. е. не зависит от координат. Но оно эквивалентно старому определению, как мы только что убедились.

Так же инвариантно определение дифференциала гладкого отображения, к которому мы переходим.

Определение 2.4.5. Пусть $F : M \rightarrow N$ — гладкое отображение одного гладкого многообразия в другое. Дифференциалом отображения F в точке $p \in M$ называется линейный оператор

$$d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

определяемый равенством

$$((d_p F)X)f = X(f \circ F) \quad \text{для} \quad X \in T_p M, \quad f \in \mathcal{F}(N).$$

Конечно, при этом мы должны проверить, что отображение $f \mapsto X(f \circ F)$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{F}(N)$ в точке $F(p)$. Эту проверку я оставляю в качестве упражнения, так же как и доказательство линейности оператора $d_p F$. Равным образом в качестве упражнения оставляется доказательство следующего важного утверждения.

Предложение 2.4.6 (цепное правило). Если $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} L$ — гладкие отображения, то для любой точки $p \in M$

$$d_p(G \circ F) = (d_{F(p)}G)(d_pF).$$

Иными словами: дифференциал композиции есть композиция дифференциалов.

Обсудим теперь представление дифференциала в локальных координатах. Пусть, по-прежнему, $F : M^m \rightarrow N^n$ — гладкое отображение, $(U; x_1, \dots, x_m)$ — локальная система координат в окрестности точки $p \in M$ и $(V; y_1, \dots, y_n)$ — локальная система координат в окрестности точки $F(p) \in N$. В локальных координатах F задается функциями

$$y_i = F_i(x_1, \dots, x_m) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Тогда (докажите)

$$(d_pF)(\partial_j|_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \partial_i|_{F(p)},$$

т. е. матрица Якоби $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)$ есть матрица линейного оператора d_pF относительно базисов $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ и $\{\partial_i|_{F(p)}\}_{i=1}^n$.

В заключение параграфа введем важное понятие касательного расслоения.

Для гладкого многообразия M положим

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

где касательные пространства в разных точках рассматриваются как непересекающиеся множества. Определим проекцию $\pi : TM \rightarrow M$, полагая $\pi(X) = p$ для $X \in T_pM$. Снабдим TM структурой гладкого многообразия так, что π станет гладким отображением. Пусть $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат с областью определения $U \subset M$. Для $p \in U$ любой вектор $X \in T_pM$ единственным образом представим в виде $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i|_p$. Тем самым

$$(\pi^{-1}(U); x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n)$$

становится локальной системой координат с областью определения $\pi^{-1}(U) \subset TM$. Легко убедиться с помощью (2.4.5), что две такие системы координат C^∞ -согласованы. Тем самым TM становится гладким многообразием размерности $2n$. Это многообразие называется *касательным расслоением* многообразия M .

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Проекция $\pi : TM \rightarrow M$ является гладким отображением, причем для любой точки $p \in M$ ее прообраз $\pi^{-1}(p) = T_p M$ снабжен структурой конечномерного векторного пространства. Эта структура в определенном смысле гладко зависит от p . Подобные объекты часто встречаются в современной геометрии и анализе и называются векторными расслоениями. Не вдаваясь в детали, приведем формулировку определения: *Векторным расслоением* над многообразием M называется такое гладкое сюръективное отображение (проекция) $\pi : E \rightarrow M$ некоторого многообразия E , что для каждой точки $p \in M$ в множестве $\pi^{-1}(p)$ (слое расслоения над точкой p) введена структура конечномерного векторного пространства, гладко зависящая от p ; причем локально E устроено как произведение. Последнее означает, что для каждой точки $p \in M$ можно указать окрестность U и диффеоморфизм $\pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(p) \times U$, переводящий π в проекцию $\pi^{-1}(p) \times U \rightarrow U$ на второй множитель и сохраняющий структуру векторного пространства в слоях. Примером векторного расслоения является касательное расслоение $\pi : TM \rightarrow M$.

Упражнения

1. Докажите, что $Xf = 0$ для всех $X \in T_p M$, если функция $f \in \mathcal{F}(M)$ такова, что $f|_U = \text{const}$ для некоторой окрестности U точки p .

2. (Касательное пространство к произведению двух многообразий). Напомним (см. пример 7 в §2.1), что на произведении $M \times N$ двух гладких многообразий имеется стандартная гладкая структура. Установите канонический изоморфизм $T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \oplus T_q N$ для $(p, q) \in M \times N$. Если этот изоморфизм считать отождествлением, то для гладкого отображения $F : M \times N \rightarrow L$ справедливо равенство $(d_{(p,q)}F)(X + Y) = (d_p F_q)X + (d_q F_p)Y$, где отображения $F_q : M \rightarrow L$ и $F_p : N \rightarrow L$ определяются равенствами $F_q(x) = F(x, q)$ и $F_p(y) = F(p, y)$ соответственно. Докажите.

3. Пусть V и W — конечномерные действительные векторные пространства и $A : V \rightarrow W$ — линейный оператор. Фиксируем $w_0 \in W$ и определим отображение $F : V \rightarrow W$ равенством $F(v) = Av + w_0$.

Докажите, что для любой точки $v \in V$ дифференциал

$$d_v F : T_v V = V \rightarrow W = T_{F(v)} W$$

совпадает с A .

4. Пусть $T\mathbb{S}^n$ — касательное расслоение n -мерной сферы. Докажите, что для любого n многообразие $(T\mathbb{S}^n) \times \mathbb{R}$ диффеоморфно произведению $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. В связи с этим любопытно отметить, что $T\mathbb{S}^n$ диффеоморфно произведению $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^n$ лишь при $n = 1, 3, 7$.

2.5. Векторные поля

Вы наверняка встречались ранее с векторными полями на областях евклидова пространства. Типичные примеры: поле скоростей жидкости или газа, напряженность электрического поля. Мы рассмотрим векторные поля на многообразиях.

(Гладким) *векторным полем* X на гладком многообразии M называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in M$ касательный вектор $X_p = X(p) \in T_p M$ в этой точке и удовлетворяющая следующему условию гладкости: если $f \in \mathcal{F}(M)$, то функция $p \mapsto X_p f$ тоже гладкая.

Чуть позже мы увидим, что возможны еще несколько определений векторного поля, эквивалентных приведенному. Первое слово в приведенном определении помещено в скобки, поскольку оно будет обычно опускаться: если не оговорено противное, любое векторное поле считается гладким.

Обозначим $\mathcal{V}(M)$ множество всех (гладких) векторных полей на M . Это обозначение сокращается до \mathcal{V} , если из контекста ясно, о каком многообразии идет речь. На \mathcal{V} определены некоторые алгебраические операции. Прежде всего, векторные поля можно складывать и умножать на действительные числа:

$$(\alpha X + \beta Y)(p) = \alpha X(p) + \beta Y(p), \quad X, Y \in \mathcal{V}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, \mathcal{V} становится действительным векторным пространством (бесконечной размерности). Кроме того, векторные поля можно умножать на гладкие функции: $(fX)(p) = f(p)X(p)$ для $f \in \mathcal{F}$. Снабженное этим умножением, пространство \mathcal{V} становится \mathcal{F} -модулем.

(Напомним, что R -модуль, или *модуль над кольцом* R , определяется посредством тех же аксиом, что и векторное пространство над F . Единственное различие состоит в том, что вместо поля F используется коммутативное кольцо R с единицей. Это различие приводит к значительному усложнению теории модулей по сравнению с теорией векторных пространств. Например, все векторные пространства размерности n над полем F изоморфны друг другу, в то время как классификация модулей ранга n над кольцом R является серьезной задачей.)

В предыдущем параграфе мы определили касательное расслоение $\pi : TM \rightarrow M$. Сечением этого расслоения называется отображение $X : M \rightarrow TM$, удовлетворяющее $\pi \circ X = I$, где I — тождественное отображение. Гладкие сечения касательного расслоения можно отождествить с векторными полями на M . Действительно, условие $\pi \circ X = I$ означает, что $X(p) \in T_p M$ для всех точек $p \in M$. Как легко проверить, гладкость отображения $X : M \rightarrow TM$ эквивалентна условию гладкости, участвующему в определении векторного поля. Таким образом, мы имеем второе определение, эквивалентное исходному: векторное поле на многообразии это — (гладкое) сечение касательного расслоения.

Каждое векторное поле $X \in \mathcal{V}$ может рассматриваться как отображение $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, определенное равенством $(Xf)(p) = X_p f$. Это отображение удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha(Xf) + \beta(Xg)$ для $f, g \in \mathcal{F}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- 2) $X(fg) = f(Xg) + g(Xf)$.

Такое отображение естественно назвать *дифференцированием* алгебры \mathcal{F} . Таким образом получаем третье определение векторного поля, эквивалентное двум предыдущим: векторное поле на M — это дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(M)$. Отметим аналогию между этим определением и приведенным в начале предыдущего параграфа определением касательного вектора: касательный вектор — это дифференцирование $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ алгебры \mathcal{F} со значениями в \mathbb{R} .

Перейдем к координатному представлению векторных полей. Пусть $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат с областью определения $U \subset M$. Напомним, что в каждой точке $p \in U$ определены координатные векторы $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ ($1 \leq i \leq n$), образующие базис пространства $T_p M$. Определим *координатные векторные поля* $\partial_i \in \mathcal{V}(U)$, полагая $\partial_i(p) = \partial_i|_p$. Каждое векторное поле $X \in \mathcal{V}(U)$ единственным обра-

зом представимо в виде $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$ с коэффициентами $X_i \in \mathcal{F}(U)$, называемыми *координатами* поля X относительно данной системы координат. Для функции $f \in \mathcal{F}(U)$

$$(Xf)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Эта формула служит основанием для еще одного определения векторного поля, эквивалентного предыдущим: векторное поле это — линейный однородный дифференциальный оператор первого порядка с гладкими коэффициентами. (Линейный дифференциальный оператор первого порядка определяется равенством $Xf = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Yf$, где $Y \in \mathcal{F}(U)$; при $Y = 0$ оператор называется однородным.)

Каждой паре векторных полей $X, Y \in \mathcal{V}$ можно сопоставить третье векторное поле $[X, Y] \in \mathcal{V}$, называемое *скобкой Ли* векторных полей X и Y , которое определяется следующим образом. Рассматриваем X и Y как дифференцирования алгебры гладких функций: $\mathcal{F} \xrightarrow{X} \mathcal{F} \xrightarrow{Y} \mathcal{F}$. Композиция $XY : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ не является векторным полем, поскольку это дифференциальный оператор второго порядка. Но вот разность $[X, Y] = XY - YX$ снова будет векторным полем, в чем легко убедиться, проверив для нее справедливость условий 1) и 2), приведенных выше. В локальных координатах скобка Ли выражается следующим образом (докажите): если $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$ и $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \partial_i$, то

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \partial_j.$$

Доказательство следующего утверждения оставляется в качестве упражнения.

Предложение 2.5.1 (свойства скобки Ли).

- 1) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- 2) $[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$;
- 3) *тождество Якоби*: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ для любых трех векторных полей;
- 4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ для $f, g \in \mathcal{F}$.

В алгебре первые три свойства используются в качестве аксиом в следующем определении: *алгеброй Ли* называется векторное простран-

ство вместе с заданным на нем произведением $[X, Y]$, удовлетворяющим аксиомам 1) — 3). Таким образом, $\mathcal{V}(M)$ является действительной алгеброй Ли.

Еще одно важное понятие, эквивалентное понятию векторного поля: локальная однопараметрическая группа преобразований (или локальный поток), порожденная векторным полем. Истоки этого понятия лежат в гидродинамике. Рассмотрим стационарное поле скоростей жидкости. Само поле скоростей не меняется со временем. Но каждая молекула жидкости движется со временем вдоль некоторой траектории. Приведем соответствующие определения.

(Гладкой) параметризованной кривой в многообразии M называется гладкое отображение $\gamma : (a, b) \rightarrow M$. Вектор скорости $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ такой кривой определяется равенством $\dot{\gamma}(t) = (d_t\gamma)\frac{d}{dt}$, где $\frac{d}{dt} \in T_t\mathbb{R}$ — координатный вектор, соответствующий стандартной координате t на \mathbb{R} . Если $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат на M , то пока точка $\gamma(t)$ лежит в U , кривая γ задается уравнениями $x_i = \gamma_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$). Вектор скорости этой кривой равен $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma_i(t)}{dt} \partial_i$.

Говорим, что параметризованная кривая $\gamma(t)$ является *интегральной кривой* векторного поля X , если $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$.

Для векторного поля $X \in \mathcal{V}(M)$ и точки $p \in M$ зададимся вопросом: существует ли выходящая из p интегральная кривая поля X ? Задав в окрестности точки p локальную систему координат, в которой $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i$, мы видим, что $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ должна быть решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) & (1 \leq i \leq n), \\ x_i(0) = p_i. \end{cases}$$

Обратим внимание, что эта система, вообще говоря, нелинейна. Известно, что решение задачи Коши для такой системы единственно и локально существует: найдутся такие $a(p) < 0 < b(p)$, что решение $\gamma_p(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ существует при $t \in (a(p), b(p))$. Положим $F_X^t(p) = \gamma_p(t)$. Рассматриваем F_X^t как отображение $F_X^t : \Omega_t \rightarrow M$, определенное на области $\Omega_t = \{p \in M \mid a(p) < t < b(p)\}$. Семейство отображений F_X^t называется *локальной однопараметрической группой преобразований* (или *локальным потоком*), порожденной векторным полем X . Оно удовлетворяет следующим условиям:

1) множество тех $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$, для которых $F_X^t(p)$ определено, образует открытую окрестность множества $M \times \{0\}$;

2) групповое свойство: равенство $F_X^{t_1} \circ F_X^{t_2} = F_X^{t_1+t_2}$ справедливо в тех точках, в которых левая часть определена.

Это групповое свойство эквивалентно равенству

$$\gamma_p(t_1 + t_2) = \gamma_{\gamma_p(t_1)}(t_2),$$

которое очевидным образом следует из определения интегральной кривой.

Говорим, что $X \in \mathcal{V}(M)$ является *полным* векторным полем, если решение задачи Коши существует при всех $t \in \mathbb{R}$ для любой точки $p \in M$. В этом случае отображение $F_X^t : M \rightarrow M$ определено на всем M и является диффеоморфизмом для любого $t \in \mathbb{R}$. Действительно, гладкость F_X^t следует из того, что решение задачи Коши гладко зависит от начальных данных, а обратимость вытекает из группового свойства: $(F_X^t)^{-1} = F_X^{-t}$.

Приведем пример неполного векторного поля. В качестве M возьмем интервал $(0, 1)$ действительной прямой, а в качестве X — координатное векторное поле $\frac{d}{dt}$. Для точки $p \in (0, 1)$ выходящая из p интегральная кривая $\gamma_p(t) = p + t$ определена лишь при $t \in (-p, 1 - p)$.

Предложение 2.5.2. *Векторное поле с компактным носителем полно. В частности, любое векторное поле на компактном многообразии полно.*

Доказательство. Напомним, что носителем $\text{supp } X$ векторного поля X называется замыкание множества $\{p \in M \mid X(p) \neq 0\}$. Заметим прежде всего, что если $X(p) = 0$, то $F_X^t(p) = p$ определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Для каждой точки $p \in \text{supp } X$ можно указать такую открытую окрестность U_p и такое $\varepsilon_p > 0$, что $F_X^t(q)$ определено для всех $q \in U_p$ и всех t , удовлетворяющих $|t| < \varepsilon_p$. Предположив $\text{supp } X$ компактным, выберем из открытого покрытия $\{U_p\}_{p \in \text{supp } X}$ этого множества конечное подпокрытие $\{U_{p_i}\}_{i=1}^N$ и положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_i} \mid 1 \leq i \leq N\}$. Тогда при $|t| < \varepsilon$ отображение $F_X^t : M \rightarrow M$ определено глобально на всем M . Теперь, используя групповое свойство, легко показать, что F_X^t определено глобально при любом $t \in \mathbb{R}$. Действительно, представим t в виде $t = t_1 + \dots + t_k$, где $|t_i| < \varepsilon$ ($1 \leq i \leq k$). Тогда $F_X^t = F_X^{t_1} \circ \dots \circ F_X^{t_k}$. Правая часть этого равенства определена глобально. Следовательно, и левая часть определена глобально. \square

творяющих уравнениям (2.6.1) и условиям $\tilde{x}_i(y^0) = x_i^0$, то $\tilde{x}_i \equiv x_i$ в некоторой окрестности точки y^0 .

Частным случаем теоремы 2.6.1 является

Теорема 2.6.2 (классическая теорема об обратной функции). *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1, \\ \text{.....} \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Предположим, что функции f_1, \dots, f_n определены и гладки в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки x^0 и

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x^0) \right)_{i,j=1}^n \neq 0. \quad (2.6.3)$$

Пусть $y_i^0 = f_i(x^0)$. Тогда уравнения (2.6.2) можно однозначно разрешить относительно (x_1, \dots, x_n) в некоторой окрестности точки y^0 . Точнее, существует окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ точки y^0 и определенные в V гладкие функции $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$ ($1 \leq i \leq n$) такие, что $x_i(y^0) = x_i^0$ и уравнения (2.6.2) тождественно удовлетворяются этими функциями. Если $x_i = \tilde{x}_i(y_1, \dots, y_n)$ ($1 \leq i \leq n$) — другой набор функций, удовлетворяющих уравнениям (2.6.2) и условиям $\tilde{x}_i(y^0) = x_i^0$, то $\tilde{x}_i \equiv x_i$ в некоторой окрестности точки y^0 .

Возвращаемся к изучению гладких многообразий и отображений.

Теорема 2.6.3 (теорема об обратной функции для многообразий). Пусть $f : M^n \rightarrow N^n$ — гладкое отображение между гладкими многообразиями одинаковой размерности. Если в некоторой точке $p \in M$ дифференциал

$$d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

невырожден, то f диффеоморфно отображает некоторую окрестность $U \subset M$ точки p на некоторую окрестность $V \subset N$ точки $f(p)$.

Прежде всего прокомментируем условие невырожденности дифференциала. Для линейного оператора $A : V^n \rightarrow W^n$ между двумя конечномерными векторными пространствами одинаковой размерности следующие условия эквивалентны: а) A инъективен; б) A сюръективен; в) A биективен и г) матрица оператора A относительно выбранных в V^n и W^n базисов невырождена. В этом случае и сам A называется невырожденным оператором.

Чтобы доказать теорему 2.6.3, достаточно выбрать координаты в окрестностях точек p и $f(p)$ и записать отображение f в координатах. Мы попадем в условия теоремы 2.6.2. Основное условие (2.6.3) теоремы 2.6.2 эквивалентно требованию невырожденности дифференциала.

Перейдем к основному понятию настоящего параграфа. Как правильно определить k -мерное подмногообразие в n -мерном многообразии? За образец возьмем пару $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. В общем случае пара $A^k \subset M^n$ должна быть локально, с точностью до диффеоморфизма, похожа на пару $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. В итоге приходим к следующему определению.

Определение 2.6.4. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Множество $A \subset M$ называется k -мерным подмногообразием, если для любой точки $p \in A$ на M существует такая карта (U, φ) , определенная в окрестности точки p , что $\varphi(U \cap A) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$.

Будем такую карту называть *нормальной картой*. Если (U, φ) — нормальная карта, то $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ является картой на множестве A . Если $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ — семейство всех нормальных карт, то $\{(U_i \cap A, \varphi_i|_{U_i \cap A})\}_{i \in I}$ образует гладкий атлас на A . Тем самым A снабжается структурой гладкого многообразия размерности k . Число $\text{codim } A = n - k$ называется *коразмерностью* подмногообразия A .

Определение 2.6.4 можно перефразировать так: множество $A \subset M$ является k -мерным подмногообразием, если для любой точки $p \in A$ существует такая локальная система координат $(U; x_1, \dots, x_n)$, определенная в окрестности $U \subset M$ точки p , что множество $U \cap A$ задается в этих координатах уравнениями $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$.

Пример. Пусть $\mathbb{R}^k \supset U$ — открытое множество и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Тогда график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^n$ отображения f является подмногообразием размерности k в $U \times \mathbb{R}^n$.

Действительно, определим диффеоморфизм $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ равенством $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$. Тогда $\varphi(\Gamma_f) = U \times \{0\}$, т. е. $(U \times \mathbb{R}^n, \varphi)$ является нормальной картой.

С подмногообразиями тесно связаны два класса гладких отображений, которые мы сейчас введем.

Определение 2.6.5. Гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ называется погружением, если для любой точки $p \in M$ дифференциал $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ инъективен (следовательно, $\dim M \leq \dim N$).

Погружение f называется вложением, если f есть гомеоморфизм многообразия M на $f(M)$.

Пример погружения окружности S^1 в плоскость \mathbb{R}^2 , не являющегося вложением, приведен на рис. 2.4. Пример инъективного погружения интервала (a, b) в плоскость \mathbb{R}^2 , не являющегося вложением, приведен на рис. 2.5. Последний пример связан с тем, что интервал (a, b) не компактен. Для компактных многообразий справедливо следующее утверждение.

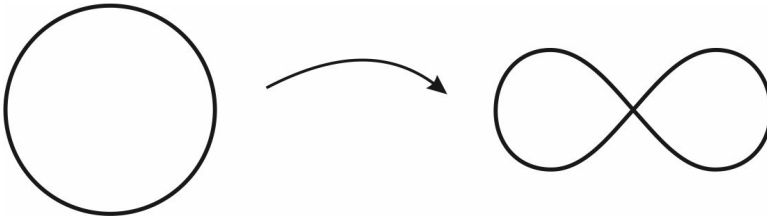


Рис. 2.4. Пример погружения, не являющегося вложением

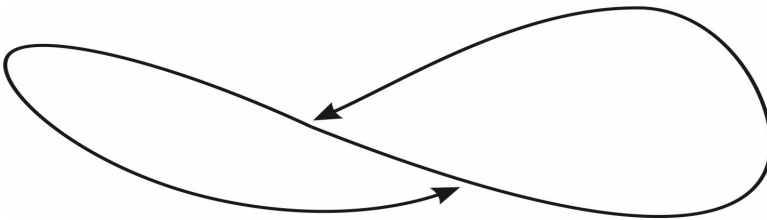


Рис. 2.5. Пример инъективного погружения, не являющегося вложением

Предложение 2.6.6. *Если $f : M \rightarrow N$ — инъективное погружение и многообразие M компактно, то f — вложение.*

Это утверждение немедленно следует из теоремы Тихонова (предложение 1.6.4).

Связь между подмногообразиями и вложениями дается следующим утверждением.

Предложение 2.6.7. *Пусть M — гладкое многообразие. Множество $A \subset M$ является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно есть образ некоторого вложения.*

Я не привожу доказательства этого предложения, поскольку оно имеет чисто технический характер. Отмечу лишь, что необходимость тривиальна: если A — подмногообразие, то оно есть образ тождественного вложения $A \hookrightarrow M$. Доказательство достаточности сложнее, но не содержит принципиальных идей. Оно приведено в §1.3 книги [22].

Определение 2.6.8. *Пусть M и N — гладкие многообразия и $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Говорим, что точка $p \in M$ является регулярной точкой отображения f , если дифференциал $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ сюръективен. В противном случае точка p называется критической точкой отображения f .*

Точка $q \in N$ называется регулярным значением отображения f , если все точки множества $f^{-1}(q)$ являются регулярными точками отображения f . В противном случае точка q называется критическим значением отображения f .

Согласно этому определению, все точки множества $N \setminus f(M)$ являются регулярными значениями отображения f . При $\dim M < \dim N$ все точки многообразия M являются критическими точками отображения f , а множество критических значений отображения f совпадает с $f(M)$.

Отметим также, что $p \in M$ является критической точкой действительной функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $d_p f = 0$. Если $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат в окрестности точки p и $f = f(x_1, \dots, x_n)$ в этих координатах, то условие $d_p f = 0$ означает, что все частные производные первого порядка функции f обращаются в нуль в точке p .

Теорема 2.6.9 (малая теорема о неявной функции). *Если $q \in N$ — регулярное значение гладкого отображения $f : M^m \rightarrow N^n$ ($m \geq n$), то $f^{-1}(q)$ является подмногообразием размерности $m - n$ в M .*

Доказательство. Сначала приведем некоторые рассуждения общего характера, которые будут полезны и в дальнейшем.

Свойство множества быть подмногообразием носит локальный характер, т. е. оно в том и только в том случае справедливо для $A \subset M$, если оно справедливо для всех пар $A \cap U_i \subset U_i$, где $\{U_i\}$ есть открытое покрытие многообразия M . Кроме того, это свойство инвариантно относительно диффеоморфизмов, т. е. $A \subset M$ в том и только в том случае есть подмногообразие, если таковым является $\varphi(A) \subset M'$, где $\varphi : M \rightarrow M'$ есть диффеоморфизм.

Критические точки отображения также инвариантны относительно диффеоморфизмов в следующем смысле. Если $\varphi : M \rightarrow M'$ — диффеоморфизм, то точка $p \in M$ является критической точкой отображения $f : M \rightarrow N$ тогда и только тогда, когда $\varphi(p)$ является критической точкой отображения $f \circ \varphi^{-1} : M' \rightarrow N$. Это легко проверяется с помощью цепного правила (предложение 2.4.6).

Пусть $q \in N$ — регулярное значение гладкого отображения $f : M^m \rightarrow N^n$. Выберем атлас $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ на N и затем найдем на M такой атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, что $f(U_i) \subset V_i$. В силу локальности достаточно доказать, что если $q \in V_i$, то множество $U_i \cap f^{-1}(q)$ является подмногообразием размерности $m - n$ в U_i . Пусть $\varphi_i(U_i) = \tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$. Точка $\tilde{q} = \psi_i(q) \in \mathbb{R}^n$ является регулярным значением отображения

$$\tilde{f}_i = \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

В силу инвариантности достаточно доказать, что $\tilde{f}_i^{-1}(\tilde{q})$ является подмногообразием размерности $m - n$ в \tilde{U}_i .

Таким образом мы свели теорему 2.6.9 к частному случаю, когда M есть открытое множество в \mathbb{R}^m , а $N = \mathbb{R}^n$. Это сведение служит иллюстрацией общего принципа взаимодействия *локального* с *глобальным*. В дальнейшем мы будем неоднократно использовать этот принцип, не приводя подробностей.

Итак, пусть $\mathbb{R}^m \supset U$ — открытое множество и $q \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение гладкого отображения $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $q = 0$ (изменив координаты в \mathbb{R}^n). Пусть

$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$. Тогда $f^{-1}(q)$ состоит из точек $(x_1, \dots, x_m) \in U$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = 0. \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Фиксируем точку $p \in f^{-1}(q)$. Без ограничения общности можно считать, что $p = 0$ (изменив координаты в \mathbb{R}^m). Поскольку p есть регулярная точка отображения f , то ранг матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

равен n , т. е. у этой матрицы есть отличный от нуля минор размера n . Без ограничения общности можем считать, что этот минор образован первыми n строками, т.е.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{i,j=1}^n \neq 0$$

(в противном случае просто переименуем координаты (x_1, \dots, x_m)). Согласно классической теореме о неявной функции, система (2.6.4) однозначно разрешима относительно переменных (x_1, \dots, x_n) в некоторой окрестности нуля. Точнее, найдется окрестность $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ точки 0 и определенные в W гладкие функции $x_i = \varphi_i(x_{n+1}, \dots, x_m)$ ($1 \leq i \leq n$), удовлетворяющие $\varphi_i(0) = 0$ и такие, что уравнения (2.6.4) тождественно удовлетворяются этими функциями. Другими словами, пересечение множества $f^{-1}(q)$ с $U \cap (W \times \mathbb{R}^n)$ совпадает с графиком гладкого отображения $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$. Как показано в приведенном выше примере, график Γ_φ является подмногообразием размерности $m - n$ в \mathbb{R}^m . \square

Пример. В §2.2 мы определили стандартную гладкую структуру на сфере $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ путем введения атласа и проверки согласованности его карт. Теперь мы имеем возможность гораздо более краткого определения той же структуры с помощью теоремы 2.6.3. Действительно, $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ для функции $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой равенством $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$. Проверьте, что 1 есть регулярное значение функции f . Согласно теореме 2.6.3, \mathbb{S}^n есть n -мерное подмногообразие в \mathbb{R}^{n+1} . В частности, это означает, что \mathbb{S}^n снабжено структурой гладкого многообразия.

Определение 2.6.10. Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение и A — подмногообразие в N . Говорим, что отображение f трансверсально к подмногообразию A , если в каждой точке $p \in f^{-1}(A)$ справедливо равенство

$$(d_p f)(T_p M) + T_{f(p)} A = T_{f(p)} N. \quad (2.6.5)$$

Следует сделать пояснение по поводу левой части формулы (2.6.5). Если $i : A \hookrightarrow N$ — тождественное вложение, то дифференциал $d_q i : T_q A \rightarrow T_q N$ инъективен для любой точки $q \in A$. Мы рассматриваем этот дифференциал как вложение $T_q A \subset T_q N$. Тем самым $T_q A$ становится векторным подпространством в $T_q N$. Равенство (2.6.5) означает, что любой вектор $X \in T_{f(p)} N$ представим в виде $X = (d_p f)Y + Z$, где $Y \in T_p M$ и $Z \in T_{f(p)} A$.

Теорема 2.6.11 (большая теорема о неявной функции). Пусть гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ трансверсально к подмногообразию $A \subset N$. Тогда $f^{-1}(A)$ является подмногообразием в M и $\text{codim } f^{-1}(A) = \text{codim } A$.

Доказательство. Утверждение носит локальный характер. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в начале доказательства теоремы 2.6.9, сводим дело к частному случаю, когда пара $A \subset N$ совпадает с парой $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

Итак, пусть гладкое отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ трансверсально к подмногообразию $\mathbb{R}^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Представим \mathbb{R}^n в виде $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где $\mathbb{R}^{n-k} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_k = 0\}$, и пусть $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — проекция на второй сомножитель. Докажем следующее утверждение (рис. 2.6):

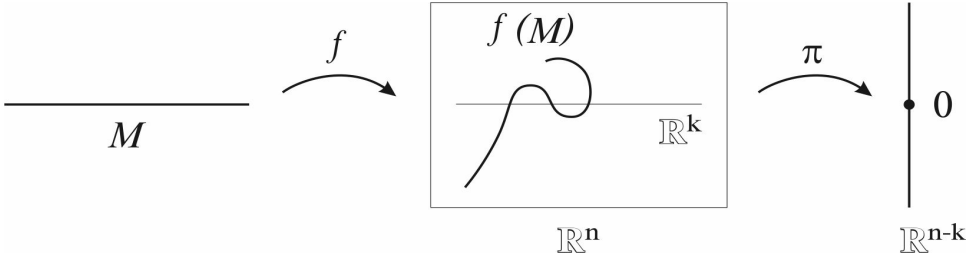
(*) Точка $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ есть регулярное значение отображения $g = \pi \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

Действительно, очевидно, $g^{-1}(0) = f^{-1}(\mathbb{R}^k)$. В силу условия трансверсальности

$$(d_p f)(T_p M) + \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n \quad (2.6.6)$$

для любой точки $p \in f^{-1}(\mathbb{R}^k)$ (мы отождествили касательное пространство $T_{f(p)} \mathbb{R}^k$ с самим \mathbb{R}^k , как указано в примере 2 из §2.2). Применим линейный оператор π к обеим частям равенства (2.6.6). Поскольку $\pi|_{\mathbb{R}^k} = 0$ и $\pi|_{\mathbb{R}^{n-k}} = I$, получим

$$(\pi(d_p f))(T_p M) = \mathbb{R}^{n-k}.$$

Рис. 2.6. $g = \pi \circ f$

Поскольку отображение π линейно, оно совпадает со своим дифференциалом. Применяя цепное правило, из предыдущей формулы получаем равенство

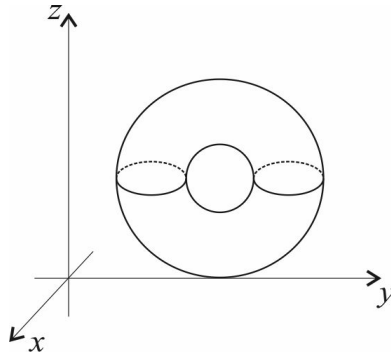
$$\begin{aligned} (d_p g)(T_p M) &= (d_p(\pi \circ f))(T_p M) = ((d_{f(p)} \pi)(d_p f))(T_p M) \\ &= (\pi(d_p f))(T_p M) = \mathbb{R}^{n-k}, \end{aligned}$$

означающее, что p является регулярной точкой отображения g . Тем самым утверждение (*) доказано.

Применяя теорему 2.6.9 к отображению g , получаем: множество

$$g^{-1}(0) = f^{-1}(\mathbb{R}^k)$$

является подмногообразием размерности $\dim M - (n - k)$ в M . □

Рис. 2.7. Тор, вложенный в \mathbb{R}^3

Упражнения

1. Докажите, что группа $O(n)$ всех ортогональных $n \times n$ -матриц является компактным подмногообразием векторного пространства \mathbb{R}^{n^2} всех $n \times n$ -матриц, и найдите размерность этого подмногообразия.

2. Пусть M — компактное многообразие. Докажите, что всякая гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет по крайней мере две критические точки.

3. Пусть $y \in \mathbb{R}$ — регулярное значение гладкой функции $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

а) докажите, что $f^{-1}(y)$ состоит из четного числа точек;

б) если $f^{-1}(y)$ состоит из $2k$ точек, то у f имеется по крайней мере $2k$ критических точек. Докажите.

3. Вложим тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ в трехмерное евклидово пространство (x, y, z) , как показано на рис. 2.7 (колесо автомобиля, стоящего на горизонтальной плоскости $z = \text{const}$). Найдите критические точки функции $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$.

2.7. Теорема Сарда

В “Анализе” изучается мера Лебега на евклидовом пространстве. В полной мере это понятие нас не интересует, поскольку мера Лебега не сохраняется при диффеоморфизмах. Но есть один важный частный случай, инвариантный относительно диффеоморфизмов: множество меры нуль. Приведем соответствующие определения.

n -мерным кубом с ребром $a > 0$ и с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть множество $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - x_i^0| \leq a/2\}$. Объем такого куба по определению равен $V(I^n) = a^n$. Говорим, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным числом кубов $\{I_i^n\}_{i=1}^\infty$, $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i^n$, таких, что $\sum_{i=1}^\infty V(I_i^n) < \varepsilon$. Объединение счетного семейства множеств меры нуль есть снова множество меры нуль.

Лемма 2.7.1. Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^n и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Если множество $A \subset U$ имеет меру нуль, то $f(A)$ тоже имеет меру нуль.

Доказательство. Каждая точка множества A принадлежит некоторому открытому шару $\mathbb{B} \subset U$, на котором норма $\|d_x f\|$ ограничена

некоторым числом K . Тогда

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad (x, y \in \mathbb{B}).$$

Отсюда следует, что если $I^n \subset \mathbb{B}$ есть куб с ребром a , то $f(I^n)$ содержится в кубе с ребром $\leq \sqrt{n}Ka$, объем которого не превосходит $K'V(I^n)$, где $K' = (\sqrt{n}K)^n$. Это влечет утверждение леммы для множества меры нуль $A \subset \mathbb{B}$. Поскольку все множество U можно покрыть счетным числом таких шаров, то утверждение справедливо и для любого множества меры нуль $A \subset U$. \square

Лемма 2.7.1 означает, в частности, инвариантность множеств меры нуль относительно диффеоморфизмов. Поэтому мы можем перенести это понятие на множества в многообразиях.

Определение 2.7.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие. Говорим, что множество $A \subset M$ имеет меру нуль, если для любой карты (U, φ) многообразия M множество $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Теорема 2.7.3 (теорема Сарда). Пусть M, N — гладкие многообразия. Множество всех критических значений гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ является множеством меры нуль в N .

Следствие 2.7.4. Если $\dim M < \dim N$, то $f(M)$ является множеством меры нуль в N для любого гладкого отображения $f : M \rightarrow N$.

Мы уже пользовались следствием 2.7.4 при доказательстве леммы 1.9.3 из §1.9.

Перейдем к доказательству теоремы Сарда. Так же, как при доказательстве малой теоремы о неявной функции в предыдущем параграфе, пользуясь локальностью и инвариантностью всех участвующих в теореме понятий, мы сводим дело к частному случаю, когда M — открытое множество в \mathbb{R}^m и $N = \mathbb{R}^n$. Таким образом, речь идет о следующем утверждении.

Лемма 2.7.5. Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^m и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Множество всех критических значений отображения f является множеством меры нуль в \mathbb{R}^n .

Доказательство будет вестись индукцией по m . Заметим, что утверждение имеет смысл при $m \geq 0$ и $n \geq 1$. (По определению \mathbb{R}^0 состоит из одной точки). Начнем индукцию: утверждение, несомненно, верно при $m = 0$.

Пусть $C \subset U$ — множество всех критических точек отображения f . Его образ $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ есть множество всех критических значений отображения f . Пусть $C_i \subset C$ ($i = 1, 2, \dots$) означает множество всех таких точек $x \in U$, что все частные производные функции f порядка $\leq i$ обращаются в точке x в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$$

Доказательство будет разбито на три шага.

1-й шаг. Образ $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

2-й шаг. Образ $f(C_i \setminus C_{i+1})$ имеет меру нуль при $i > 1$.

3-й шаг. Образ $f(C_k)$ имеет меру нуль для достаточно большого k .

Шаг 1. Можно считать, что $n \geq 2$, поскольку $C = C_1$ при $n = 1$. Нам понадобится следующее следствие известной теоремы Фубини.

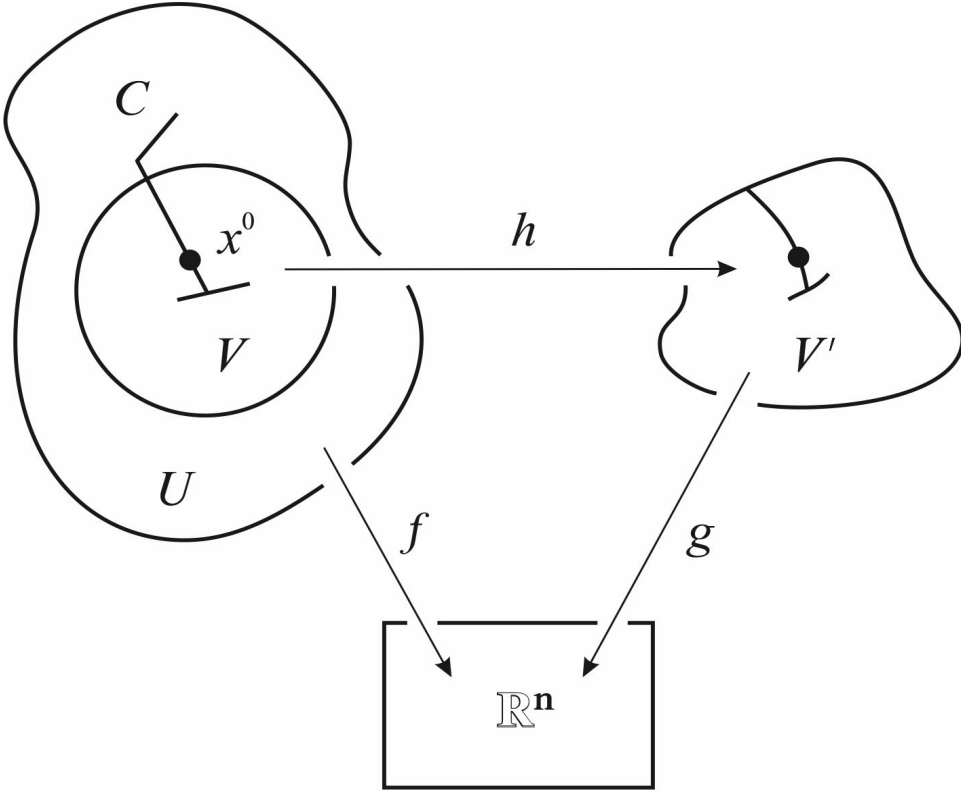
Измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ имеет меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью $\{\text{const}\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ по множеству $(n-1)$ -мерной меры нуль.

Для каждой точки $x^0 \in C \setminus C_1$ мы найдем такую окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. А так как $C \setminus C_1$ покрывается счетным числом таких окрестностей, то отсюда будет следовать, что мера $f(C \setminus C_1)$ равна нулю.

Пусть $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$. Так как $x^0 \notin C_1$, то существует некоторая частная производная первого порядка, например, $\partial f_1 / \partial x_1$, отличная от нуля в точке x^0 . Рассмотрим отображение $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное равенством

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m).$$

Так как дифференциал $d_{x^0} h$ невырожден, то h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x^0 на открытое множество V' (мы применили теорему об обратной функции). Композиция $g = f \circ h^{-1}$ отображает V' в \mathbb{R}^n . Заметим, что множество C' критических точек

Рис. 2.8. Построение отображения g

отображения g совпадает с $h(V \cap C)$; следовательно, множество $g(C')$ критических значений для g есть в точности $f(V \cap C)$; рис. 2.8.

Для каждой точки $(t, x_2, \dots, x_m) \in V'$ точка $g(t, x_2, \dots, x_m)$ принадлежит гиперплоскости $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, т. е. g переводит гиперплоскости в гиперплоскости. Пусть

$$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \longrightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

обозначает ограничение отображения g на область в гиперплоскости $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Заметим, что точка гиперплоскости $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ является критической для g^t тогда и только тогда, когда она — критическая точка для g , так как матрица частных производных отображения g имеет вид

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial g_i^t / \partial x_j) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с предположением индукции множество критических значений для g^t имеет меру нуль в $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Поэтому множество критических значений для g пересекается с каждой гиперплоскостью по множеству меры нуль. Это множество $g(C')$ измеримо, так как оно может быть представлено в виде счетного объединения компактных множеств. Значит, по упомянутому следствию теоремы Фубини, множество $g(C') = f(V \cap C)$ имеет меру нуль. Первый шаг завершен.

Шаг 2. Для точки $x^0 \in C_i \setminus C_{i+1}$ существует производная $\frac{\partial^{i+1} f_r}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{i+1}}}$ порядка $(i+1)$, отличная от нуля в точке x^0 . Стало быть, функция

$$w(x) = \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{i+1}}}$$

обращается в нуль в точке x^0 , но $\partial w / \partial x_{s_1}$ не равна нулю. Предположим для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m),$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x^0 на открытое множество V' . Заметим, что h переводит $C_i \cap V$ в гиперплоскость $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Опять рассмотрим

$$g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Пусть

$$\tilde{g} : (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

обозначает ограничение отображения g . По предположению индукции множество критических значений отображения \tilde{g} имеет меру нуль в \mathbb{R}^n . Но все точки множества $h(C_i \cap V)$ заведомо являются критическими точками для \tilde{g} , так как в них все производные порядка $\leq i$ равны нулю. Поэтому множество

$$\tilde{g}h(C_i \cap V) = f(C_i \cap V)$$

имеет меру нуль.

Из того, что $C_i \setminus C_{i+1}$ покрывается счетным числом таких окрестностей V , следует, что $f(C_i \setminus C_{i+1})$ имеет меру нуль.

Шаг 3. Пусть $I^m \subset U$ — куб с ребром δ .

Если k достаточно велико (точнее, $k \geq m/n$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^m)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубов, то отсюда будет следовать, что $f(C_k)$ имеет меру нуль.

Если $x \in C_k \cap I^m$, то, используя ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, компактность куба I^m и определение C_k , мы можем написать

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h),$$

где

$$\|R(x, h)\| \leq C\|h\|^{k+1} \quad (2.7.1)$$

при $x + h \in I^m$. Здесь C — постоянная, зависящая только от f и I^m .

Теперь разобьем I^m на r^m кубиков с ребром δ/r . Пусть I_1 — кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка кубика I_1 может быть записана в виде $x + h$, где $\|h\| \leq \sqrt{m}(\delta/r)$. Из неравенства (2.7.1) следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} , где $a = 2C(\sqrt{m}\delta)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C_k \cap I^m)$ содержится в объединении самое большее r^m кубиков, имеющих общий объем

$$V \leq r^m (a/r^{k+1})^n = a^n r^{m-(k+1)n}.$$

Если

$$k + 1 > m/n, \quad (2.7.2)$$

то очевидно, что V стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^m)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено. \square

В начале этой главы упоминалось, что все утверждения формулируются для гладких (т. е. класса C^∞) многообразий и отображений, чтобы не загромождать доказательства несущественными деталями. На самом деле каждое утверждение справедливо для многообразий и отображений класса C^r с некоторым конечным r . Обсудим этот вопрос для теоремы Сарда: каково минимальное значение r , для которого утверждение теоремы 2.7.3 справедливо при $f \in C^r$? На шаге 3 мы воспользовались тем, что $f \in C^{k+1}$, где k удовлетворяет (2.7.2). Но

дело в том, что доказательство велось индукцией по m и надо, чтобы неравенство (2.7.2) выполнялось на каждом шаге индукции. Если аккуратно проанализировать доказательство, то получается следующее минимальное значение

$$r = \max\{1, m - n + 1\},$$

для которого утверждение леммы 2.7.5 справедливо при $f \in C^r$.

В заключение параграфа приведем две иллюстрации к теореме Сарда. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^1 . Если y есть регулярное значение f , то горизонтальная прямая $\mathbb{R} \times \{y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ трансверсальна графику функции f (рис. 2.9, а). Таким образом, теорема Сарда показывает, что “большинство” горизонтальных прямых трансверсально графику.

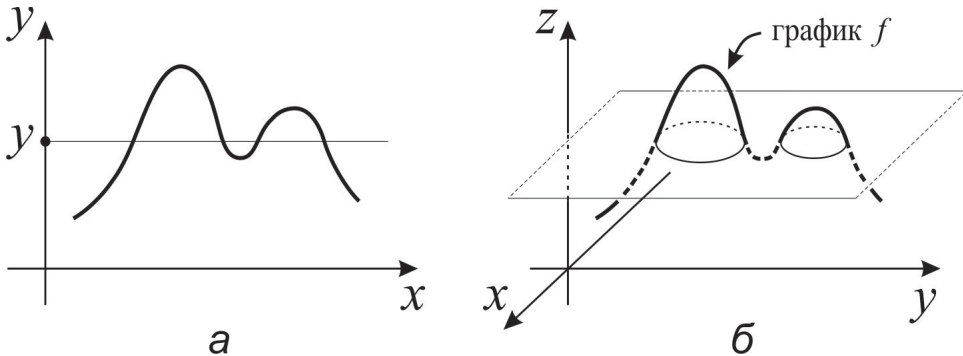


Рис. 2.9. Почти все горизонтальные гиперплоскости трансверсальны графику гладкой функции

Рассмотрим теперь функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Теорема Сарда утверждает, что большинство горизонтальных плоскостей $\mathbb{R}^2 \times \{z\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ трансверсально графику функции f , если f принадлежит классу C^2 (рис. 2.9, б). Это выглядит правдоподобным. Но не менее правдоподобным это утверждение кажется и в случае, когда f принадлежит только классу C^1 . Однако Уитни нашел контрпример к последнему утверждению! Он построил такую C^1 -функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, что множество критических точек f содержит топологическую линию $\gamma \subset \mathbb{R}^2$,

но сужение $f|_\gamma$ не постоянно, так что $f(\gamma)$ содержит открытое подмножество прямой \mathbb{R} . Это приводит к следующему парадоксу: график функции f есть поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$, на этой поверхности лежит линия $\delta = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \gamma\}$, в каждой точке которой поверхность имеет горизонтальную касательную плоскость, и все же δ не имеет постоянной высоты. Чтобы представить это себе более ярко, можно считать, что S есть холмистая местность, а δ — дорога на ней. В каждой точке дороги местность горизонтальна, а дорога тем не менее имеет подъемы и спуски.

2.8. Вложение многообразий в евклидово пространство

Приведенное в §1 этой главы определение гладкого многообразия довольно сложно. На первый взгляд может показаться, что подмногообразия евклидова пространства устроены проще, чем общие многообразия. Действительно, множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является k -мерным подмногообразием тогда и только тогда, когда локально оно совпадает с графиком гладкой функции, т. е. для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, что $M \cap U$ совпадает с графиком гладкого отображения $\mathbb{R}^k \supset V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n-k}$ для подходяще выбранной декартовой системы координат в \mathbb{R}^n ; рис. 2.10.

Однако оказывается, что любое гладкое многообразие можно реализовать в качестве подмногообразия евклидова пространства. Интересен также вопрос о нахождении минимального n , такого, что данное многообразие можно реализовать в качестве подмногообразия в \mathbb{R}^n . В настоящем параграфе мы рассмотрим эти вопросы для компактных многообразий. Все результаты этого параграфа обобщаются и на некомпактные многообразия ценой некоторого усложнения доказательств.

Теорема 2.8.1. *Любое компактное гладкое многообразие можно вложить в \mathbb{R}^q при достаточно большом q .*

Доказательство. Пусть $n = \dim M$. Через \mathbb{B}_r^n обозначаем открытый шар в \mathbb{R}^n радиуса r с центром в нуле. Так как многообразие M компактно, оно обладает конечным атласом, и легко построить для него

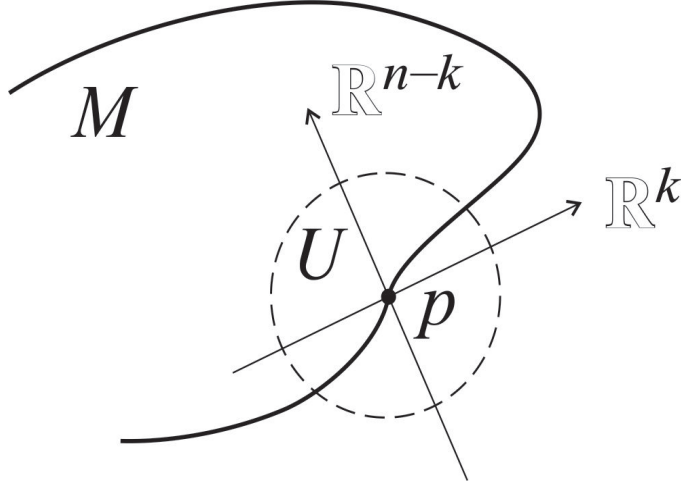


Рис. 2.10. Подмногообразие евклидова пространства локально есть график гладкого отображения

конечный атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$ с двумя свойствами: $M = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(\mathbb{B}_1^n)$ и $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{B}_2^n$ для каждого i (см. лемму 2.3.7). Фиксируем такую гладкую функцию $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что $\mu|_{\mathbb{B}_1^n} = 1$ и $\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_2^n} = 0$ (см. лемму 2.3.4). Далее, определим гладкие функции $\mu_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\mu_i = \begin{cases} \mu \circ \varphi_i & \text{на } U_i, \\ 0 & \text{на } M \setminus U_i. \end{cases}$$

Очевидно, множества $V_i = \mu_i^{-1}(1) \subset U_i$ покрывают M . Далее, определим гладкие отображения $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$f_i(x) = \begin{cases} \mu_i(x)\varphi_i(x), & \text{если } x \in U_i, \\ 0, & \text{если } x \in M \setminus U_i. \end{cases}$$

и, наконец, положим

$$g_i = (f_i, \mu_i) : M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1},$$

$$g = (g_1, \dots, g_m) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m(n+1)}.$$

Ясно, что g есть гладкое отображение.

Если $x \in V_i$, то дифференциал $d_x g_i$, а с ним и дифференциал $d_x g$, инъективен. Поскольку $\{V_i\}_{i=1}^m$ — покрытие M , это доказывает, что g является погружением.

Покажем, что g инъективно. Пусть $y \in V_i$ и $x \neq y$. Если $x \in V_i$, то $g(x) \neq g(y)$, потому что $f_i|_{V_i} = \varphi_i|_{V_i}$. Если же $x \notin V_i$, то $\mu_i(y) = 1 \neq \mu_i(x)$ и опять-таки $g(x) \neq g(y)$.

Итак, мы убедились, что g — инъективное погружение. Применяя предложение 2.6.6, убеждаемся, что g есть вложение. \square

Теорема 2.8.2 (слабая теорема Уитни). *Любое компактное гладкое n -мерное многообразие M можно погрузить в \mathbb{R}^{2n} и можно вложить в \mathbb{R}^{2n+1} .*

Доказательство. Будем доказывать второе утверждение. При этом выяснится, что доказательство первого утверждения является частью доказательства второго.

В силу теоремы 2.8.1, многообразие M вкладывается в некоторое \mathbb{R}^q . Если $q \leq 2n + 1$, то доказывать больше нечего, так что мы предположим, что $q > 2n + 1$. Поскольку многообразие M можно заменить его образом при вложении (см. предложение 2.6.7), мы будем считать, что M есть подмногообразие пространства \mathbb{R}^q . Достаточно показать, что M вкладывается в \mathbb{R}^{q-1} : чтобы получить вложение в \mathbb{R}^{2n+1} , нужно просто повторить это рассуждение надлежащее число раз.

Итак, мы предполагаем, что $M \subset \mathbb{R}^q$, $q > 2n + 1$. Отождествляем \mathbb{R}^{q-1} с $\{x \in \mathbb{R}^q \mid x_q = 0\}$. Для вектора $v \in \mathbb{R}^q \setminus \mathbb{R}^{q-1}$ обозначим через $\pi_v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ проекцию с направлением проектирования v . Мы найдем такой вектор v , что

$$\pi_v|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$$

будет вложением (рис. 2.11). Искать будем среди единичных векторов, т. е. $\|v\| = 1$.

Что требуется от v ? Инъективность отображения $\pi_v|_M$ означает, что вектор v не параллелен никакой хорде многообразия M ; другими словами, для любых двух различных точек x, y многообразия M должно выполняться условие

$$v \neq \frac{x - y}{\|x - y\|}. \quad (2.8.1)$$

Более деликатным является требование, чтобы отображение $\pi_v|_M$ было погружением. Ядро линейного отображения π_v есть, очевидно, одномерное векторное подпространство в \mathbb{R}^q с направляющим вектором v . Поэтому касательный вектор $X \in TM$ тогда и только тогда

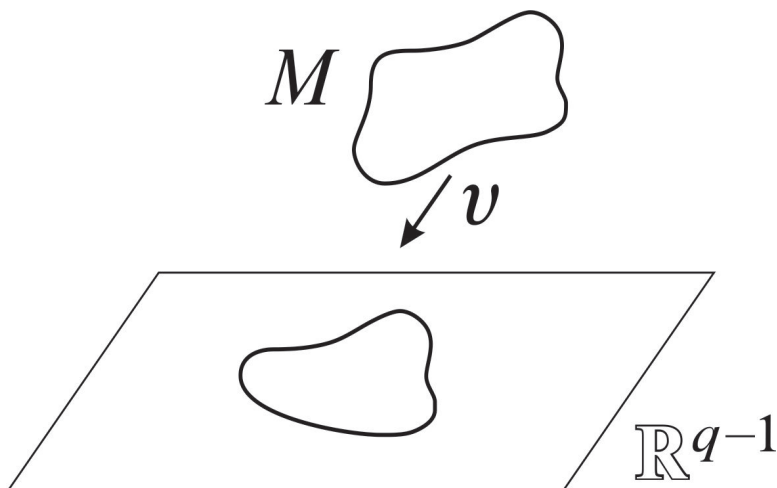


Рис. 2.11. Проектирование многообразия на гиперплоскость

удовлетворяет $(d_x \pi_v)X = 0$, когда он пропорционален v . Таким образом, $\pi_v|_M$ будет погружением в том и только в том случае, когда для всякого ненулевого вектора $X \in TM$ выполнено условие

$$v \neq \frac{X}{\|X\|}. \quad (2.8.2)$$

Здесь $\|X\|$ имеет смысл, поскольку $T_x M$ отождествляется с векторным подпространством пространства \mathbb{R}^q .

Пусть $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ — диагональ. Условие (2.8.1) можно исследовать при помощи гладкого отображения

$$\sigma : (M \times M) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}, \quad \sigma(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Ясно, что вектор v удовлетворяет условию (2.8.1) тогда и только тогда, когда он не принадлежит образу отображения σ . Заметим, что $(M \times M) \setminus \Delta$, рассматриваемое как открытое подмножество произведения $M \times M$, является многообразием размерности

$$\dim((M \times M) \setminus \Delta) = 2n < \dim \mathbb{S}^{q-1}.$$

Согласно следствию 2.7.4 теоремы Сарда, образ отображения σ имеет меру нуль. Следовательно, условие (2.8.1) выполняется для почти всех $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ (т. е. для всех v за исключением множества меры нуль).

Переходя к условию (2.8.2), заметим, что оно выполнено для всех $0 \neq X \in TM$, если оно выполнено для всех X с $\|X\| = 1$. Положим

$$T_1M = \{X \in TM \mid \|X\| = 1\}.$$

Это *многообразие единичных касательных векторов* многообразия M . Оно является подмногообразием коразмерности 1 в касательном расслоении TM . Чтобы убедиться в этом, заметим, что $T_1M = \nu^{-1}(1)$, где $\nu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определяемая равенством $\nu(X) = \|X\|^2$. Ясно, что функция ν гладкая и 1 есть регулярное значение этой функции. Применяя малую теорему о неявной функции, убеждаемся, что T_1M есть гладкое многообразие размерности $2n - 1$.

Определим гладкое отображение $\tau : T_1M \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}$ следующим образом. отождествив TM с подмножеством произведения $M \times \mathbb{R}^q$, мы делаем T_1M подмногообразием произведения $M \times \mathbb{S}^{q-1}$. Отображение τ определяется просто как сужение на T_1M проекции последнего произведения на \mathbb{S}^{q-1} . Геометрически τ есть параллельное перенесение единичных векторов, приложенных в точках многообразия M , в точку 0. Вектор $v \in \mathbb{S}^{q-1}$ удовлетворяет условию (2.8.2) тогда и только тогда, когда он не принадлежит образу отображения τ . Заметив, что

$$\dim T_1M = 2n - 1 < \dim \mathbb{S}^{q-1}, \quad (2.8.3)$$

мы опять применяем следствие 2.7.4 теоремы Сарда и убеждаемся, что условие (2.8.2) выполнено для почти всех $v \in \mathbb{S}^{q-1}$.

Итак, найдется вектор $v \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \mathbb{R}^{q-1}$, удовлетворяющий условиям (2.8.1) и (2.8.2). Для такого вектора отображение $\pi_v : M \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ является вложением. Тем самым второе утверждение теоремы 2.8.2 доказано.

При доказательстве первого утверждения условие (2.8.1) не используется, и мы должны найти вектор v , удовлетворяющий лишь условию (2.8.2). Как видно из (2.8.3), это возможно при $q > 2n$. \square

Как отмечалось выше, теорема 2.8.2 справедлива и для некомпактных многообразий. При этом все рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.8.2, остаются в силе, если утверждение теоремы 2.8.1 справедливо для некомпактных многообразий. Последнее доказывается путем некоторого усложнения доказательства теоремы 2.8.1.

Теперь обсудим более принципиальный вопрос: являются ли значения $q = 2n$ и $q = 2n + 1$ минимальными, при которых справедливы первое и второе утверждения теоремы 2.8.2 соответственно? Оказывается, оба эти значения можно уменьшить на единицу.

Теорема 2.8.3 (сильная теорема Уитни). *Любое гладкое n -мерное многообразие можно погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} и можно вложить в \mathbb{R}^{2n} .*

Приводимые в этой теореме значения $q = 2n - 1$ и $q = 2n$ не улучшаемы. Например, проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ нельзя вложить в \mathbb{R}^{2n-1} . Это доказывается с помощью некоторых методов алгебраической топологии, выходящих за рамки нашего курса.

Мы не приводим здесь доказательство теоремы 2.8.3, обсудив лишь вкратце принципиальную разницу между теоремами 2.8.2 и 2.8.3. Внимательно посмотрев на приведенное доказательство теоремы 2.8.2, можно заметить, что ее легко превратить в *аппроксимационную теорему*: для любого гладкого отображения $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ с $q \geq 2n + 1$ и любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое вложение $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ такое, что $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ для всех $x \in M$. Другими словами: любое отображение $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ можно превратить во вложение посредством сколь угодно малого изменения. Теорема 2.8.3 уже не имеет аппроксимационного характера, как видно из следующего примера. Рассмотрим погружение $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость в виде “восьмерки” (рис. 2.12). Понятно, что это погружение нельзя превратить во вложение посредством малого шевеления. Но если ту же восьмерку рассматривать как погружение $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в трехмерное пространство, то такое превращение очевидно. Из-за этой разницы доказательство теоремы 2.8.3 требует новых, по сравнению с доказательством теоремы 2.8.2, аргументов, носящих нелокальный характер.

Упражнения

1. Докажите, что произведение $S^n \times S^n$ двух сфер одинаковой размерности можно вложить в \mathbb{R}^{2n+1} . (Указание: проанализируйте случай $n = 1$ и обобщите его на произвольное n). Более обще: произведение $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ можно вложить в $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k + 1}$.

2. Докажите, что *проколотый тор* $S^1 \times S^1 \setminus \{\text{точка}\}$ можно погрузить в \mathbb{R}^2 . (Указание: растяните прокол).

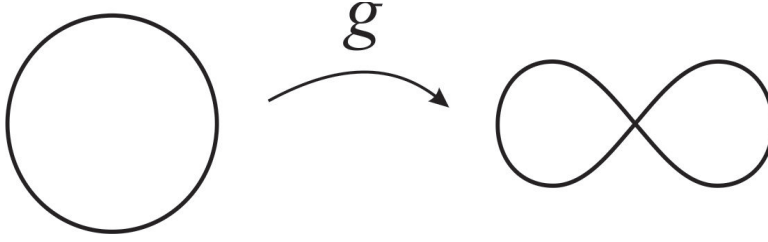


Рис. 2.12. Погружение окружности в плоскость в виде “восьмерки”

2.9. Многообразие с краем

Согласно приведенному в §2.1 определению многообразия, диск $\mathbb{D}_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ не является многообразием. Тем не менее, на нем естественным образом определены гладкие функции, касательные векторы и многие другие понятия дифференциальной топологии. Мы собираемся расширить понятие многообразия так, чтобы \mathbb{D}_r^n и подобные ему пространства стали гладкими многообразиями.

В качестве модели возьмем замкнутое полупространство

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\},$$

рассматриваемое с индуцированной из \mathbb{R}^n топологией. Обозначим также $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \subset \mathbb{R}_+^n$. Пусть $U \subset \mathbb{R}_+^n$ — открытое множество. Говорим, что отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ является *гладким в окрестности точки* $x \in U$, если существуют открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$, $x \in V$ и гладкое отображение $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, такие, что $\tilde{f}|_{U \cap V} = f|_{U \cap V}$. Говорим, что f *гладко*, если оно гладко в окрестности каждой точки $x \in U$.

Теперь мы повторяем почти буквально все определения, приведенные в начале §2.1, с единственным исключением: в качестве модельного пространства используется \mathbb{R}_+^n вместо \mathbb{R}^n .

Хаусдорфово топологическое пространство M , удовлетворяющее второй аксиоме счетности, называется *топологическим многообразием с краем* размерности n , если оно локально гомеоморфно \mathbb{R}_+^n , т.е. у каждой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и гомеоморфизм $\varphi : U \rightarrow V$, где V — некоторое открытое множество в \mathbb{R}_+^n . Отметим, что если V не пересекается с $\partial\mathbb{R}_+^n$, то V является от-

крытым множеством в \mathbb{R}^n . Поэтому прежнее понятие топологического многообразия является частным случаем приведенного определения.

Пусть M — топологическое многообразие с краем размерности n . *Картой* на M называем пару (U, φ) , где U — открытое множество в M и φ — гомеоморфизм множества U на некоторое открытое множество в \mathbb{R}_+^n . Далее вводим понятие гладкой согласованности двух карт, определяем атлас, эквивалентность атласов и, наконец, определяем гладкую структуру как класс эквивалентности гладких атласов. Таким образом приходим к определению *гладкого многообразия с краем*, включающего прежнее определение в качестве частного случая. Конечно, все это можно определить и для дифференцируемых структур класса C^r с конечным r .

Пусть M — гладкое многообразие с краем размерности n и (U, φ) — карта на M . Говорим, что точка $x \in U$ является *краевой точкой* по отношению к карте (U, φ) , если $\varphi(x) \in \partial\mathbb{R}_+^n$. Это условие не зависит от выбора карты, как показывает следующая

Лемма 2.9.1 (инвариантность края). *Пусть U и V — открытые множества в \mathbb{R}_+^n и $\varphi : U \rightarrow V$ — диффеоморфизм. Если $x \in U \cap \partial\mathbb{R}_+^n$, то $\varphi(x) \in \partial\mathbb{R}_+^n$.*

Доказательство. Доказываем от противного. Предположим, что $\varphi(x) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \partial\mathbb{R}_+^n$. Найдем открытое множество \tilde{U} в \mathbb{R}^n , содержащее точку x , и гладкое отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $\tilde{\varphi}|_{\tilde{U} \cap U} = \varphi|_{\tilde{U} \cap U}$. Поскольку дифференциал $d_x \tilde{\varphi} = d_x \varphi$ невырожден, то, применив теорему об обратной функции и уменьшив \tilde{U} , мы можем считать, что $\tilde{\varphi}$ есть диффеоморфизм области \tilde{U} на $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Область \tilde{U} разбивается гиперплоскостью $\partial\mathbb{R}_+^n$ на две “полуокрестности” точки x : множество $\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n$ и множество $\tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n)$. Диффеоморфизм $\tilde{\varphi}$ сохраняет эту картинку, т. е. область $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ разбивается гиперповерхностью $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap \partial\mathbb{R}_+^n)$ на две “полуокрестности” точки $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$: множество $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n)$ и множество $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n))$ (рис. 2.13). Следовательно, множество $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n) = \varphi(\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n)$ не может быть окрестностью точки $\varphi(x)$. С другой стороны, поскольку $\varphi : U \rightarrow V$ — диффеоморфизм и $\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n$ — окрестность точки x в \mathbb{R}_+^n , множество $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n)$ должно быть окрестностью точки $\varphi(x)$. Противоречие. \square

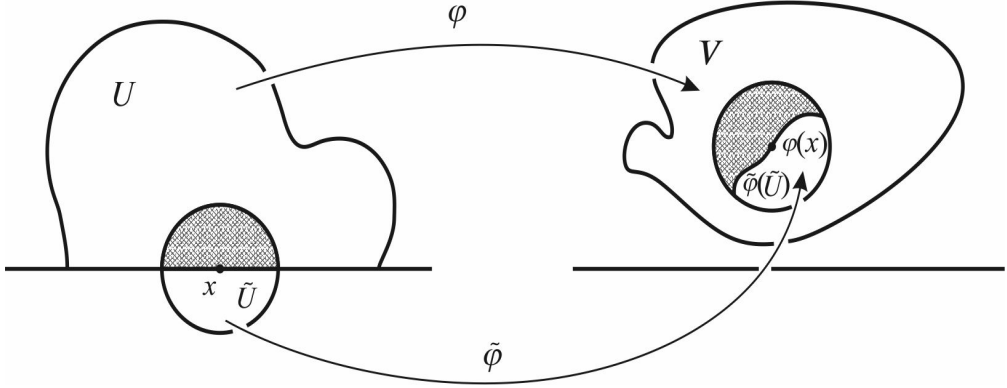


Рис. 2.13. К доказательству инвариантности края. Слева заштриховано множество $\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n$; справа заштриховано множество $\varphi(\tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n)$

Множество всех $x \in M$, являющихся краевыми точками по отношению к некоторой (а, значит, и любой) карте, содержащей x , обозначается ∂M и называется *краем* многообразия M . Старое определение многообразия, приведенное в §2.1, совпадает с новым в частном случае $\partial M = \emptyset$. Впредь такие многообразия будем называть *многообразиями без края*.

Пусть M есть гладкое n -мерное многообразие с краем. Карта (U, φ) на M определяет карту $(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M})$ на ∂M , где $\varphi|_{U \cap \partial M}$ — гомеоморфизм множества $U \cap \partial M$ на некоторое открытое множество в $\partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ есть атлас на M , то $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ является атласом на ∂M . Тем самым ∂M становится $(n-1)$ -мерным многообразием без края. Ср. это с абзацем после определения 2.6.4 в §2.6. Впредь ∂M всегда рассматривается в качестве гладкого многообразия без края с только что введенной гладкой структурой.

Большинство понятий, введенных ранее для многообразий без края, буквально переносятся на многообразия с краем: гладкое отображение и диффеоморфизм, касательное пространство и касательное расслоение, дифференциал гладкого отображения, векторное поле. Не требуют серьезных изменений понятия погружения и вложения.

Некоторая осторожность необходима, однако, при рассмотрении по-

нения подмногообразия. Хотелось бы, например, считать диск

$$\mathbb{D}_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

подмногообразием пространства \mathbb{R}^n . Но что делать, скажем, с двумерным диском, который лежит в полупространстве \mathbb{R}_+^2 и граница которого пересекается с $\partial\mathbb{R}_+^2$ по одной точке? Или, еще хуже, по канторову множеству. Все это — образы вложений, и мы должны считать их подмногообразиями.

Не вдаваясь в определение подмногообразия в общем случае, мы обсудим лишь два наиболее важных частных случая так называемых *правильных* подмногообразий.

Случай 1. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие (с краем или без). Множество $A \subset M$ называется *правильным n -мерным подмногообразием* в M , если а) A есть образ гладкого вложения некоторого n -мерного многообразия (с краем или без) в M (тем самым A само наделено структурой гладкого n -мерного многообразия); и б) $\partial M \cap \partial A = \emptyset$.

Чаще всего такие подмногообразия появляются в ситуации, описанной в следующем утверждении.

Предложение 2.9.2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие без края, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция и $a \in \mathbb{R}$ — регулярное значение функции f . Тогда множество $\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ есть правильное n -мерное подмногообразие в M с краем $f^{-1}(a)$.

Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что, согласно малой теореме о неявной функции, $f^{-1}(a)$ является $(n-1)$ -мерным подмногообразием (без края) в M . Остальное очевидно.

Например, диск $\mathbb{D}_r^n(x_0)$ есть правильное n -мерное подмногообразие в \mathbb{R}^n , поскольку r^2 есть регулярное значение функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x - x_0\|^2$ для любого $r > 0$.

Случай 2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие (с краем или без). Множество $A \subset M$ называется *правильным k -мерным подмногообразием* ($k < n$) в M , если: а) A есть образ гладкого вложения некоторого k -мерного многообразия (с краем или без) в M (тем самым A само наделено структурой гладкого k -мерного многообразия); б) $\partial A = \partial M \cap A$ и в) в каждой точке $x \in \partial A$ подмногообразие

A трансверсально краю ∂M , т. е. $T_x A$ не является подпространством пространства $T_x(\partial M)$.

На рис. 2.14, *а* приведен пример правильного одномерного подмногообразия, а на рис. 2.14, *б–г* — примеры неправильных подмногообразий. В случаях *б* и *в* нарушено условие $\partial A = \partial M \cap A$, а в случае *г* нарушено условие трансверсальности.

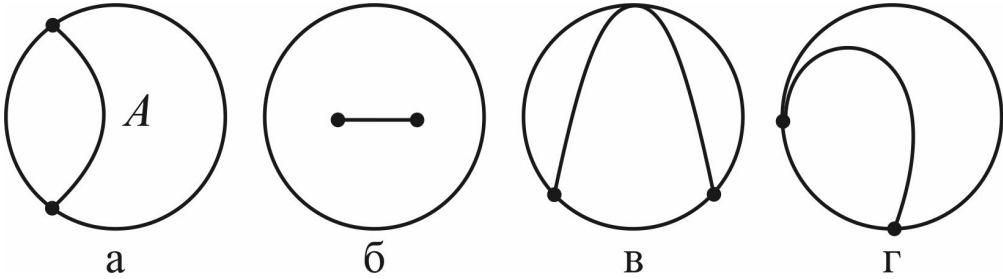


Рис. 2.14. Примеры правильного (*а*) подмногообразия и неправильных (*б–г*) подмногообразий

Малая теорема о неявной функции обобщается на многообразия с краем в следующей форме.

Теорема 2.9.3. Пусть $f : M^m \rightarrow N^n$ ($m \geq n$) — гладкое отображение. Если $q \in N \setminus \partial N$ есть регулярное значение как для f , так и для $f|_{\partial M}$, то $f^{-1}(q)$ есть правильное подмногообразие в M размерности $m - n$.

Доказательство не приводим, поскольку оно отличается лишь техническими деталями от доказательства теоремы 2.6.9.

Упражнения

1. Докажите, что края диффеоморфных многообразий диффеоморфны.
2. Докажите, что гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ переводит свои регулярные точки, лежащие в $M \setminus \partial M$, в $N \setminus \partial N$.
3. Пусть $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Каждая точка полуплоскости \mathbb{R}_+^2 является регулярной точкой функции $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, опреде-

ляемой формулой $f(x, y) = y + g(x)$. Положим

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда f — гладкая функция, 0 есть регулярное значение этой функции, но $f^{-1}(0)$ не есть многообразие. Этот пример показывает, что последнее условие в теореме 2.9.3 существенно.

2.10. Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы начнем со следующей теоремы, представляющей и самостоятельный интерес.

Теорема 2.10.1. *Пусть M — компактное гладкое многообразие с краем. Не существует гладкого отображения $r : M \rightarrow \partial M$, удовлетворяющего $r|_{\partial M} = I$, где I — тождественное отображение.*

Напомним, что такое отображение называется ретракцией многообразия M на ∂M , см. §1.7.

Доказательство. Предположим, что такое отображение r существует. Пусть $q \in \partial M$ — регулярное значение отображения r , существующее в силу теоремы Сарда. Точка q является, конечно, регулярным значением тождественного отображения $r|_{\partial M}$. Применяя теорему 2.9.3, убеждаемся, что $r^{-1}(q)$ есть гладкое одномерное подмногообразие в M с краем, состоящем из одной точки:

$$r^{-1}(q) \cap \partial M = \{q\}.$$

Многообразие $r^{-1}(q)$ компактно как замкнутое множество компактного многообразия. Любое компактное одномерное многообразие является объединением конечного числа непересекающихся окружностей и отрезков и, следовательно, край такого многообразия состоит из четного числа точек. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

В частности, диск \mathbb{D}^n является компактным многообразием, краем которого служит сфера \mathbb{S}^{n-1} . Следовательно, как частный случай, мы доказали, что *тождественное отображение сферы \mathbb{S}^{n-1} нельзя продолжить до гладкого отображения $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$.*

Лемма 2.10.2. Любое гладкое отображение $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ имеет неподвижную точку (т. е. точку $x \in \mathbb{D}^n$, для которой $g(x) = x$).

Доказательство. Предположим, что g не имеет неподвижных точек. Для $x \in \mathbb{D}^n$ определим $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ как точку пересечения сферы \mathbb{S}^{n-1} с прямолинейным лучом, выходящим из $g(x)$ и проходящим через x (рис. 2.15). Легко убедиться, что $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ является гладким отображением (проверьте это, выразив явно координаты точки $r(x)$ через координаты x и $g(x)$). Очевидно, $r(x) = x$ при $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Это противоречит теореме 2.10.1. \square

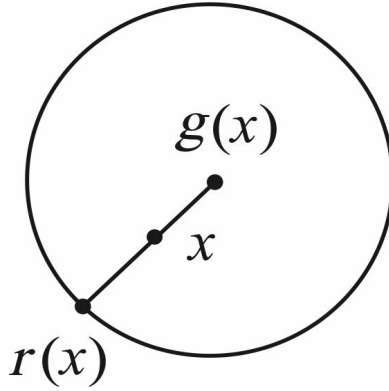


Рис. 2.15. Определение отображения $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$

Теорема 2.10.3 (теорема Брауэра). Любое непрерывное отображение $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ имеет неподвижную точку.

Доказательство. Мы сведем эту теорему к лемме 2.10.2, аппроксимируя f гладкими отображениями. Напомним известную в “Анализе” аппроксимационную теорему Вейерштрасса: если $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что $|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in K$.

Пусть $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ — непрерывное отображение. Согласно теореме Вейерштрасса, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое гладкое отображение $\tilde{g} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

$$\|f(x) - \tilde{g}(x)\| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in \mathbb{D}^n.$$

Однако \tilde{g} может переводить точки из \mathbb{D}^n в точки, находящиеся вне \mathbb{D}^n . Поэтому мы определяем новое отображение g , полагая $g(x) = \tilde{g}(x)/(1 + \varepsilon)$. Ясно, что g отображает диск \mathbb{D}^n в себя и

$$\|f(x) - g(x)\| < 2\varepsilon \quad \text{для всех } x \in \mathbb{D}^n. \quad (2.10.1)$$

Предположим, вопреки утверждению теоремы, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in \mathbb{D}^n$. Тогда непрерывная функция $\|f(x) - x\|$ должна иметь на \mathbb{D}^n минимум $\mu > 0$, т. е.

$$\|f(x) - x\| \geq \mu > 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{D}^n. \quad (2.10.2)$$

Выбрав $\varepsilon < \mu/4$, получаем из (2.10.1) и (2.10.2)

$$\begin{aligned} \|g(x) - x\| &= \|f(x) - x + (g(x) - f(x))\| \\ &\geq \|f(x) - x\| - \|(g(x) - f(x))\| > \mu - 2\varepsilon > \mu/2. \end{aligned}$$

Это означает, что гладкое отображение $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ не имеет неподвижных точек, что противоречит лемме 2.10.2. \square

Теорема Брауэра используется в различных областях математики для доказательства существования решений уравнений и систем уравнений.

2.11. Ориентация многообразия

Сначала напомним определение ориентации векторного пространства.

Пусть V — n -мерное действительное векторное пространство и \mathcal{B} — множество всех его базисов, т. е. упорядоченных наборов из n линейно независимых векторов. Вводим на \mathcal{B} отношение эквивалентности, объявляя базисы (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) эквивалентными (*одинаково ориентированными*), если $\det(a_{ij}) > 0$, где матрица перехода (a_{ij}) определяется равенствами $e'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$. Тем самым множество \mathcal{B} разбивается на два класса эквивалентности, которые и называются *ориентациями* пространства V . Ориентировать векторное пространство — значит выбрать одну из двух его ориентаций, что можно сделать путем указания одного базиса из выбранного класса эквивалентности.

Базисы, принадлежащие выбранной ориентации, называются *положительными базисами* ориентированного векторного пространства V . В частности, ориентация пространства \mathbb{R}^n , определяемая базисом

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)),$$

называется *стандартной ориентацией*.

Ориентировать гладкое многообразие M значит ориентировать каждое касательное пространство $T_x M$, причем эти ориентации должны непрерывно зависеть от точки x в следующем смысле. Для каждой точки $x_0 \in M$ должна существовать такая карта (U, φ) , что $x_0 \in U$ и для каждой точки $x \in U$ дифференциал $d_x \varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит выбранную ориентацию пространства $T_x M$ в стандартную ориентацию пространства \mathbb{R}^n .

Далеко не каждое многообразие можно ориентировать. Если связное многообразие ориентируемо, то оно имеет в точности две ориентации.

Простейшим примером неориентируемого многообразия с краем является лента Мебиуса \mathcal{M} . Напомню, что она получается из прямоугольника $[0, a] \times [-1, 1]$ отождествлением вертикальных сторон с “переворачиванием”, т. е. путем отождествления точек $(0, y)$ и $(a, -y)$, рис. 2.16. Рассмотрим горизонтальный отрезок с концами в точках $(0, 0)$ и $(a, 0)$, которому соответствует замкнутая кривая на \mathcal{M} . Пусть ориентация касательного пространства в точке $(0, 0)$ определяется изображенным на рисунке базисом (e_1, e_2) . Непрерывно продолжая этот базис вдоль горизонтального отрезка до точки $(a, 0)$, мы получим базис, одинаково ориентированный с $(e_1, -e_2)$, т. е. противоположно ориентированный с исходным базисом (e_1, e_2) . Это означает, что ориентация касательного пространства $T_x \mathcal{M}$ меняется на противоположную при непрерывном изменении вдоль некоторой замкнутой кривой на ленте Мебиуса \mathcal{M} .

Если M — ориентированное многообразие с краем, то ∂M также является ориентируемым многообразием. Более того, край можно снабдить так называемой *индуцированной ориентацией*, которая определяется следующим образом. Для точки $p \in \partial M$ выберем окрестность $U \subset M$ и функцию $f \in \mathcal{F}(U)$ так, что $f(x) \leq 0$ для всех $x \in U$, $f|_{U \cap \partial M} = 0$ и $d_p f \neq 0$ (легко видеть, что такая функция существует). Вектор $N \in T_p M$ назовем *внешним вектором*, если $(d_p f)N > 0$. Если

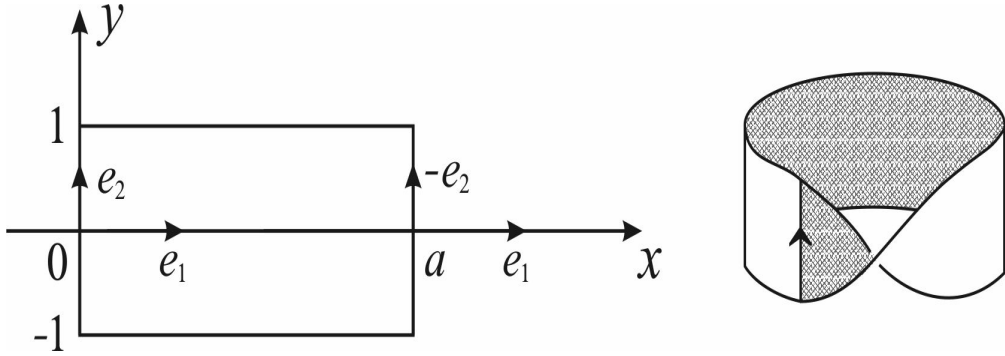


Рис. 2.16. Лента Мебиуса не ориентируема

$N, N' \in T_p M$ — два внешних вектора, то $N' = \alpha N + X$, где $\alpha > 0$ и $X \in T_p(\partial M)$. Базис (e_1, \dots, e_{n-1}) пространства $T_p(\partial M)$ объявим положительным, если (e_1, \dots, e_{n-1}, N) — положительный базис пространства $T_p M$. Это определение не зависит от выбора внешнего вектора N в силу указанной выше связи между внешними векторами.

Упражнения

1. Альтернативное определение ориентации многообразия: ориентировать многообразие значит задать на нем такой атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$, что при $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ якобиан отображения $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ положителен. Докажите эквивалентность этого определения первоначальному.

2. Рассмотрим погружение $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ многообразия в евклидово пространство. Для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \subset M$ точки x и окрестность $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ точки $f(x)$, такие, что гиперповерхность $f(M \cap U)$ разбивает V на две полуокрестности. Гладкое отображение $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ называется *единичной нормалью* гиперповерхности M , если $\|\nu(x)\| = 1$ и вектор $\nu(x)$ ортогонален подпространству $(d_x f)(T_x M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ для всех $x \in M$. Докажите, что существование единичной нормали эквивалентно ориентируемости M . Гиперповерхности с выбранной единичной нормалью часто называют “двусторонними”, поскольку вектор $\nu(x)$ позволяет выделить одну из двух полуокрестностей, упомянутых выше, причем выделенная полуокрестность непрерывно зависит от x . На рис. 1.3 в §1.3 приведено

погружение бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 . Это погружение дает пример односторонней гиперповерхности, не допускающей единичной нормали.

3. Ситуация, описанная в предыдущем упражнении, резко меняется, если объемлющее многообразие неориентируемо. Постройте такой пример вложения бутылки Клейна \mathcal{K} в проективное пространство $\mathbb{R}P^3$, что разность $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathcal{K}$ имеет две компоненты связности. Таким образом, бутылку Клейна можно вложить в $\mathbb{R}P^3$ в качестве двусторонней поверхности. До некоторой степени это оправдывает название “бутылка”.

2.12. Классификация одномерных и компактных двумерных многообразий

В этом параграфе мы не приводим доказательств, которые не содержат принципиально новых идей, но технически довольно громоздки.

Теорема 2.12.1.

1. Любое связное компактное одномерное многообразие без края диффеоморфно окружности S^1 .
2. Любое связное некомпактное одномерное многообразие без края диффеоморфно \mathbb{R} .
3. Любое связное компактное одномерное многообразие с краем диффеоморфно отрезку $[0, 1]$.
4. Любое связное некомпактное одномерное многообразие с краем диффеоморфно полузамкнутому интервалу $[0, 1)$.

Понятно, зачем условие связности включено в каждое из этих утверждений. Например, исключив это условие из утверждения 1, мы должны формулировать его в следующей форме: всякое компактное одномерное многообразие без края диффеоморфно дизъюнкционному объединению конечного числа окружностей.

Фиксируем целое неотрицательное число g . Выбросив из двумерной сферы S^2 $2g$ маленьких открытых непересекающихся дисков, получим компактное двумерное многообразие M с краем, состоящим из $2g$ окружностей, которые сгруппируем в g пар. Заготовим g экземпляров

цилиндра $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, край которого состоит из двух окружностей. Приклеим эти цилиндры к M , отождествляя граничные окружности каждого цилиндра с окружностями одной из пар, на которые разбит край ∂M . Это склеивание можно “сгладить”, получив в итоге гладкое двумерное многообразие, называемое *ориентируемой поверхностью рода g* . Рис. 2.12. иллюстрирует эту процедуру для $g = 2$. В частности, при $g = 0$ мы получаем сферу \mathbb{S}^2 ; при $g = 1$ — тор. Ориентируемые поверхности родов 2 и 3 изображены на рис. 2.18. Из этого рисунка ясно, как выглядит ориентируемая поверхность произвольного рода g .

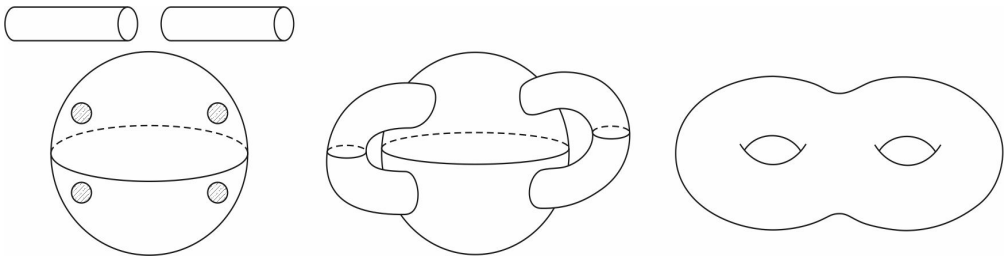


Рис. 2.17. Построение ориентируемой поверхности рода 2

Теорема 2.12.2. *Ориентируемыми поверхностями рода g ($g \geq 0$) исчерпываются все, с точностью до диффеоморфизма, связные компактные ориентируемые двумерные многообразия без края.*

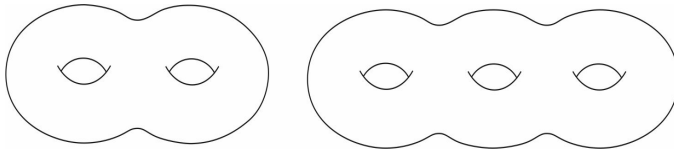


Рис. 2.18. Ориентируемые поверхности родов 2 и 3

Вполне аналогично конструируются все неориентируемые компактные поверхности. Фиксируем целое положительное число g . Выбросив из двумерной сферы \mathbb{S}^2 g маленьких открытых непересекающихся дисков, получим компактное двумерное многообразие M с краем, состоящим из g окружностей. Заготовим g экземпляров ленты Мебиуса M ,

краем которой является окружность. Приклеим эти ленты Мебиуса к M , отождествляя граничную окружность каждой ленты с одной из окружностей края ∂M . Это склеивание можно “сгладить”, получив в итоге гладкое двумерное многообразие, называемое *неориентируемой поверхностью рода g* .

Теорема 2.12.3. *Неориентируемыми поверхностями рода g ($g \geq 1$) исчерпываются все, с точностью до диффеоморфизма, связные компактные неориентируемые двумерные многообразия без края.*

Доказательство первых двух утверждений теоремы 2.12.1 приведено в конце книги [12], примерно так же доказываются последние два утверждения этой теоремы. Доказательство теорем 2.12.2 и 2.12.3 можно прочесть в §10 книги [3].

Упражнения

1. Докажите, что ориентируемая поверхность рода $g > 0$ может быть получена попарным отождествлением сторон $4g$ -угольника. Указание: для $g = 1$ эта конструкция описана в примере 6е из §1.3.

2. Найдите эйлерову характеристику ориентируемой поверхности рода g .

3. Выбросив из двумерной сферы три маленьких непересекающихся открытых диска, получим двумерное многообразие с краем, состоящим из трех окружностей. Две из этих окружностей заклеим цилиндром $S^1 \times [0, 1]$, а третью окружность заклеим лентой Мебиуса. Докажите, что в результате получится неориентируемая поверхность рода 3. Другими словами: вклеивание одного цилиндра и одной ленты Мебиуса эквивалентно вклеиванию трех лент Мебиуса.

4. Неориентируемая поверхность рода 1 есть проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Неориентируемая поверхность рода 2 есть бутылка Клейна. Докажите.

2.13. Риманова метрика

Мы будем подробно изучать римановы метрики и римановы многообразия в главе 5 настоящего курса. Но в начале следующей главы нам понадобится понятие градиента гладкой функции, которое определено только на римановых многообразиях. Поэтому здесь мы изложим

минимум сведений, необходимый для определения градиента. Начнем с напомним определения скалярного произведения на векторном пространстве.

Пусть V — действительное конечномерное векторное пространство. Скалярным произведением на V называется функция

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

удовлетворяющая следующим аксиомам:

- 1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 2) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$ для $x_1, x_2, y \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- 3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0$, только если $x = 0$.

Другими словами, скалярное произведение — это положительно определенная симметричная билинейная форма. Напомним также, что линейным функционалом на V называется линейное отображение $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$. Если на V зафиксировано скалярное произведение, то любой линейный функционал единственным образом представим в виде $\ell(x) = \langle x, y \rangle$, где вектор $y \in V$ однозначно определяется данным функционалом ℓ .

Римановой метрикой на гладком многообразии M называется функция g , сопоставляющая каждой точке $x \in M$ скалярное произведение $g(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ на касательном пространстве $T_x M$, которая гладко зависит от x в следующем смысле: если $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ — два гладких векторных поля на M , то скалярное произведение $\langle X(x), Y(x) \rangle_x$ должно быть гладкой функцией точки $x \in M$. Гладкое многообразие M вместе с зафиксированной на нем римановой метрикой g называется римановым многообразием и обозначается (M, g) или просто M , если из контекста ясно, о какой метрике идет речь. На любом гладком многообразии существует риманова метрика, что будет доказано в главе 5.

Посмотрим, как риманова метрика выглядит в координатах. Пусть $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальная система координат на римановом многообразии (M, g) . Напомним, что определены координатные векторные поля $\partial_i \in \mathcal{V}(U)$ ($1 \leq i \leq n$). Определим функции $g_{ij} \in \mathcal{F}(U)$ равенством $g_{ij}(x) = \langle \partial_i(x), \partial_j(x) \rangle_x$. Тогда $(g_{ij}(x))$ — симметричная положительно определенная $n \times n$ -матрица, гладко зависящая от $x \in U$. Рассмотрим два вектора $X, Y \in T_x M$ и разложим их по координатному базису: $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_i|_x$, $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \partial_i|_x$. Пользуясь линейностью скалярного

произведения, получаем

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) X_i Y_j.$$

Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на римановом многообразии. Для каждой точки $x \in M$ дифференциал $d_x f : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, определенный равенством $(d_x f)X = Xf$, является линейным функционалом на $T_x M$. Согласно сказанному выше, существует однозначно определенный вектор $\nabla f(x) \in T_x M$, удовлетворяющий

$$(d_x f)X = Xf = \langle \nabla f(x), X \rangle \quad \text{для всех } X \in T_x M.$$

Легко убедиться, что этот вектор гладко зависит от x и тем самым определяет векторное поле $\nabla f \in \mathcal{V}(M)$, называемое *градиентом* функции f .

Координатное представление градиента таково:

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j, \quad (2.13.1)$$

где (g^{ij}) — обратная к (g_{ij}) матрица.

Упражнения

1. Докажите формулу (2.13.1).
2. Найдите правило преобразования матрицы (g_{ij}) при замене координат.

Литература, рекомендуемая к этой главе: [7, 12, 19].

Глава 3

ТЕОРИЯ МОРСА

В этой главе, если не оговорено противное, *многообразие* означает многообразие без края.

3.1. Пример функции Морса

В этом параграфе мы на простом примере обнаружим некоторые связи между критическими точками гладкой действительной функции, определенной на многообразии, и топологией этого многообразия. В остальных параграфах этой главы будет показано, что эти связи имеют место и в общем случае.

Напомним, что точка $p \in M$ является критической точкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда все ее частные производные первого порядка обращаются в нуль в точке p .

Возьмем в качестве M двумерный тор $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, вложенный в \mathbb{R}^3 как показано на рис. 3.1 (колесо автомобиля, стоящего на горизонтальной плоскости $z = 0$), и рассмотрим функцию $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, определенную равенством $f(x, y, z) = z$ (функция высоты). Легко понять, что $p \in M$ является критической точкой этой функции тогда и только тогда, когда касательная плоскость $T_p M \subset \mathbb{R}^3$ горизонтальна, т. е. параллельна плоскости $z = 0$. Следовательно, у функции f есть ровно 4 критические точки, обозначенные на рис. 3.1 через p_i ($0 \leq i \leq 3$). Подберем размеры тора так, что $f(p_i) = i$ ($0 \leq i \leq 3$). Таким образом, $\{0, 1, 2, 3\}$ — множество критических значений функции f .

Введем обозначение $M^a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$. Если a не явля-

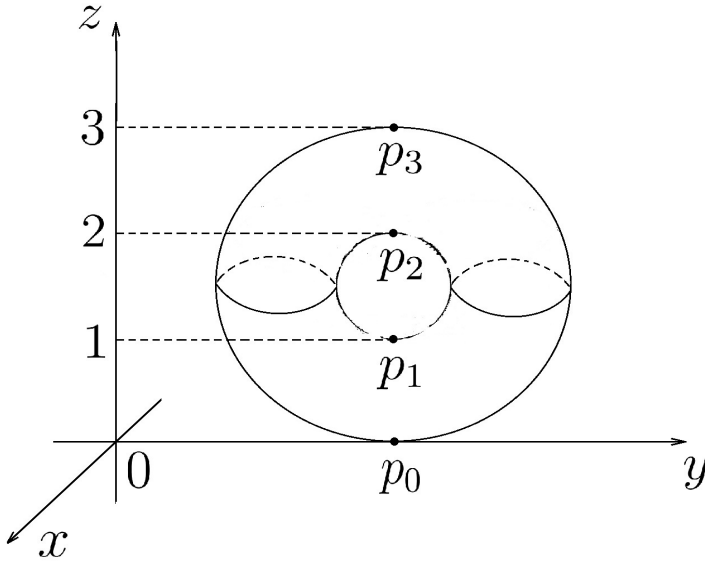


Рис. 3.1. Критические точки “функции высоты”

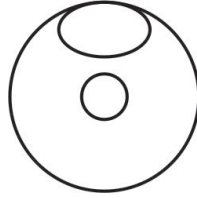
ется критическим значением функции f , то M^a есть двумерное многообразие с краем, см. предложение 2.9.2. Посмотрим, как меняется топология этого многообразия при возрастании параметра a .

1. Если $a < 0$, то M^a пусто.
2. Если $0 < a < 1$, то M^a гомеоморфно двумерному диску \mathbb{D}^2 .
3. Если $1 < a < 2$, то M^a гомеоморфно цилиндру $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, рис. 3.2.

Рис. 3.2. Многообразие M^a при $1 < a < 2$

4. Если $2 < a < 3$, то M^a гомеоморфно тору с выброшенным двумерным шаром, рис. 3.3.
5. Если $a > 3$, то M^a есть весь тор.

Первый важный вывод, который можно сделать из этих наблюдений: многообразия M^a и M^b гомеоморфны, если отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений функции f .

Рис. 3.3. Многообразие M^a при $2 < a < 3$

Чтобы понять изменение M^a , когда a перескакивает через критическое значение функции f , удобнее рассматривать M^a с точностью до гомотопической эквивалентности, используя терминологию клеточных комплексов, см. §1.8.

$1 \rightarrow 2$ есть операция приклеивания нульмерной клетки, поскольку диск \mathbb{D}^2 гомотопически эквивалентен нульмерной клетке (рис. 3.4).



Рис. 3.4. Диск гомотопически эквивалентен точке

$2 \rightarrow 3$ есть операция приклеивания одномерной клетки (рис. 3.5).



Рис. 3.5. Приклеивание одномерной клетки к диску

$3 \rightarrow 4$ есть снова операция приклеивания одномерной клетки, изображенная на рис. 3.6.

$4 \rightarrow 5$ есть операция приклеивания двумерной клетки.

Итак, с точностью до гомотопической эквивалентности, M^b получается из M^a приклеиванием одной клетки, если множество $f^{-1}[a, b]$ содержит одну критическую точку p функции f . Какова размерность приклеиваемой клетки? Чтобы найти предположительный ответ на этот вопрос, снова обратимся к рис. 3.1.

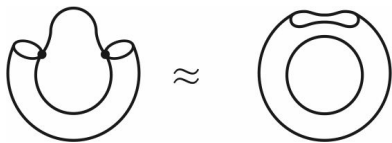


Рис. 3.6. Приклеивание одномерной клетки к цилиндру

1 \rightarrow 2. Точка p_0 является точкой минимума функции f . Выберем координаты (y_1, y_2) в некоторой окрестности $U'_0 \subset M$ точки p_0 так, чтобы $p_0 = (0, 0)$. Поскольку $f(p_0) = 0$ и первые частные производные функции f обращаются в нуль в точке p_0 , то в окрестности точки p_0 функция f представима в виде

$$f(y_1, y_2) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + o(y_1^2 + y_2^2), \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(0, 0). \quad (3.1.1)$$

Участвующая в (3.1.1) квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}y_iy_j$ положительно определена, поскольку $f(y_1, y_2)$ квадратично растет, когда точка (y_1, y_2) выходит из $(0, 0)$ в любом направлении; это ясно из рис. 3.1. Используя положительную определенность этой квадратичной формы, можно доказать, что путем изменения координат формулу (3.1.1) можно упростить до следующей:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad (3.1.2)$$

где (x_1, x_2) — новые координаты, определенные в некоторой окрестности $U_0 \subset M$ точки p_0 . Возможность выбора таких координат утверждает лемма Морса, приводимая в следующем параграфе.

2 \rightarrow 3. В окрестности точки p_1 поведение функции f характеризуется наличием двух направлений, в одном из которых f квадратично растет, а в другом — убывает (в двумерном случае такие критические точки называются *седловыми* точками, или *точками перевала*). Отсюда вытекает существование координат (x_1, x_2) , определенных в некоторой окрестности $U_1 \subset M$ точки p_1 , таких, что $p_1 = (0, 0)$ и

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 + x_2^2. \quad (3.1.3)$$

3 \rightarrow 4. В окрестности точки p_2 ситуация та же, что и в предыдущем абзаце, и в подходяще выбранных локальных координатах

$$f(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 + x_2^2. \quad (3.1.4)$$

4 \rightarrow 5. Точка p_3 является точкой максимума функции f и в некоторой окрестности этой точки можно выбрать координаты так, что

$$f(x_1, x_2) = 3 - x_1^2 - x_2^2. \quad (3.1.5)$$

Формулы (3.1.2)–(3.1.5) можно записать единообразно в виде

$$f(x_1, x_2) = f(p_i) \pm x_1^2 \pm x_2^2.$$

Различие между четырьмя рассмотренными случаями состоит лишь в количестве знаков “ $-$ ” в правой части этой формулы. Это число называется индексом критической точки. В следующем параграфе мы приведем более аккуратное определение индекса критической точки. Резюмируя, мы заключаем: M^b получается из M^a приклеиванием одной клетки размерности λ , если множество $f^{-1}[a, b]$ содержит одну критическую точку индекса λ функции f .

Упражнение

Проведите аналогичный анализ эволюции многообразия $M^a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$ в случае, когда M является ориентированной поверхностью рода 2 (кренделем), вложенным в \mathbb{R}^3 , как показано на рис. 3.7, а функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ определяется той же формулой $f(x, y, z) = z$.

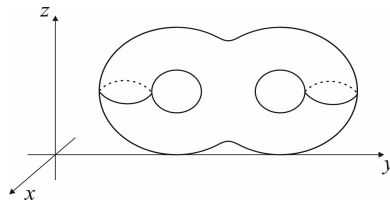


Рис. 3.7. Функция высоты на кренделе

3.2. Невырожденные критические точки гладкой функции

Сначала напомним некоторые понятия и факты из теории квадратичных форм.

Пусть V — конечномерное действительное векторное пространство. *Билинейной симметричной формой* на V называется функция $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая $B(x, y) = B(y, x)$ и $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$ для $x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Функция $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = B(x, x)$ называется *квадратичной формой*, соответствующей форме B . Билинейная симметричная форма однозначно определяется своей квадратичной формой, поэтому их часто отождествляют.

Для билинейной симметричной формы B на V множество $N = \{x \in V \mid B(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in V\}$ является подпространством векторного пространства V . Это подпространство называется *нулевым пространством* формы B , а его размерность называется *степенью вырождения* формы B . Если $N = 0$, то говорим, что форма B невырождена.

Говорим, что билинейная симметричная форма B (или соответствующая квадратичная форма Q) *отрицательно определена* на векторном подпространстве $W \subset V$, если $Q(x) < 0$ для всех $0 \neq x \in W$. Максимальная из размерностей подпространств, на которых форма отрицательно определена, называется *индексом* квадратичной формы (или билинейной симметричной формы).

Теперь посмотрим, как квадратичные формы выглядят в координатах. Пусть B — симметричная билинейная форма на V . Выберем базис (e_1, \dots, e_n) в V и обозначим $b_{ij} = b_{ji} = B(e_i, e_j)$. Используя билинейность, получаем для $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j, \quad Q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j.$$

Симметричная матрица $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ называется матрицей квадратичной формы Q относительно данного базиса. Ранг r этой матрицы не зависит от выбора базиса и связан со степенью вырождения d формы B равенством $r = n - d$. Основным фактом теории квадратичных форм является теорема о возможности приведения формы к каноническому виду: для любой квадратичной формы Q на векторном пространстве V существует базис в V , относительно которого матрица формы Q имеет диагональный вид, причем каждый диагональный элемент равен ± 1 или 0 , т.е.

$$Q(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_r^2.$$

Такой базис не единствен. Но пара чисел $(\lambda, r - \lambda)$, называемая *сигнатурой* квадратичной формы, не зависит от способа приведения формы

к каноническому виду. Последний факт известен под названием “закон инерции” для квадратичных форм. Можно доказать, что λ совпадает с индексом квадратичной формы. Ниже мы докажем этот факт для невырожденных форм.

Возвращаемся к изучению критических точек гладких функций на многообразиях. Напомним, что $p \in M$ является критической точкой гладкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, если $d_p f = 0$, т. е. если $Xf = 0$ для любого вектора $X \in T_p M$. В координатах это выражается равенствами $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ ($1 \leq i \leq n$), где (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты, определенные в некоторой окрестности точки p .

Определение 3.2.1. Критическая точка $p \in M$ функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется невырожденной критической точкой, если матрица вторых частных производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j=1}^n \quad (3.2.1)$$

невырождена. Здесь (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты, определенные в некоторой окрестности точки p .

Это определение нуждается в проверке корректности: надо установить, что невырожденность матрицы вторых производных не зависит от выбора координат. Мы докажем это косвенно, инвариантно определив некоторую билинейную симметричную форму на $T_p M$ и убедившись, что матрица этой формы относительно координатного базиса совпадает с (3.2.1).

Итак, пусть $p \in M$ — критическая точка функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Определим билинейную симметричную форму $H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, называемую *гессианом* функции f в точке p . Для векторов $X, Y \in T_p M$ выберем векторные поля $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{V}(M)$, удовлетворяющие $\tilde{X}_p = X, \tilde{Y}_p = Y$, и положим

$$(H_p f)(X, Y) = \tilde{X}_p(\tilde{Y}(f)).$$

Мы должны доказать симметричность формы $H_p f$, а также корректность этого определения, т. е. независимость $(H_p f)(X, Y)$ от выбора векторных полей \tilde{X} и \tilde{Y} . Симметричность вытекает из того, что

$$\tilde{X}_p(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}_p(\tilde{X}(f)) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p(f) = 0,$$

где $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ — скобка Ли векторных полей \tilde{X} и \tilde{Y} . Равенство $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p(f) = 0$ выполняется, поскольку p — критическая точка функции f . Теперь корректность определения очевидна, так как левая часть равенства

$$\tilde{X}_p(\tilde{Y}(f)) = \tilde{Y}_p(\tilde{X}(f))$$

не зависит от выбора продолжения \tilde{X} вектора X , в то время как правая часть не зависит от выбора продолжения \tilde{Y} вектора Y .

Пусть $(U; x_1, \dots, x_n)$ — локальные координаты, определенные в окрестности точки p , и $X = \sum_i X_i \partial_i|_p$, $Y = \sum_j Y_j \partial_j|_p$. Мы можем продолжить Y до векторного поля \tilde{Y} на U , положив $\tilde{Y} = \sum_j Y_j \partial_j$ с постоянными коэффициентами Y_j . Тогда

$$(H_p f)(X, Y) = X(\tilde{Y}(f)) = X\left(\sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p).$$

Следовательно, матрица (3.2.1) является матрицей гессиана $H_p f$ относительно базиса $\partial_i|_p$.

Индекс критической точки p функции f определяется как индекс гессиана $H_p f$.

Отметим связь введенных понятий с некоторыми понятиями “Анализа”. Хорошо известно, что первый дифференциал

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i$$

функции $f(x_1, \dots, x_n)$ инвариантен относительно замены независимых переменных, т. е. не меняет своего вида при замене $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$ ($1 \leq i \leq n$). Именно эта инвариантность позволяет ввести дифференциал функции, определенной на многообразии. Но второй дифференциал

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) dx_i dx_j$$

в общем случае не обладает подобной инвариантностью. Однако имеется важный частный случай: если p — критическая точка функции f , то второй дифференциал функции f в точке p инвариантен относительно замены независимых переменных. Благодаря этому мы можем ввести понятие гессиана в критической точке.

Следующая важная теорема показывает, что поведение функции в окрестности невырожденной критической точки зависит лишь от индекса этой точки.

Теорема 3.2.2 (лемма Морса). Пусть $p \in M$ — невырожденная критическая точка гладкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Существует такая локальная система координат $(U; x_1, \dots, x_n)$, определенная в окрестности p , что $p = (0, \dots, 0)$ и в U справедливо представление

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2, \quad (3.2.2)$$

где λ — индекс точки p .

Доказательство. Покажем сначала, что если подобное представление для f существует, то λ есть обязательно индекс критической точки p . Из (3.2.2) находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \begin{cases} -2, & \text{если } i = j \leq \lambda, \\ 2, & \text{если } i = j > \lambda, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, матрица гессиана $H_p f$ относительно координатного базиса $(\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p)$ имеет диагональный вид (нули вне диагонали)

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через V векторное подпространство в $T_p M$, натянутое на векторы $(\partial_1|_p, \dots, \partial_\lambda|_p)$, а через W — подпространство, натянутое на $(\partial_{\lambda+1}|_p, \dots, \partial_n|_p)$. Гессиан $H_p f$ отрицательно определен на λ -мерном подпространстве V и, следовательно, индекс критической точки p не меньше, чем λ . Если бы $T_p M$ имело подпространство размерности большей, чем λ , на котором гессиан отрицательно определен, то это

подпространство имело бы ненулевое пересечение с W , на котором гессиан положительно определен. Полученное противоречие доказывает, что индекс точки p есть в точности λ , поскольку квадратичная форма не может быть одновременно положительно определена и отрицательно определена на ненулевом подпространстве.

Теперь доказываем существование локальных координат, в которых справедливо представление (3.2.2). Без ограничения общности можно считать, что $f(p) = 0$. Пусть сначала $(U; x_1, \dots, x_n)$ — произвольная система координат, определенная в окрестности p , такая, что $p = (0, \dots, 0)$. Применяя лемму 2.4.4, представим f в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2.3)$$

где g_j — гладкие в U функции, удовлетворяющие $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$; последнее равенство справедливо, поскольку $p = 0$ есть критическая точка функции f . Применяя ту же лемму 2.4.4, представляем каждую из функций g_j в виде

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2.4)$$

где h_{ij} — гладкие функции в U , удовлетворяющие $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$. Подставляя (3.2.4) в (3.2.3), имеем

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.5)$$

Без ограничения общности можно считать, что $h_{ij} = h_{ji}$. Действительно, в противном случае мы можем определить новые коэффициенты $\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, удовлетворяющие $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$ и $f = \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{h}_{ij}$.

Матрица $(h_{ij}(0))$ совпадает с $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ и потому невырождена.

Дальнейшие наши рассуждения имеют много общего с известной процедурой приведения квадратичной формы к каноническому виду, состоящей в многократном применении известного из школьного курса алгебры приема, называемого выделением полного квадрата.

Индукцией по r доказываем, что в некоторой окрестности точки p существует такая система координат $(U_r; y_1, \dots, y_n)$, что в этих координатах $p = (0, \dots, 0)$ и

$$f(y_1, \dots, y_n) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{r-1}^2 + \sum_{i,j=r}^n y_i y_j H_{ij}(y_1, \dots, y_n) \quad (3.2.6)$$

с симметричной матрицей $(H_{ij}(y_1, \dots, y_n))$. При $r = 1$ это совпадает с (3.2.5), а при $r = n + 1$ дает утверждение теоремы.

Предположив справедливость (3.2.6) для некоторого r , сделаем индуктивный шаг. Матрица $(H_{ij}(0))_{i,j=r}^n$ невырождена, поскольку $p = 0$ — невырожденная критическая точка. Путем линейного преобразования последних $n - r$ переменных можно добиться, чтобы $H_{rr}(0) \neq 0$ (Если хотя бы один диагональный элемент матрицы $(H_{ij}(0))_{i,j=r}^n$ отличен от нуля, то мы просто перенумеруем переменные. Если же все диагональные элементы этой матрицы равны нулю, но, например, $H_{r,r+1}(0) \neq 0$, то мы делаем замену $\tilde{y}_r = y_r + y_{r+1}$, $\tilde{y}_{r+1} = y_r - y_{r+1}$.) Уменьшив область U_r , добиваемся того, чтобы функция H_{rr} была отлична от нуля во всей области U_r . Тогда $g(y_1, \dots, y_n) = \sqrt{|H_{rr}(y_1, \dots, y_n)|}$ является гладкой функцией в U_r и $H_{rr} = \pm g^2$.

Преобразуем сумму из правой части равенства (3.2.6), выделяя из нее зависящие от y_r слагаемые (для краткости аргументы не указаны явно, но подразумевается, что все коэффициенты зависят от (y_1, \dots, y_n)):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=r}^n H_{ij} y_i y_j &= H_{rr} y_r^2 + 2y_r \sum_{i=r+1}^n H_{ri} y_i + \sum_{i,j=r+1}^n H_{ij} y_i y_j \\ &= \pm \left(g^2 y_r^2 + 2g y_r \sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{\pm g} y_i \right) + \sum_{i,j=r+1}^n H_{ij} y_i y_j. \end{aligned}$$

Выделяем полный квадрат

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=r}^n H_{ij} y_i y_j &= \pm \left[g^2 y_r^2 + 2g y_r \sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{\pm g} y_i + \left(\sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{g} y_i \right)^2 \right] \\ &\mp \left(\sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{g} y_i \right)^2 + \sum_{i,j=r+1}^n H_{ij} y_i y_j. \end{aligned}$$

Объединив две последние суммы, записываем результат в виде

$$\sum_{i,j=r}^n H_{ij} y_i y_j = \pm \left(g y_r + \sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{\pm g} y_i \right)^2 + \sum_{i,j=r+1}^n H'_{ij} y_i y_j,$$

где $H'_{ij} = H'_{ij}(y_1, \dots, y_n)$ — некоторые новые коэффициенты. Подставим это выражение в (3.2.6)

$$f(y_1, \dots, y_n) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{r-1}^2 \pm \left(g y_r + \sum_{i=r+1}^n \frac{H_{ri}}{\pm g} y_i \right)^2 + \sum_{i,j=r+1}^n H'_{ij} y_i y_j. \quad (3.2.7)$$

Теперь вводим новые координаты (x_1, \dots, x_n) , полагая $x_i = y_i$ при $i \neq r$ и

$$x_r = y_r g(y_1, \dots, y_n) + \sum_{i=r+1}^n y_i \frac{H_{ri}(y_1, \dots, y_n)}{\pm g(y_1, \dots, y_n)}.$$

Якобиан этой замены в точке p равен $g(0) \neq 0$ и, следовательно, по теореме об обратной функции, переменные (x_1, \dots, x_n) могут служить координатами в некоторой окрестности U_{r+1} точки p . В новых координатах (3.2.7) выглядит так:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^n x_i x_j H'_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

Тем самым шаг индукции завершен. □

Следствие 3.2.3. *Невырожденные критические точки гладкой функции изолированы.*

В заключение параграфа заметим, что поведение функции вблизи вырожденной критической точки может быть весьма разнообразным и никакого утверждения, подобного теореме 3.2.2, не существует для вырожденных критических точек. Приведем лишь один одномерный пример. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенством $f(x) = e^{-1/x^2} \sin(1/x)$, гладкая. Нуль является вырожденной критической точкой этой функции. В любой окрестности нуля есть бесконечно много других критических точек этой функции.

3.3. Строение многообразия вдали от критических точек

Для функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ и для $a \in \mathbb{R}$ мы используем обозначение $M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$. Если a есть регулярное значение функции f , то M^a есть многообразие с краем $f^{-1}(a)$, см. предложение 2.9.2.

Теорема 3.3.1. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая действительная функция на гладком многообразии. Пусть числа $a < b$ таковы, что множество $f^{-1}[a, b]$ компактно и не содержит критических точек функции f . Тогда

1) M^a диффеоморфно M^b , а $f^{-1}[a, b]$ диффеоморфно произведению $f^{-1}(a) \times [0, 1]$;

2) M^a есть деформационный ретракт множества M^b , так что включение $M^a \subset M^b$ есть гомотопическая эквивалентность.

Доказательство. Идея доказательства состоит в ретрагировании M^b на M^a вдоль градиентных линий функции f (рис. 3.8).

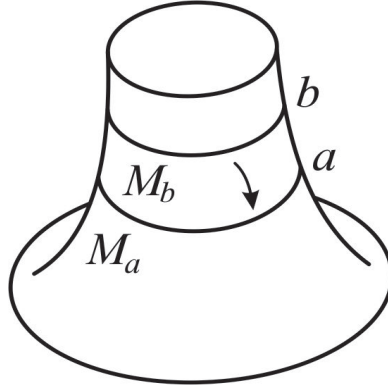


Рис. 3.8. Ретрагирование вдоль градиентных линий

Выберем на M риманову метрику. Заметим, что градиент ∇f функции f обращается в нуль в точности в критических точках f ; как видно из формулы $\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j$, доказанной в последнем параграфе главы 2. Согласно определению градиента, для параметризованной кривой $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ с касательным вектором $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ справедливо

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \nabla f \right\rangle = \frac{d\gamma}{dt} f = \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение во введенной римановой метрике.

Выберем такую гладкую функцию $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$, что а) $\rho = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$ на множестве $f^{-1}[a, b]$ и б) $\rho = 0$ вне некоторой компактной окрестности множества $f^{-1}[a, b]$. Теперь определим векторное поле X на M , положив

$$X = \rho \nabla f.$$

Это — гладкое векторное поле с компактным носителем. Согласно предложению 2.5.2, X порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований $\varphi_X^t : M \rightarrow M$. Для каждой точки $p \in M$ кривая $t \mapsto \varphi_X^t(p)$ есть интегральная кривая поля X , т. е.

$$\frac{d(\varphi_X^t(p))}{dt} = X(\varphi_X^t(p)).$$

Зафиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим функцию

$$t \mapsto f(\varphi_X^t(p)).$$

Если точка $\varphi_X^t(p)$ принадлежит $f^{-1}[a, b]$, то

$$\frac{d(f(\varphi_X^t(p)))}{dt} = \left\langle \frac{d\varphi_X^t(p)}{dt}, \nabla f \right\rangle = \langle X, \nabla f \rangle = \left\langle \frac{\nabla f}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}, \nabla f \right\rangle = +1.$$

Итак, функция $t \mapsto f(\varphi_X^t(p))$ линейна с производной $+1$, пока $f(\varphi_X^t(p))$ лежит между a и b .

Рассмотрим диффеоморфизм $\varphi_X^{b-a} : M \rightarrow M$. Он отображает M^a диффеоморфно на M^b , как с очевидностью следует из утверждения предыдущего абзаца. Кроме того, отображение $(p, t) \mapsto \varphi_X^t(p)$ есть диффеоморфизм произведения $f^{-1}(a) \times [0, b-a]$ на $f^{-1}[a, b]$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, определим $r_t : M^b \rightarrow M^b$, полагая

$$r_t(p) = \begin{cases} p, & \text{если } f(p) \leq a, \\ \varphi_X^{t(a-f(p))}(p), & \text{если } a \leq f(p) \leq b. \end{cases}$$

Очевидно, что r_0 есть тождественное отображение, а r_1 является ре-тракцией M^b на M^a . \square

Замечание. Условие компактности множества $f^{-1}[a, b]$ нельзя отбросить. Действительно, выбросим из M одну точку, принадлежащую $f^{-1}(a, b)$. Остальные условия теоремы не нарушатся, а все утверждения теоремы перестанут быть верными.

3.4. Строение многообразия вблизи невырожденной критической точки

Этот параграф — центральный в настоящей главе.

Теорема 3.4.1. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая действительная функция на гладком многообразии, $p \in M$ — невырожденная критическая точка индекса λ функции f , $a = f(p)$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ компактно и не содержит других, отличных от p , критических точек функции f . Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество $M^{a+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип множества $M^{a-\varepsilon}$ с приклеенной клеткой размерности λ , т. е.

$$M^{a+\varepsilon} \sim M^{a-\varepsilon} \cup_{\varphi} c^{\lambda}, \quad \text{где } \varphi : c^{\lambda} \rightarrow M^{a-\varepsilon}.$$

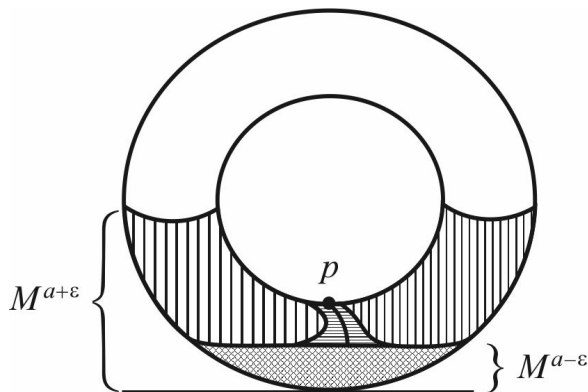


Рис. 3.9. Иллюстрация к доказательству теоремы 3.4.1

Прежде чем начать доказательство, поясним его схему. Мы введем новую функцию $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающую с f всюду кроме малой окрестности точки p , где $F < f$. Тогда область $F^{-1}(-\infty, a - \varepsilon]$ будет состоять из $M^{a-\varepsilon}$ и из маленькой области H , лежащей в окрестности точки p (на рис. 3.9 H заштрихована горизонтально). Выбрав клетку $c^{\lambda} \subset H$, мы убедимся, что $M^{a-\varepsilon} \cup c^{\lambda}$ есть деформационный ретракт множества $M^{a-\varepsilon} \cup H$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = f(p) = 0$. Согласно лемме Морса, существует такая локальная система координат $(U; x_1, \dots, x_n)$ на M , что $p = (0, \dots, 0) \in U$ и в U

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2. \quad (3.4.1)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что 1) область $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ компактна и не содержит других, отличных от p , критических точек функции f и 2) образ U при координатном отображении $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ содержит диск $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 2\varepsilon\}$. Определим клетку c^λ так:

$$c^\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \varepsilon, x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Рассматриваемая ситуация схематически изображена на рис. 3.10, где множество $M^{-\varepsilon}$ закрашено, а клетка c^λ изображена жирным отрезком. Отметим, что $c^\lambda \cap M^{-\varepsilon} = \dot{c}^\lambda$, т. е. клетка правильно приклеена к $M^{-\varepsilon}$.

Введем вспомогательную гладкую функцию $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям (рис. 3.11):

$$\begin{cases} \mu(0) > \varepsilon, \\ \mu(r) = 0 & \text{при } r \geq 2\varepsilon, \\ -1 < \mu'(r) \leq 0 & \text{при всех } r. \end{cases}$$

Удобно также ввести две функции $\xi, \eta : U \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\xi = x_1^2 + \dots + x_\lambda^2, \quad \eta = x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Тогда (3.4.1) переписывается так:

$$f = -\xi + \eta.$$

Определяем новую функцию $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$F = \begin{cases} f & \text{вне } U, \\ f - \mu(\xi + 2\eta) & \text{в } U. \end{cases}$$

Легко видеть, что F — корректно определенная гладкая функция.

Утверждение 1. Множество $F^{-1}(-\infty, \varepsilon]$ совпадает с M^ε .

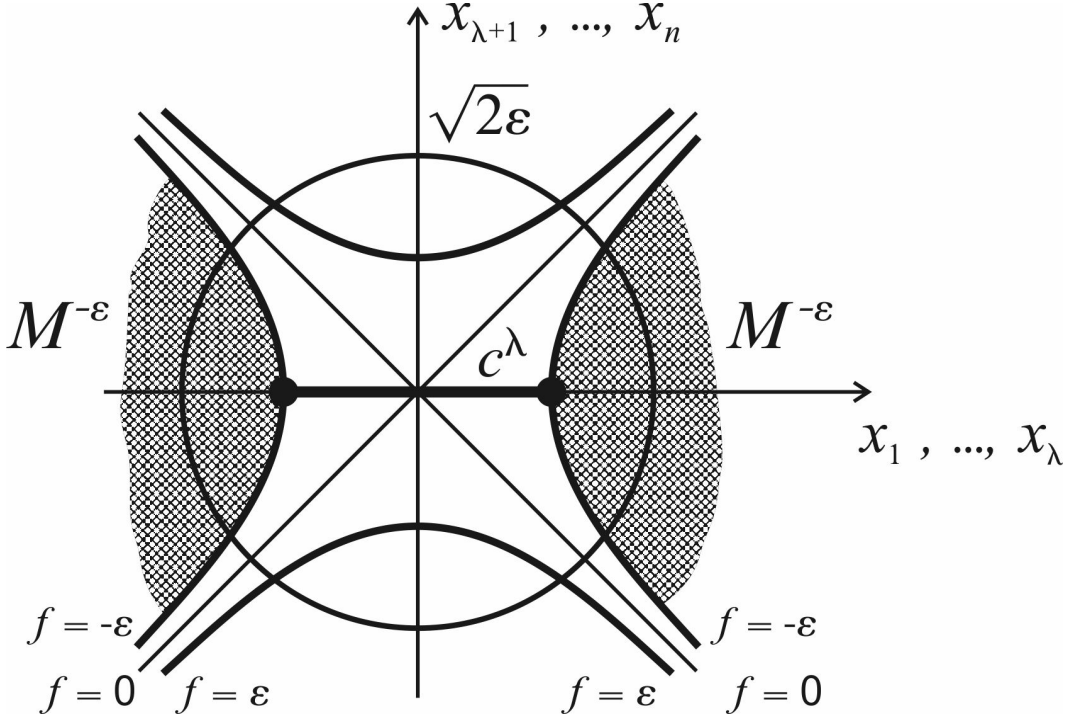


Рис. 3.10. Функция $f = \xi - \eta$ вблизи нуля

Доказательство. Вне эллипсоида $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ функции f и F совпадают. Внутри эллипсоида

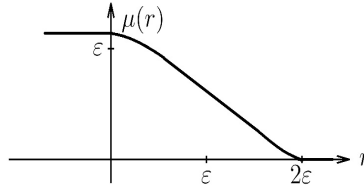
$$F \leq f = -\xi + \eta \leq \frac{1}{2}\xi + \eta \leq \varepsilon.$$

□

Утверждение 2. Критические точки функции F совпадают с критическими точками функции f .

Доказательство. Дифференцируя равенство $F = -\xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1. \end{aligned}$$

Рис. 3.11. Функция μ

Используя цепное правило, имеем

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta = 2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\lambda \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \frac{\partial F}{\partial \eta} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x_{\lambda+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

где мы представили дифференциалы $d\xi$ и $d\eta$ их матрицами Якоби. Как мы только что убедились, производные $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ отличны от нуля во всех точках области U . Поэтому правая часть последней формулы обращается в нуль только в начале координат. \square

Утверждение 3. Область $F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ есть деформационный ре-тракт множества M^ε .

Доказательство. Рассмотрим область $F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$. Из утверждения 1 и неравенства $F \leq f$ следует, что

$$F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] \subset f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon].$$

Следовательно, область $F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ компактна. Она не содержит критических точек функции F , отличных от p . Но

$$F(p) = -\mu(0) < -\varepsilon.$$

Следовательно, область $F^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ вовсе не содержит критических точек функции F . Применяя к функции F теорему 3.3.1, убеждаемся,

что $F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ есть деформационный ретракт множества

$$F^{-1}(-\infty, +\varepsilon] = M^\varepsilon.$$

□

Удобно представить $F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ в виде

$$F^{-1}(-\infty, -\varepsilon] = M^{-\varepsilon} \cup H,$$

где $H = \overline{F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]} \setminus M^{-\varepsilon}$ (рис. 3.12). В терминологии Смейла область H называется *ручкой*. Заметим, что клетка $c^\lambda = \{x \mid \xi(x) \leq \varepsilon, \eta(x) = 0\}$ содержится в H . Действительно, так как $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$, то при $x \in c^\lambda$

$$F(x) \leq F(0) < -\varepsilon, \quad \text{но} \quad f(x) \geq -\varepsilon.$$

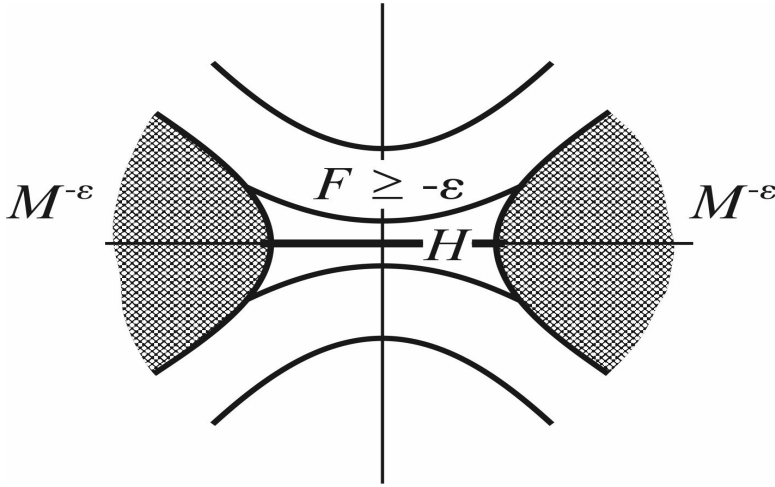


Рис. 3.12. Ручка H

Утверждение 4. Множество $M^{-\varepsilon} \cup c^\lambda$ есть деформационный ретракт области $M^{-\varepsilon} \cup H = F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$.

Доказательство. Деформационная ретракция

$$r_t : M^{-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{-\varepsilon} \cup H$$

изображена на рис. 3.13 вертикальными стрелками. В соответствии с рисунком будем различать три случая.

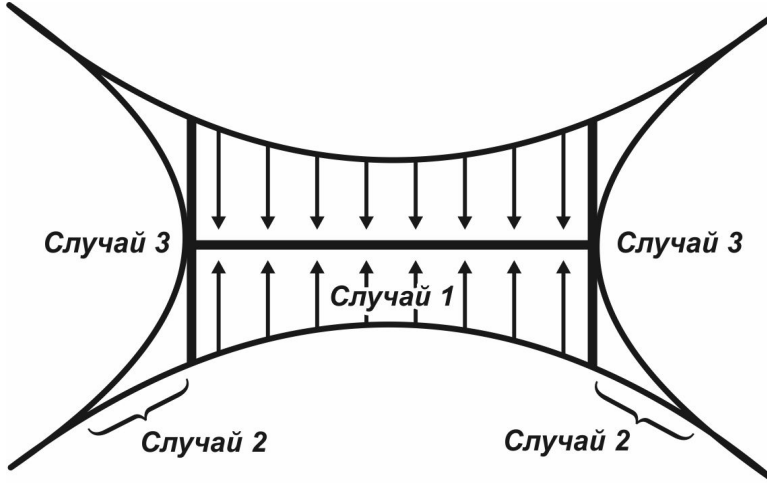


Рис. 3.13. Деформационная ретракция множества $M^{-\varepsilon} \cup H$ на $M^{-\varepsilon} \cup c^\lambda$

Случай 1. В области $\xi \leq \varepsilon$ определим

$$r_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_\lambda, tx_{\lambda+1}, \dots, tx_n).$$

Очевидно, что $r_1 = I$ (тождественное отображение), а r_0 отображает область на c^λ . То, что каждое r_t отображает область $F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ на себя, следует из неравенства $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$.

Случай 2. В области $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$ полагаем

$$r_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_\lambda, s_t x_{\lambda+1}, \dots, s_t x_n),$$

где

$$s_t = t + (1 - t) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}}.$$

Опять $r_1 = I$, а r_0 отображает область в гиперповерхность $f^{-1}(-\varepsilon)$. Заметим, что функции $s_t x_i$ остаются непрерывными при $\xi \rightarrow \varepsilon, \eta \rightarrow 0$. При $\xi = \varepsilon$ это определение совпадает со случаем 1.

Случай 3. В области $\eta + \varepsilon \leq \xi$ (т.е. в $M^{-\varepsilon}$) полагаем $r_t = I$. Это согласуется с предыдущим случаем при $\xi = \eta + \varepsilon$. \square

Итак, мы доказали, что

а) $M^{-\varepsilon} \cup c^\lambda$ есть деформационный ретракт множества $M^{-\varepsilon} \cup H = F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ (утверждение 4).

б) $F^{-1}(-\infty, -\varepsilon]$ есть деформационный ретракт множества M^ε (утверждение 3).

Комбинируя эти два утверждения, получаем: $M^{-\varepsilon} \cup c^\lambda$ есть деформационный ретракт множества M^ε . Теорема 3.4.1 доказана. \square

Замечание. Предположим, что $f^{-1}(a)$ содержит несколько невырожденных критических точек функции f и выполнены остальные условия теоремы 3.4.1. Компактное множество $f^{-1}(a)$ содержит лишь конечное число критических точек, поскольку невырожденные критические точки изолированы, согласно следствию 3.2.3. Пусть p_1, \dots, p_k — все критические точки, принадлежащие $f^{-1}(a)$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — их индексы. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множество $M^{a+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип $M^{a-\varepsilon} \cup c^{\lambda_1} \cup \dots \cup c^{\lambda_k}$. Доказательство не меняется, поскольку все конструкции в доказательстве теоремы 3.4.1 производились в малой окрестности невырожденной критической точки.

Упражнение

Докажите, что в условиях теоремы 3.4.1 множество M^a есть деформационный ретракт множества $M^{a+\varepsilon}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

3.5. Теорема Морса

Функцией Морса на гладком многообразии M называется гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, все критические точки которой невырождены.

Теорема 3.5.1 (теорема Морса для компактных многообразий). *Если $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на компактном гладком многообразии, то M имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса, в котором каждой критической точке индекса λ функции f соответствует одна клетка размерности λ .*

Доказательство. В силу следствия 3.2.3 f имеет конечное число критических точек. Предположив для простоты, что значения функции f в различных критических точках различны, упорядочим критические точки p_1, \dots, p_k функции f так, что $a_{i-1} = f(p_{i-1}) < f(p_i) = a_i$ ($2 \leq i \leq k$). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — индексы критических точек. В частности, p_1

— точка минимума, а p_k — точка максимума f . Множество M^a пусто при $a < a_1$ и $M^a = M$ при $a > a_k$.

Выберем малое $\varepsilon > 0$ и будем доказывать индукцией по i , что
(*) $M^{a_i+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса K_i , имеющего по одной клетке размерности λ_j для всех $1 \leq j \leq i$.

При $i = k$ это дает утверждение теоремы. Если мы положим $a_0 = a_1 - 1$, то утверждение (*) справедливо при $i = 0$ поскольку $M^{a_0+\varepsilon} = \emptyset$. Предположив справедливость утверждения (*) для некоторого i , докажем его для $i + 1$.

В области $f^{-1}[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon]$ нет критических точек функции f . Применяя теорему 3.3.1, получаем гомотопическую эквивалентность

$$M^{a_{i+1}-\varepsilon} \sim M^{a_i+\varepsilon} \sim K_i. \quad (3.5.1)$$

Согласно теореме 3.4.1,

$$M^{a_{i+1}+\varepsilon} \sim M^{a_{i+1}-\varepsilon} \cup_{\varphi} c^{\lambda_{i+1}}, \quad \text{где } \varphi : c^{\lambda_{i+1}} \rightarrow M^{a_{i+1}-\varepsilon}. \quad (3.5.2)$$

Из (3.5.1) и (3.5.2) с помощью теорем 1.9.1 и 1.9.2 главы 1 следует, что $M^{a_{i+1}+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса K_{i+1} , у которого число клеток размерности λ_{i+1} на единицу больше, чем у K_i , а числа клеток других размерностей такие же, как у K_i . Это завершает шаг индукции.

Тем самым теорема доказана в предположении, что значения функции f в различных критических точках различны. В общем случае доказательство остается почти без изменений с учетом замечания, приведенного в конце предыдущего параграфа. \square

В случае некомпактного многообразия мы должны дополнительно потребовать компактность M^a при всех a , поскольку подобное условие присутствует как в теореме 3.3.1, так и в теореме 3.4.1.

Теорема 3.5.2 (теорема Морса). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на гладком многообразии с конечным числом критических точек. Предположим, что множество $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ компактно для любого $a \in \mathbb{R}$. Тогда M имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса, в котором каждой критической точке индекса λ функции f соответствует одна клетка размерности λ .

Доказательство. Выберем $a \in \mathbb{R}$ большее, чем значение функции f в любой критической точке. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.5.1 с использованием компактности множеств $f^{-1}[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon]$ и $f^{-1}[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$, убедимся, что M^a имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса K , в котором каждой критической точке индекса λ функции f соответствует одна клетка размерности λ .

Множество $f^{-1}[a, \infty)$ не содержит критических точек функции f . Согласно теореме 3.3.1, многообразие M^b диффеоморфно M^a для любого $b > a$, а компактное множество $f^{-1}[b, c]$ диффеоморфно цилиндру $f^{-1}(a) \times [b, c]$ для любых $a \leq b < c$. Представим $f^{-1}[a, \infty)$ в виде объединения

$$f^{-1}[a, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-1}[a+i, a+i+1].$$

Поскольку каждое $f^{-1}[a+i, a+i+1]$ диффеоморфно цилиндру $f^{-1}(a) \times [a+i, a+i+1]$, то и $f^{-1}[a, \infty)$ диффеоморфно цилиндру $f^{-1}(a) \times [a, \infty)$.

Многообразие M получается из объединения множества M^a с цилиндром $f^{-1}(a) \times [a, \infty)$ путем отождествления точек $p \in f^{-1}(a)$ и (p, a) . Очевидно, такое приклеивание цилиндра не меняет гомотопического типа множества M^a , т.е. $M \sim M^a$. Вместе с гомотопической эквивалентностью $M^a \sim K$ это дает утверждение теоремы. \square

В теореме 3.5.2 условие конечности числа критических точек наложено лишь потому, что мы еще не определили понятие *бесконечно-го* клеточного комплекса. Если правильно определить это понятие, то условие конечности числа критических точек может быть отброшено. Мы еще вернемся к этому вопросу в главе 6, где бесконечные клеточные комплексы появятся необходимым образом.

В заключение параграфа обсудим вопрос о существовании функции Морса. Справедлива следующая

Теорема 3.5.3. *На любом гладком многообразии существует функция Морса.*

Из теорем 3.5.1 и 3.5.3 вытекает важное утверждение: любое компактное многообразие имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса.

Я не привожу здесь доказательства теоремы 3.5.3, ограничившись лишь обсуждением схемы одного из возможных доказательств, которое полностью приведено в §6 главы 1 книги [10].

В силу теоремы Уитни (теорема 2.8.1), достаточно рассмотреть случай, когда M есть подмногообразие в \mathbb{R}^N , причем значение N не играет роли. Фиксируем точку $p \in \mathbb{R}^N \setminus M$ и определим функцию $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $f_p(q) = \|q - p\|$. Как легко видеть, $q \in M$ является критической точкой функции f_p тогда и только тогда, когда касательное пространство $T_q M \subset \mathbb{R}^N$ ортогонально вектору $p - q$. Гораздо деликатнее следующий вопрос: в каком случае такая $q \in M$ является невырожденной критической точкой функции f_p ? Ответ звучит следующим образом: $q \in M$ есть вырожденная критическая точка функции f_p тогда и только тогда, когда p есть *фокальная точка* для (M, q) . Строгое определение фокальной точки можно дать в терминах второй квадратичной формы подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^N$, которая вполне аналогична изучаемой в дифференциальной геометрии второй квадратичной форме поверхности. Менее формальное представление о фокальных точках можно получить, вспомнив известное в оптике понятие фокуса сферического зеркала или линзы. Далее оказывается, что множество фокальных точек подмногообразия в \mathbb{R}^N совпадает с множеством критических значений некоторого гладкого отображения $F : NM \rightarrow \mathbb{R}^N$, где NM — нормальное расслоение подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^N$. Применяя теорему Сарда, убеждаемся, что f_p является функцией Морса для почти всех $p \in \mathbb{R}^N \setminus M$.

Теорема 3.5.3 может быть усилена. На самом деле вырожденные критические точки являются скорее исключением, чем правилом. В определенном смысле “почти все” гладкие функции являются функциями Морса. Один из возможных вариантов такого усиления звучит так.

Теорема 3.5.4. *Для любой непрерывной функции $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком многообразии и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция Морса $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in M.$$

Доказательство этой теоремы требует привлечения иных подходов, чем упомянутое выше доказательство теоремы 3.5.3. Я ограничусь

здесь лишь следующим элементарным примером. Точка $x = 0$ есть вырожденная критическая точка функции $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Для малого $\varepsilon > 0$ функция $f(x) = x^3 - \varepsilon x$ близка к g на любом сегменте $[-a, a]$ и имеет две невырожденные критические точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon/3}$, близкие к нулю. Это наблюдение можно резюмировать так: посредством малого изменения функции вырожденную критическую точку можно превратить в пару близких невырожденных критических точек. Теорема 3.5.4 утверждает, что и в общем случае ситуация аналогична рассмотренному примеру.

3.6. Неравенства Морса

Напомним (см. §1.8), что топологическое пространство X называется полиэдром, если его можно реализовать в виде конечного клеточного комплекса K . Пусть n — размерность этого комплекса, которая определяется как максимальная из размерностей входящих в него клеток, и m_i ($0 \leq i \leq n$) — число клеток размерности i в комплексе K . Эйлерова характеристика полиэдра

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$$

не зависит от выбора комплекса K , реализующего данный полиэдр. Из теоремы 3.5.1 немедленно следует

Теорема 3.6.1 (равенство Морса). *Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на гладком компактном n -мерном многообразии. Обозначим через $r_\lambda(f)$ ($0 \leq \lambda \leq n$) число критических точек индекса λ функции f . Тогда*

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda r_\lambda(f). \quad (3.6.1)$$

На самом деле Морс получил серию неравенств, связывающих числа $r_\lambda(f)$ с так называемыми числами Бетти $\beta_\lambda(M)$ многообразия M . Определение чисел Бетти приведено в следующем параграфе. Равенство (3.6.1) является весьма частным следствием неравенств Морса.

Теорема 3.6.2 (неравенства Морса). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на гладком компактном n -мерном многообразии. Обозначим через $r_\lambda(f)$ ($0 \leq \lambda \leq n$) число критических точек индекса λ функции f . Тогда

- 1 (слабые неравенства Морса). $\beta_\lambda(M) \leq r_\lambda(f)$ для всех $0 \leq \lambda \leq n$.
- 2 (сильные неравенства Морса). Для каждого $0 \leq \lambda \leq n$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \beta_\lambda(M) - \beta_{\lambda-1}(M) + \beta_{\lambda-2}(M) - \cdots \pm \beta_0(M) \leq \\ \leq r_\lambda(f) - r_{\lambda-1}(f) + r_{\lambda-2}(f) - \cdots \pm r_0(f). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

- 3 (равенство Морса).

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda r_\lambda(f).$$

Доказательство этой теоремы приведено в следующем параграфе. Сейчас мы лишь отметим, что утверждения 1 и 3 этой теоремы вытекают из утверждения 2. Действительно, написав сильные неравенства Морса для $\lambda = k$ и для $\lambda = k - 1$ и сложив эти два неравенства, мы получим слабое неравенство Морса для $\lambda = k$. Равенство Морса 3.6.1 формально вытекает из двух сильных неравенств Морса, написанных для $\lambda = n$ и $\lambda = n + 1$.

Упражнение

Какое минимальное число критических точек может иметь функция Морса на двумерном торе? Тот же вопрос для ориентируемой поверхности рода 2.

3.7. Группы гомологий и числа Бетти

Указанные в заголовке этого параграфа понятия относятся к алгебраической топологии. Алгебраическая топология остается вне рамок нашего курса, и мы не предполагаем у читателя знания этой дисциплины. Настоящий параграф является исключением из этого правила. Чтобы читатель по достоинству оценил неравенства Морса и научился использовать их, в этом параграфе приводятся определения (целочисленных) групп гомологий и чисел Бетти компактного многообразия.

Параграф завершается доказательством теоремы 3.6.2. Содержание настоящего параграфа следует скорее понимать как неформальное пояснение, чем как строгое изложение. Для более полного знакомства с этими понятиями нужно прослушать курс алгебраической топологии или почитать какой-нибудь учебник, например [20] или [21].

Сначала мы вкратце обсудим так называемые *симплициальные* гомологии в применении к компактным топологическим многообразиям. Этот вариант теории гомологий сравнительно прост для усвоения ввиду своей наглядности.

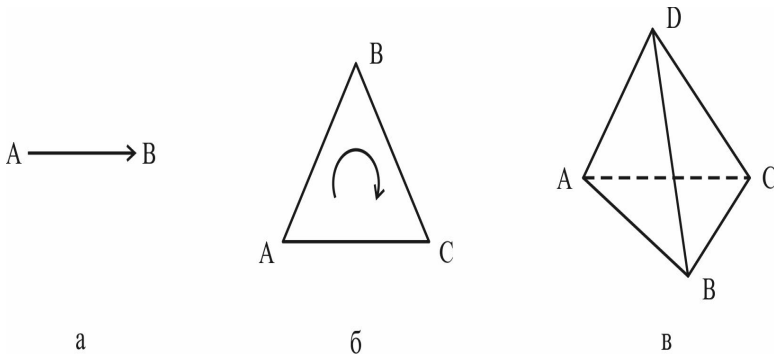


Рис. 3.14. Симплексы размерностей 1, 2, 3

Начнем с совсем простых понятий. *Одномерным ориентированным симплексом* $s^1 = AB$ называется упорядоченная пара различных точек в евклидовом пространстве (рис. 3.14, а). *Границей* одномерного симплекса является формальная алгебраическая разность двух точек

$$\partial(AB) = B - A. \quad (3.7.1)$$

Двумерным симплексом назовем любой треугольник $s^2 = ABC$ на плоскости. Ориентация двумерного симплекса определяется путем упорядочивания его вершин (рис. 3.14, б). Например, $ABC = BCA$, но $ABC = -ACB$, т. е. считается, что $s_1^2 = -s_2^2$ для противоположно ориентированных симплексов $s_1^2 = ABC$ и $s_2^2 = ACB$. Граница двумерного ориентированного симплекса определяется как формальная алгебраическая сумма одномерных симплексов (сторон треугольника)

$$\partial(ABC) = AB + BC + CA. \quad (3.7.2)$$

Считая *граничный оператор* ∂ линейным, находим из (3.7.1) и (3.7.2)

$$\begin{aligned}\partial^2(ABC) &= \partial(AB + BC + CA) = \partial(AB) + \partial(BC) + \partial(CA) \\ &= B - A + C - B + A - C = 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial^2 = 0 \quad (3.7.3)$$

в двумерном случае. Рассмотрим также *трехмерный симплекс*, т. е. тетраэдр $s^3 = ABCD$ в \mathbb{R}^3 . Его граница состоит из четырех двумерных симплексов — граней тетраэдра. Если ориентировать s^3 , то каждая из граней снабжается индуцированной ориентацией подобно тому, как в §2.11 была определена индуцированная ориентация края ориентированного многообразия. Наглядно индуцированную ориентацию каждой грани тетраэдра можно пояснить следующим образом: вершины грани упорядочиваются по направлению движения часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, глядящего на тетраэдр со стороны этой грани. Таким образом, глядя на рис. 3.14, в, можем написать

$$\partial(ABCD) = ABC + ADB + ACD + BDC. \quad (3.7.4)$$

С помощью (3.7.2) отсюда выводим

$$\begin{aligned}\partial^2(ABCD) &= \partial(ABC) + \partial(ADB) + \partial(ACD) + \partial(BDC) \\ &= (AB + BC + CA) + (AD + DB + BA) \\ &\quad + (AC + CD + DA) + (BD + DC + CB) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (3.7.3) справедливо и в трехмерном случае. Вполне аналогично определяется k -мерный симплекс s^k как простейший выпуклый многогранник в \mathbb{R}^k , имеющий $(k+1)$ вершину, граница которого состоит из $(k+1)$ -го симплекса размерности k . Ориентировав s^k и снабдив каждый из граничных k -мерных симплексов индуцированной ориентацией, мы получим для ∂s^k формулу, аналогичную (3.7.4). Равенство (3.7.3) справедливо в любой размерности. Это равенство можно сформулировать в виде правила: “Граница границы равна нулю”.

Пусть M — компактное топологическое многообразие размерности n . Разобьем его на симплексы, т. е. представим M в виде объединения

$$M = \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{i=1}^{r_k} s_i^k, \quad (3.7.5)$$

где каждое множество s_i^k гомеоморфно стандартному k -мерному симплексу s^k . Такое разбиение называется *триангуляцией* многообразия M , если любые два различных k -мерных симплекса s_i^k и s_j^k ($i \neq j$) этого разбиения либо не пересекаются, либо $s_i^k \cap s_j^k = s_m^\ell$, где $\ell < k$ и $1 \leq m \leq r_\ell$. Можно доказать существование такой триангуляции для любого компактного многообразия. Ориентируем все симплексы выбранной триангуляции. Граница каждого симплекса s_i^k состоит из $(k+1)$ -го симплекса размерности $(k-1)$. С учетом выбранных ориентаций это можно записать в виде

$$\partial s_i^k = \sum_{j=1}^{r_{k-1}} \varepsilon_{ij}^k s_j^{k-1}, \quad (3.7.6)$$

где *коэффициенты инцидентности* ε_{ij}^k определяются правилом: 1) $\varepsilon_{ij}^k = 0$, если симплекс s_j^{k-1} не является гранью симплекса s_i^k ; 2) $\varepsilon_{ij}^k = 1$, если симплекс s_j^{k-1} является гранью симплекса s_i^k и выбранная ориентация симплекса s_j^{k-1} совпадает с ориентацией, индуцированной из s_i^k ; 3) $\varepsilon_{ij}^k = -1$, если симплекс s_j^{k-1} является гранью симплекса s_i^k и выбранная ориентация симплекса s_j^{k-1} противоположна ориентации, индуцированной из s_i^k .

Далее, зафиксировав триангуляцию (3.7.5) компактного n -мерного многообразия M , введем для каждого $k = 0, \dots, n$ свободную абелеву группу C_k , образующими которой являются ориентированные k -мерные симплексы $s_1^k, \dots, s_{r_k}^k$ триангуляции. Элементы этой группы называются *k -мерными цепями* (выбранной триангуляции). Каждая k -мерная цепь $c^k \in C_k$ есть формальная алгебраическая сумма

$$c^k = \alpha_1 s_1^k + \dots + \alpha_{r_k} s_{r_k}^k$$

с целыми коэффициентами. Например, правая часть равенства (3.7.6) является $(k-1)$ -мерной цепью, т. е. *граница k -мерного симплекса есть $(k-1)$ -мерная цепь*.

Будучи определенным формулой (3.7.6), отображение ∂ продолжается до гомоморфизма абелевых групп

$$\partial : C_k \rightarrow C_{k-1},$$

называемого *граничным оператором*. Таким образом, мы получаем последовательность абелевых групп, соединенных гомоморфизмами

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \rightarrow 0. \quad (3.7.7)$$

Отметим, что в диаграмме (3.7.7) одной и той же буквой ∂ обозначены разные гомоморфизмы. Иногда это приводит к путанице. Поэтому иногда диаграмму (3.7.7) рисуют в более подробной форме:

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0. \quad (3.7.8)$$

Основным свойством этой последовательности групп и соединяющих их гомоморфизмов является равенство $\partial^2 = 0$ (граница границы равна нулю). В терминах более подробной диаграммы (3.7.8) это свойство формулируется так: $\partial_{k-1}\partial_k = 0$. Это свойство непосредственно вытекает из равенства (3.7.3), в справедливости которого на стандартных симплексах мы убедились выше. Любая последовательность абелевых групп, соединенных гомоморфизмами ∂ , удовлетворяющими условию $\partial^2 = 0$, называется *цепным комплексом*.

Пусть C — цепной комплекс, изображенный на диаграмме (3.7.7) или (3.7.8). Для каждого k определим две важные подгруппы группы C_k . Подгруппа

$$Z_k = \text{Ker } \partial_k = \{z^k \in C_k \mid \partial z^k = 0\}$$

называется *группой k -мерных циклов*, а подгруппа

$$B_k = \text{Ran } \partial_{k+1} = \{b^k \in C_k \mid b^k = \partial c^{k+1} \text{ для некоторого } c^{k+1} \in C_{k+1}\}$$

называется *группой k -мерных грани*. Здесь $\text{Ker } \partial_k$ — ядро оператора ∂_k и $\text{Ran } \partial_{k+1}$ — образ оператора ∂_{k+1} (считается, что $\partial_0 = 0$ и $\partial_{n+1} = 0$). В силу равенства $\partial^2 = 0$, справедливо включение $B_k \subset Z_k$, и поэтому можно определить фактор-группу $H_k = Z_k/B_k$, которая называется *группой k -мерных гомологий* цепного комплекса C .

Рассмотрим цепной комплекс, полученный с помощью триангуляции компактного n -мерного топологического многообразия M . Элементы группы Z_k называются *k -мерными циклами* многообразия M . Говоря о k -мерном цикле, мы обычно представляем замкнутую (т. е.

без края) k -мерную поверхность в M , хотя такое представление не совсем точно (эта поверхность может иметь особенности). Говорят, что цикл $z^k \in Z_k$ *гомологичен нулю*, если $z^k \in B_k$, т.е. существует такая цепь $c_{k+1} \in C_{k+1}$, что $z^k = \partial c^{k+1}$. Геометрически это означает, что k -мерная поверхность z^k ограничивает кусок $(k+1)$ -мерной поверхности. Два цикла $z_1^k, z_2^k \in Z_k$ называются *гомологичными*, если цикл $z_1^k - z_2^k$ гомологичен нулю.

Основное утверждение о группах гомологий формулируется следующим образом.

Теорема 3.7.1. *Пусть M — компактное n -мерное топологическое многообразие. Группы гомологий цепного комплекса, полученного из триангуляции многообразия M , с точностью до изоморфизма не зависят от выбора триангуляции. Эти группы обозначаются $H_k(M)$ ($k = 0, \dots, n$) и называются группами (целочисленных) гомологий многообразия M .*

Доказательство этой теоремы идейно не сложно, но технически довольно громоздко. Мы обсудим лишь общую схему доказательства. Говорят, что триангуляция T' многообразия M является *измельчением* триангуляции T того же многообразия, если каждый симплекс триангуляции T является объединением некоторого числа симплексов триангуляции T' . Сначала устанавливается изоморфизм между группами гомологий двух цепных комплексов, полученных с помощью двух триангуляций многообразия M при условии, что одна из этих триангуляций является измельчением другой. Для построения этого изоморфизма привлекается полезное понятие *цепной гомотопии*, являющегося алгебраическим аналогом гомотопии между непрерывными отображениями. Пусть теперь T_1 и T_2 — две произвольные триангуляции многообразия M . Пошевелив немного триангуляцию T_2 , не меняя ее комбинаторной структуры, можно добиться, чтобы T_1 и T_2 находились в общем положении так, что существует триангуляция T' , являющаяся измельчением обеих триангуляций T_1 и T_2 . Теперь доказательство завершается очевидным образом.

Напомним, что любая конечно порожденная абелева группа G представима в виде

$$G = \mathbb{Z}^r \oplus \tilde{G},$$

где \tilde{G} — конечная группа, \mathbb{Z} — бесконечная циклическая группа (изоморфная группе целых чисел) и $\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (r слагаемых в правой части). Такое представление не единственно, но целое число $r \geq 0$, называемое *рангом* группы G и обозначаемое $\text{rank } G$, определяется однозначно. Понятие ранга абелевой группы вполне аналогично понятию размерности векторного пространства: ранг группы G можно определить как максимальное число линейно независимых элементов этой группы (конечное множество $\{g_1, \dots, g_k\}$ элементов группы G называется линейно независимым, если из равенства $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k = 0$ ($\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq k$) следует, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$). Группа \mathbb{Z}^r может быть охарактеризована как *свободная абелева группа ранга r* . Следующее утверждение вы сможете доказать самостоятельно или найти доказательство в главе 2 книги [9].

Предложение 3.7.2. *Всякая подгруппа A и фактор-группа G/A конечно порожденной абелевой группы G являются конечно порожденными группами, причем сумма их рангов равна рангу группы G .*

Числа Бетти $\beta_k(M)$ ($0 \leq k \leq n$) компактного n -мерного многообразия M определяется как ранги групп гомологий $H_k(M)$, а его эйлерова характеристика определяется равенством

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k(M).$$

Используя основные свойства групп гомологий, нетрудно показать, что это определение дает тот же результат, что и приведенное в §1.8 определение в терминах количеств клеток разных размерностей клеточного комплекса, реализующего M . Собственно, в этом и состоит доказательство топологической инвариантности эйлеровой характеристики, о которой мы упомянули в §1.8.

Пример 1. Группы гомологий окружности. На рис. 3.15 изображена триангуляция окружности \mathbb{S}^1 , состоящая из трех нульмерных и трех одномерных симплексов. Ориентация одномерных симплексов обозначена стрелками. В данном случае диаграмма (3.7.7) выглядит так:

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0. \quad (3.7.9)$$

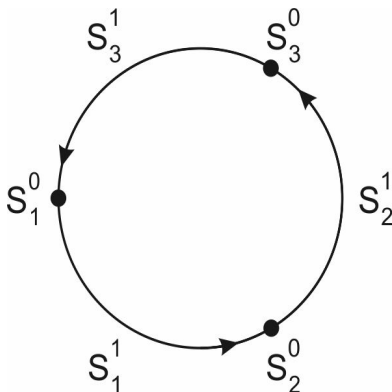


Рис. 3.15. Триангуляция окружности

Обе группы C_0 и C_1 изоморфны $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Согласно (3.7.6),

$$\partial s_1^1 = s_2^0 - s_1^0, \quad \partial s_2^1 = s_3^0 - s_2^0, \quad \partial s_3^1 = s_1^0 - s_0^0. \quad (3.7.10)$$

Группа нульмерных циклов Z_0 совпадает с группой $C_0 = \mathbb{Z}^3$ с образующими s_1^0, s_2^0, s_3^0 , а группа нульмерных границ $B_0 \subset Z_0$ порождена цепями $s_2^0 - s_1^0$ и $s_3^0 - s_2^0$, как видно из (3.7.10). Следовательно, группа нульмерных гомологий изоморфна \mathbb{Z} . Как видно из (3.7.10), группа одномерных циклов Z_1 является бесконечной циклической подгруппой в $C_1 = \mathbb{Z}^3$ с образующей $s_1^1 + s_2^1 + s_3^1$, а группа нульмерных границ B_0 есть нулевая подгруппа группы Z_1 . Следовательно, группа одномерных гомологий также изоморфна \mathbb{Z} . Итак, $H_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ и $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Следовательно, $\beta_0(\mathbb{S}^1) = \beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$ и $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$.

Пример 2. Группы гомологий двумерной сферы. Сфера \mathbb{S}^2 гомеоморфна границе трехмерного симплекса. Воспользуемся рис. 3.14, в, сохранив для симплексов обозначения A, AB, ABC, \dots . Данная триангуляция двумерной сферы состоит из четырех нульмерных, шести одномерных и четырех двумерных симплексов. В данном случае диаграмма (3.7.7) выглядит так:

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0. \quad (3.7.11)$$

Группа C_0 есть свободная абелева группа ранга 4 с образующими A, B, C, D ; группа C_1 есть свободная абелева группа ранга 6 с образующими

AB, AC, AD, BC, BD, CD ; и группа C_2 есть свободная абелева группа ранга 4 с образующими ABC, ABD, ACD, BCD . Граничный оператор задается равенствами

$$\begin{aligned} \partial(AB) &= B - A, & \partial(AC) &= C - A, & \partial(AD) &= D - A, \\ \partial(BC) &= C - B, & \partial(BD) &= D - B, & \partial(CD) &= D - C, \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

$$\begin{aligned} \partial(ABC) &= AB - AC + BC, & \partial(ABD) &= AB - AD + BD, \\ \partial(ACD) &= AC - AD + CD, & \partial(BCD) &= BC - BD + CD. \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Это можно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} \partial \begin{pmatrix} AB \\ AC \\ AD \\ BC \\ BD \\ CD \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}, \\ \partial \begin{pmatrix} ABC \\ ABD \\ ACD \\ BCD \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \\ AC \\ AD \\ BC \\ BD \\ CD \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Основное свойство $\partial^2 = 0$ цепных комплексов в данном случае эквивалентно матричному равенству

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Проанализируем диаграмму (3.7.11) в три шага.

1. Группа $Z_0 = C_0$ является свободной абелевой группой ранга 4 с образующими A, B, C, D . Ее подгруппа B_0 порождена нульмерными цепями

$$B - A, \quad C - A, \quad D - A, \quad C - B, \quad D - B, \quad D - C,$$

как видно из (3.7.12). Последние три из этих цепей являются линейными комбинациями первых трех:

$$C-B = (C-A)-(B-A), \quad D-B = (D-A)-(B-A), \quad D-C = (D-A)-(C-A).$$

Таким образом, B_0 является свободной абелевой группой ранга 3 с образующими $B-A, C-A, D-A$. Отсюда заключаем, что $H_0 = \mathbb{Z}$.

2. Группа C_1 является свободной абелевой группой ранга 6 с образующими AB, AC, AD, BC, BD, CD . Как видно из (3.7.13), подгруппа B_1 группы C_1 порождена четырьмя одномерными цепями

$$\begin{aligned} b_1^1 &= AB - AC + BC, & b_2^1 &= AB - AD + BD, \\ b_3^1 &= AC - AD + CD, & b_4^1 &= BC - BD + CD. \end{aligned}$$

Последняя из этих цепей является линейной комбинацией трех первых: $b_4^1 = b_1^1 - b_2^1 + b_3^1$. Следовательно, группа B_1 порождена тремя одномерными цепями

$$b_1^1 = AB - AC + BC, \quad b_2^1 = AB - AD + BD, \quad b_3^1 = AC - AD + CD. \quad (3.7.14)$$

Найдем группу Z_1 . Пусть

$$z^1 = \alpha_1(AB) + \alpha_2(AC) + \alpha_3(AD) + \alpha_4(BC) + \alpha_5(BD) + \alpha_6(CD)$$

— какой-нибудь одномерный цикл ($\alpha_1, \dots, \alpha_6$ — целые числа). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \partial z^1 \\ &= \alpha_1(B-A) + \alpha_2(C-A) + \alpha_3(D-A) + \alpha_4(C-B) + \alpha_5(D-B) + \alpha_6(D-C) \\ &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)A + (\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_5)B + (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6)C + (\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6)D. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 &= 0, \\ \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Легко убедиться, что ранг этой системы равен трем, т. е. пространство решений трехмерно. Три вектора

$$\begin{aligned} (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \alpha_4^1, \alpha_5^1, \alpha_6^1) &= (1, -1, 0, 1, 0, 0), \\ (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2, \alpha_5^2, \alpha_6^2) &= (1, 0, -1, 0, 1, 0), \\ (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha_4^3, \alpha_5^3, \alpha_6^3) &= (0, 1, -1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

образуют базис пространства решений, т. е. Z_1 является свободной группой с образующими

$$z_1^1 = AB - AC + BC, \quad z_2^1 = AB - AD + BD, \quad z_3^1 = AC - AD + CD.$$

Сравнивая это с (3.7.14), видим, что $B_1 = Z_1$. Следовательно, $H_1 = 0$.

3. Группа C_2 является свободной абелевой группой ранга 4 с образующими ABC, ABD, ACD, BCD , а подгруппа B_2 равна нулю. Найдем группу $Z_2 = H_2$. Пусть

$$z^2 = \alpha_1(ABC) + \alpha_2(ABD) + \alpha_3(ACD) + \alpha_4(BCD)$$

— произвольный двумерный цикл. Используя (3.7.13), получаем

$$\begin{aligned} 0 = \partial z^2 &= \alpha_1(AB - AC + BC) + \alpha_2(AB - AD + BD) \\ &\quad + \alpha_3(AC - AD + CD) + \alpha_4(BC - BD + CD) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)(AB) + (\alpha_3 - \alpha_1)(AC) - (\alpha_2 + \alpha_3)(AD) \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_4)(BC) + (\alpha_2 - \alpha_4)(BD) + (\alpha_3 + \alpha_4)(CD). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 - \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_4 &= 0, & \alpha_2 - \alpha_4 &= 0, & \alpha_3 + \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ранг системы равен пяти, т. е. пространство решений одномерно. Любое решение системы отличается лишь целым множителем от вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, -1, 1, -1)$. Следовательно, $H_2 = Z_2$ — свободная абелева группа ранга 1 с образующей $z^2 = ABC - ABD + ACD - BCD$.

Итак, $H_0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$. Следовательно, $\beta_0(\mathbb{S}^2) = 1$, $\beta_1(\mathbb{S}^2) = 0$, $\beta_2(\mathbb{S}^2) = 1$ и $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

Анализируя приведенные примеры, можно сделать следующие выводы о группах $H_0(M)$ и $H_n(M)$ произвольного компактного n -мерного многообразия M .

1. Если M связно, то $H_0(M) = \mathbb{Z}$. В общем случае $H_0(M) = \mathbb{Z}^m$, где m — число компонент связности.

2. $H_n(M) = \mathbb{Z}$ для связного ориентируемого многообразия. Действительно, если $s_1^n, \dots, s_{r_n}^n$ — все n -мерные симплексы выбранной триангуляции, то $H_n = Z_n$ является свободной абелевой группой ранга 1

с образующей $\varepsilon_1 s_1^n + \dots + \varepsilon_{r_n} s_{r_n}^n$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, совпадает ли выбранная ориентация симплекса s_i^n с ориентацией многообразия M или противоположна ей.

3. $H_n(M) = 0$ для связного неориентируемого многообразия. Действительно, в этом случае нет ненулевых n -мерных циклов.

Основной недостаток симплициальных гомологий состоит в следующем: число симплексов любой триангуляции компактного n -мерного многообразия быстро растет с ростом n и увеличением сложности многообразия. Обсудим это на примере сферы \mathbb{S}^n . Так же, как в примере 2, простейшую триангуляцию сферы \mathbb{S}^n получим, отождествив ее с границей $(n+1)$ -мерного симплекса. Число k -мерных симплексов этой триангуляции равно $\binom{n+2}{k+1} = \frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!}$. При вычислении групп гомологий $H_k(\mathbb{S}^n)$ с помощью этой триангуляции нам придется рассматривать очень большие системы уравнений типа (3.7.15). Возможно, такой подход хорош для компьютерного вычисления гомологий, но ненадежен для наглядного геометрического истолкования результатов. Поэтому чаще используются так называемые *клеточные* гомологии, к краткому обзору которых мы переходим. Рекомендуем читателю на минутку вернуться к §1.8, чтобы освежить в памяти терминологию и обозначения, относящиеся к клеточным комплексам.

Пусть K — конечный n -мерный клеточный комплекс, построенный из клеток $c_1^k, \dots, c_{r_k}^k$ ($k = 0, \dots, n$) с помощью приклеивающих отображений $\varphi_i^k : \dot{c}_i^k \rightarrow K^{k-1}$. Ориентируем каждую из клеток. Пусть $C_k = C_k(K)$ — свободная абелева группа, образующими которой являются ориентированные k -мерные клетки $c_1^k, \dots, c_{r_k}^k$ нашего комплекса. Элементы этой группы по-прежнему называются k -мерными цепями. Граница клетки определяется формулой

$$\partial c_i^k = \sum_{j=1}^{r_{k-1}} \varepsilon_{ij}^k c_j^{k-1}, \quad (3.7.16)$$

где коэффициенты инцидентности ε_{ij}^k определяются с помощью приклеивающего отображения $\varphi_i^k : \dot{c}_i^k \rightarrow K^{k-1}$. Грубо говоря, это определение таково: ε_{ij}^k равно кратности (со знаком) покрытия клетки c_j^{k-1} отображением φ_i^k . Более точное определение коэффициентов инцидентности будет приведено позже. В отличие от (3.7.6), коэффициенты инцидентности в формуле (3.7.16) могут принимать любые целые значения.

Затем граничный оператор по линейности распространяется до гомоморфизма абелевых групп $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$. Основное свойство $\partial^2 = 0$ граничного оператора остается справедливым, хотя его доказательство на основе формулы (3.7.16) гораздо сложнее, чем для симплициальных комплексов. Тем самым мы опять приходим к цепному комплексу (3.7.7). Дальнейшие конструкции не отличаются от приведенных выше: определяем группы k -мерных циклов и границ $C_k \supset Z_k \supset B_k$ и полагаем $H_k(K) = Z_k/B_k$. Группы $H_k(K)$ ($k = 0, \dots, n$) называются (целочисленными) гомологиями клеточного комплекса K . Для клеточных комплексов справедлив следующий аналог теоремы 3.7.1.

Теорема 3.7.3. *Группы гомологий клеточного комплекса, реализующего полиэдр X , с точностью до изоморфизма не зависят от представления пространства X в виде конечного клеточного комплекса. Эти группы обозначаются $H_k(X)$ ($k = 0, \dots, n$) и называются группами (целочисленных) гомологий полиэдра X .*

Пример 3. Гомологии сферы. Сферу \mathbb{S}^n можно представить в виде клеточного комплекса, имеющего одну нульмерную клетку c^0 и одну n -мерную клетку c^n (см. пример 6б из §1.3 и пример 1 из §1.8). Пусть для определенности $n \geq 2$. Цепной комплекс (3.7.7) в данном случае выглядит так:

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0. \quad (3.7.17)$$

Подчеркнем, что $C_k = 0$ при $1 \leq k \leq n-1$ (отсутствуют клетки размерности k). Поэтому все горизонтальные стрелки в диаграмме (3.7.17) являются нулевыми гомоморфизмами, в силу чего точное определение коэффициентов инцидентности в (3.7.16) не имеет значения в данном случае. Группы C_0 и C_n являются свободными абелевыми группами ранга 1 с образующими c^0 и c^n соответственно. Отсюда мгновенно вытекает, что при $n \geq 2$

$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } k = 0 \text{ и } k = n, \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases} \quad (3.7.18)$$

Это верно и при $n = 1$, как мы установили в примере 1. Следовательно,

$$\beta_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 1 & \text{для } k = 0 \text{ и } k = n, \\ 0 & \text{для остальных } k \end{cases} \quad (3.7.19)$$

и

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2 & \text{при четном } n, \\ 0 & \text{при нечетном } n. \end{cases} \quad (3.7.20)$$

Обратите внимание, насколько наши рассуждения в этом примере проще, чем в примере 2.

В алгебраической топологии устанавливаются многие важные свойства групп гомологий, облегчающие, в частности, вычисление этих групп. Мы упомянем здесь лишь два из основных свойств.

1. Группы гомологий *функториальны*, что означает следующее. Каждому непрерывному отображению $f : X \rightarrow Y$ между двумя полиэдрами некоторым естественным образом сопоставляется гомоморфизм групп $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ ($k = 0, 1, \dots$), хорошо ведущий себя относительно композиций: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

2. Если непрерывные отображения $f, g : X \rightarrow Y$ гомотопны, то $f_* = g_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ для любого k . В частности, если $f : X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ — изоморфизм.

Рассмотрим непрерывное отображение $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ сферы в себя. Оно индуцирует автоморфизм $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} = H_n(\mathbb{S}^n)$. Хорошо известно (и легко доказывается), что любой автоморфизм группы \mathbb{Z} имеет вид $f_*(\alpha) = d\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$) для некоторого однозначно определенного $d \in \mathbb{Z}$. Целое число $d = \deg f$ называется *степенью* непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Теперь мы можем дать точное определение коэффициентов инцидентности в формуле (3.7.16). Рассмотрим какую-нибудь k -мерную клетку c_i^k конечного клеточного комплекса K и соответствующее отображение приклеивания $\varphi_i^k : \dot{c}_i^k \rightarrow K^{k-1}$. Зафиксируем одну $(k-1)$ -мерную клетку c_j^{k-1} в $(k-1)$ -мерном остове K^{k-1} . Все остальные клетки в K^{k-1} затынем в одну точку и обозначим результат $\tilde{\mathbb{S}}_j^{k-1}$ (другими словами, $\tilde{\mathbb{S}}_j^{k-1}$ есть фактор-пространство пространства K^{k-1} по следующему отношению эквивалентности: каждая точка внутренности $\overset{\circ}{c}_j^{k-1}$ эквивалентна лишь себе, а все остальные точки пространства K^{k-1} эквивалентны друг другу). Пусть $\pi : K^{k-1} \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}_j^{k-1}$ — проекция на фактор-пространство. Положим

$$\tilde{\varphi}_i^k = \pi \circ \varphi_i^k : \dot{c}_i^k \rightarrow \tilde{\mathbb{S}}_j^{k-1}.$$

Понятно, что фактор-пространство \tilde{S}_j^{k-1} гомеоморфно стандартной сфере S^{k-1} . Более того, сферы \dot{c}_i^k и \tilde{S}_j^{k-1} снабжены ориентациями, поскольку каждая клетка комплекса K ориентирована. отождествим \dot{c}_i^k и \tilde{S}_j^{k-1} со стандартной сферой S^{k-1} посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\dot{c}_i^k \rightarrow S^{k-1} \leftarrow \tilde{S}_j^{k-1}$. Теперь $\tilde{\varphi}_i^k$ может рассматриваться как непрерывное отображение стандартной сферы в себя

$$\tilde{\varphi}_i^k : \dot{c}_i^k = S^{k-1} \rightarrow S^{k-1} = \tilde{S}_j^{k-1},$$

для которого определена степень $\deg \tilde{\varphi}_i^k$. Полагаем

$$\varepsilon_{ij}^k = \deg \tilde{\varphi}_i^k.$$

Пример 4. Гомологии действительной проективной плоскости. Из приведенных выше примеров у читателя может сложиться неверное мнение, что группы гомологий всегда являются свободными абелевыми группами. Найдем группы гомологий действительной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Мы уже знаем (см. замечания после примера 2), что $H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$ и $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, поскольку $\mathbb{R}P^2$ является связным неориентируемым двумерным многообразием. Найдем группу $H_1(\mathbb{R}P^2)$. Напомним, что $\mathbb{R}P^2$ может быть получено из двумерного диска $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ путем отождествления диаметрально противоположных точек граничной окружности $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. На рис. 3.16 изображено представление $\mathbb{R}P^2$ в виде клеточного комплекса, состоящего из одной нульмерной клетки c^0 , одной одномерной клетки c^1 и одной двумерной клетки c^2 . Клетки c^0 и c^1 изображены на рисунке дважды из-за отождествления диаметрально противоположных точек граничной окружности. Отметим, что c^1 является циклом, поскольку $\partial c^1 = c^0 - c^0 = 0$. Таким образом, $Z_1 = C_1$ есть свободная абелева группа ранга 1 с образующей c^1 . Сам цикл c^1 не является границей, но цикл $2c^1$ есть граница, поскольку $\partial c^2 = 2c^1$, как видно на рисунке. Таким образом,

$$\{2kc^1 \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = B_1 \subset Z_1 = \{kc^1 \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

следовательно, $H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}_2$ (= циклическая группа второго порядка, состоящая из двух элементов). Итак, $H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2) =$

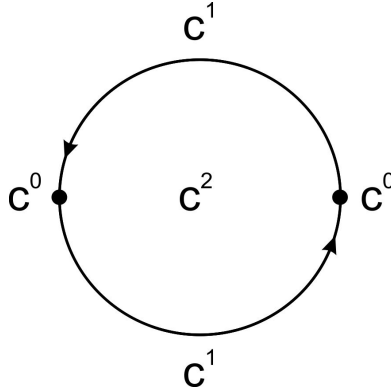


Рис. 3.16. Клеточное разбиение проективной плоскости

\mathbb{Z}_2 , $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$. Следовательно, $\beta_0(\mathbb{R}P^2) = 1$, $\beta_1(\mathbb{R}P^2) = 0$, $\beta_2(\mathbb{R}P^2) = 0$ и $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$.

Приступая к доказательству неравенств Морса, сначала докажем следующее простое утверждение.

Лемма 3.7.4. *Для любого гомоморфизма $f : G \rightarrow H$ между двумя конечно порожденными абелевыми группами справедливо равенство*

$$\text{rank } G = \text{rank}(\text{Ker } f) + \text{rank}(\text{Ran } f).$$

Доказательство. Гомоморфизм f индуцирует изоморфизм

$$G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Ran } f.$$

Следовательно, $\text{rank}(G/\text{Ker } f) = \text{rank}(\text{Ran } f)$. Согласно предложению 3.7.2, $\text{rank}(G/\text{Ker } f) = \text{rank } G - \text{rank}(\text{Ker } f)$. Сопоставляя последние два равенства, приходим к утверждению леммы. \square

Следующее утверждение содержит алгебраическую часть доказательства неравенств Морса.

Лемма 3.7.5. *Если H_k ($k = 0, \dots, n$) — группы гомологий цепного комплекса*

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0, \quad (3.7.21)$$

образованного конечно порожденными абелевыми группами, то неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} H_\lambda - \operatorname{rank} H_{\lambda-1} + \operatorname{rank} H_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} H_0 &\leq \\ &\leq \operatorname{rank} C_\lambda - \operatorname{rank} C_{\lambda-1} + \operatorname{rank} C_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} C_0 \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

справедливо для любого $\lambda = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Применяя лемму 3.7.4 к гомоморфизму $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$, имеем

$$\operatorname{rank} B_{k-1} = \operatorname{rank} C_k - \operatorname{rank} Z_k. \quad (3.7.23)$$

Согласно предложению 3.7.2,

$$\operatorname{rank} H_k = \operatorname{rank} Z_k - \operatorname{rank} B_k. \quad (3.7.24)$$

Неравенство (3.7.22) следует из равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} B_\lambda &= (\operatorname{rank} C_\lambda - \operatorname{rank} C_{\lambda-1} + \operatorname{rank} C_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} C_0) \\ &\quad - (\operatorname{rank} H_\lambda - \operatorname{rank} H_{\lambda-1} + \operatorname{rank} H_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} H_0), \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

поскольку его левая часть неотрицательна.

Доказываем (3.7.25) индукцией по λ . Положив $k = 0$ в (3.7.24), имеем

$$\operatorname{rank} B_0 = \operatorname{rank} Z_0 - \operatorname{rank} H_0.$$

Это совпадает с (3.7.25) при $\lambda = 0$, поскольку $Z_0 = C_0$.

Предположим справедливость (3.7.25) для некоторого λ . Из (3.7.23) и (3.7.24) выводим

$$\operatorname{rank} B_{\lambda+1} = \operatorname{rank} Z_{\lambda+1} - \operatorname{rank} H_{\lambda+1} = \operatorname{rank} C_{\lambda+1} - \operatorname{rank} H_{\lambda+1} - \operatorname{rank} B_\lambda.$$

Подставив в правую часть этой формулы значение $\operatorname{rank} B_\lambda$ из индуктивного предположения (3.7.25), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} B_{\lambda+1} &= \operatorname{rank} C_{\lambda+1} - \operatorname{rank} H_{\lambda+1} \\ &\quad - (\operatorname{rank} C_\lambda - \operatorname{rank} C_{\lambda-1} + \operatorname{rank} C_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} C_0) \\ &\quad + (\operatorname{rank} H_\lambda - \operatorname{rank} H_{\lambda-1} + \operatorname{rank} H_{\lambda-2} - \cdots \pm \operatorname{rank} H_0). \end{aligned}$$

Это равенство может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} B_{\lambda+1} &= (\operatorname{rank} C_{\lambda+1} - \operatorname{rank} C_\lambda + \operatorname{rank} C_{\lambda-1} - \cdots \pm \operatorname{rank} C_0) \\ &\quad - (\operatorname{rank} H_{\lambda+1} - \operatorname{rank} H_\lambda + \operatorname{rank} H_{\lambda-1} - \cdots \pm \operatorname{rank} H_0). \end{aligned}$$

Тем самым шаг индукции завершен. \square

Отметим, что равенство (3.7.25) справедливо и при $\lambda = n + 1$, если считать, что $C_{n+1} = B_{n+1} = H_{n+1} = 0$. Тем самым получаем

Следствие 3.7.6. *В условиях леммы 3.7.5 справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{rank} H_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \operatorname{rank} C_k.$$

Доказательство теоремы 3.6.2. Пусть f — функция Морса на компактном n -мерном многообразии M и $r_\lambda(f)$ — число критических точек индекса λ этой функции. Как отмечалось после теоремы 3.6.2, достаточно доказать второе утверждение этой теоремы.

Согласно теореме 3.5.1, многообразие M имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса K , имеющего $r_\lambda(f)$ клеток в каждой размерности λ . Пусть (3.7.21) — цепной комплекс, построенный по клеточному комплексу K как описано выше. Подставив в неравенство (3.7.22) значения $\operatorname{rank} H_\lambda = \beta_\lambda(M)$ и $\operatorname{rank} C_\lambda = r_\lambda(f)$, придем к сильным неравенствам Морса (3.6.2). \square

Кроме упомянутых симплициальных и клеточных гомологий, в алгебраической топологии изучаются несколько других вариантов теории гомологий. В первую очередь надо отметить так называемые *сингулярные* гомологии, определенные для любого топологического пространства. Определение сингулярных гомологий нелегко для первоначального знакомства, поскольку в нем используются очень большие абелевы группы (не являющиеся конечно порожденными). Но затем эта трудность окупается простотой доказательства основных свойств групп гомологий. Например, вовсе не возникает необходимости доказывать утверждение, подобное теоремам 3.7.1 и 3.7.3, поскольку определение сингулярных групп гомологий $H_k(X)$ топологического пространства X не содержит никакого произвола. Теория сингулярных групп гомологий хорошо изложена в [20].

В подавляющем случае приложений не имеет значения, какой теорией гомологий пользоваться, поскольку для приложений важно не определение, а свойства групп гомологий, которые одинаковы (или почти одинаковы) для всех теорий. Более того, можно выделить несколько основных свойств групп гомологий (так называемые аксиомы теории гомологий), которыми группы $H_k(X)$ однозначно определяются

для любого полиэдра X . С такой аксиоматической теорией гомологий можно познакомиться в книге [17].

Наконец, надо упомянуть о следующей альтернативной возможности определения чисел Бетти компактного гладкого многообразия M . На пространстве внешних дифференциальных форм многообразия M определен дифференциальный оператор внешнего дифференцирования d , с помощью которого строятся конечномерные действительные векторные пространства $H^k(M; \mathbb{R})$, называемые *когомологиями де Рама* многообразия M . Число Бетти $\beta_k(M)$ определяется как размерность пространства $H^k(M; \mathbb{R})$. Эквивалентность этого определения приведенному выше доказывается с помощью теоремы Стокса. Теория когомологий де Рама достаточно просто изложена в §2 главы 3 книги [16].

Упражнение.

Руководствуясь примером 6е из §1.3, представьте двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ в виде клеточного комплекса, состоящего из одной нульмерной, двух одномерных и одной двумерной клетки. Найдите группы гомологий, числа Бетти и эйлерову характеристику двумерного тора. Попробуйте сделать то же для трехмерного тора $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

3.8. Два примера

В качестве первого примера мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3.8.1 (теорема Рибо). *Если на компактном n -мерном многообразии M существует функция Морса с двумя критическими точками, то M гомеоморфно сфере \mathbb{S}^n .*

Доказательство. Критические точки — это точки минимума и максимума f . Пусть, например, $f(p) = 0$ — минимум, а $f(q) = 1$ — максимум. Согласно лемме Морса (теорема 3.2.2), для достаточно малого $\varepsilon > 0$ каждое из множеств $f^{-1}[0, \varepsilon]$ и $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ диффеоморфно n -мерному диску; обозначим эти множества \mathbb{D}_1^n и \mathbb{D}_2^n соответственно. Множество $f^{-1}[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ не содержит критических точек и, по теореме 3.3.1, диффеоморфно произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$. Таким образом,

$$M = \mathbb{D}_1^n \cup (\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]) \cup \mathbb{D}_2^n,$$

причем нижнее основание цилиндра $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ совпадает с граничной сферой диска \mathbb{D}_1^n , а верхнее основание цилиндра совпадает с граничной сферой диска \mathbb{D}_2^n (рис. 3.17). Теперь очевидно, что M гомеоморфно сфере \mathbb{S}^n . \square

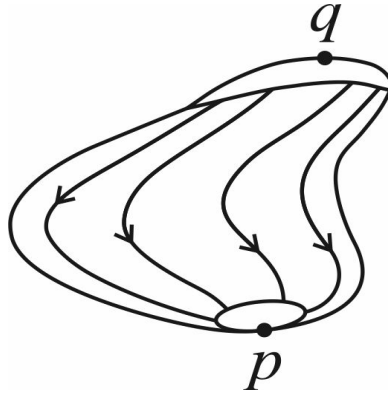


Рис. 3.17. Функция Морса с двумя критическими точками

Замечание. В условиях теоремы 3.8.1, вообще говоря, неверно, что M диффеоморфно сфере $(\mathbb{S}^n, \mathcal{D}_{can})$ со стандартной гладкой структурой. Как отмечалось в §2.2, на сфере \mathbb{S}^n при $n \geq 7$ существуют другие гладкие структуры. Известно, что на каждой из этих экзотических сфер существует функция Морса с двумя критическими точками.

В качестве второго примера построим функцию Морса на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$. Напомним (см. пример 5 из §2.2), что $\mathbb{C}P^n$ определяется как результат факторизации множества $\{(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \neq 0 \mid z_j \in \mathbb{C}\}$ по отношению эквивалентности: $(z_0 : \dots : z_n) \sim (\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n)$ для $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. В частности, взяв $\lambda^{-1} = \sum_{j=0}^n |z_j|^2$, мы можем конкретизировать это представление до следующего:

$$\mathbb{C}P^n = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid \sum_{j=0}^n |z_j|^2 = 1\},$$

где точки $(z_0 : \dots : z_n)$ и $(\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n)$ отождествлены при $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. В этом представлении $|z_j|^2$ ($0 \leq j \leq n$) являются корректно определенными гладкими функциями на $\mathbb{C}P^n$.

Определим гладкую функцию $f : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$f(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \sum_{j=0}^n c_j |z_j|^2,$$

где постоянные c_j выбраны так, что $c_0 < c_1 < \dots < c_n$. Мы покажем, что f есть функция Морса и найдем ее критические точки.

Определим на открытом множестве $U_0 = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid \sum_{j=0}^n |z_j|^2 = 1, z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ функции x_j, y_j ($1 \leq j \leq n$) равенством

$$|z_0| \frac{z_j}{z_0} = x_j + iy_j.$$

Очевидно, что отображение $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ диффеоморфно отображает U_0 на единичный шар пространства \mathbb{R}^{2n} , т. е. $(U_0; x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ — локальная система координат на $\mathbb{C}P^n$. В этих координатах

$$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2 \quad (1 \leq j \leq n), \quad |z_0|^2 = 1 - \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2).$$

Так что в U_0

$$f = c_0 \left(1 - \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2)\right) + \sum_{j=1}^n c_j (x_j^2 + y_j^2) = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)(x_j^2 + y_j^2).$$

Мы видим, что f имеет в U_0 единственную критическую точку $p_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$, которая невырождена и индекс которой равен нулю, поскольку $c_j - c_0 > 0$.

Точно так же для каждого $1 \leq k \leq n$ в области

$$U_k = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid \sum_{j=0}^n |z_j|^2 = 1, z_k \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$$

вводятся координаты $(x_0, y_0, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}, x_{k+1}, y_{k+1}, \dots, x_n, y_n)$ так, что в U_k

$$f = c_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (c_j - c_k)(x_j^2 + y_j^2).$$

Следовательно, f имеет в U_k единственную критическую точку $p_k = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$ (единица на k -м месте), которая невырождена и индекс которой равен $2k$.

Области $\{U_k\}_{k=0}^n$ покрывают $\mathbb{C}P^n$. Следовательно, функция f имеет $(n+1)$ критическую точку

$$p_0 = (1 : 0 : \dots : 0), \quad p_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \quad \dots, \quad p_n = (0 : \dots : 0 : 1).$$

Каждая из этих точек невырождена и индекс критической точки p_k равен $2k$. Применяя теорему 3.5.1, получаем, что $\mathbb{C}P^n$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса

$$c^0 \cup c^2 \cup c^4 \cup \dots \cup c^{2n}.$$

Поскольку этот комплекс не содержит клеток нечетной размерности, отсюда легко получить, что

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0, 2, 4, \dots, 2n; \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\beta_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, 2, 4, \dots, 2n; \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases}$$

$$\text{и } \chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1.$$

3.9. Несколько слов о дальнейшем развитии теории Морса

Напомним (см. §1.7), что топологическое пространство X называется односвязным, если $[\mathbb{S}^1, X]$ состоит из одного элемента, т. е. любая замкнутая кривая в X стягиваема в точку.

Пусть M — гладкое компактное n -мерное многообразие и (r_0, r_1, \dots, r_n) — последовательность целых неотрицательных чисел. Зададимся вопросом: существует ли на M функция Морса, у которой число критических точек индекса λ равно r_λ для всех $0 \leq \lambda \leq n$?

Неравенства Морса (теорема 3.6.2) являются необходимыми условиями для положительного ответа на поставленный вопрос. Достаточны ли неравенства Морса? Этот вопрос долгое время оставался неясным. Наконец, в начале 60-х годов прошлого века Смейл доказал следующее утверждение.

Теорема 3.9.1. Пусть M — гладкое компактное односвязное многообразие размерности $n \geq 5$ и (r_0, r_1, \dots, r_n) — последовательность целых неотрицательных чисел. Если эти числа удовлетворяют неравенствам Морса, то на M существует функция Морса, у которой число критических точек индекса λ равно r_λ для всех $0 \leq \lambda \leq n$.

Для знакомства с этой теоремой и близкими к ней результатами я рекомендую книгу [11], написанную столь же ясно и кратко, как и предыдущая книга [10] того же автора. Правда, для чтения этой книги необходимо знание основных свойств групп гомологий.

Мы обсудим здесь лишь одно из многочисленных следствий теоремы 3.9.1: гипотезу Пуанкаре.

Напомним, что группы гомологий сферы выражаются формулой (3.7.18). В 1904 году Пуанкаре сформулировал следующий вопрос.

Проблема 3.9.2 (гипотеза Пуанкаре). Пусть M — гладкое компактное односвязное многообразие размерности n , имеющее такие же гомологии, что и сфера, т. е.

$$H_k(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0 \text{ и } k = n, \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases} \quad (3.9.1)$$

Верно ли, что M гомеоморфно \mathbb{S}^n ?

Для $n = 2$ ответ положителен, как легко следует из классификации компактных двумерных многообразий (см. §2.12); это было известно Пуанкаре. Для остальных n вопрос долгое время оставался открытым. В размерностях $n \geq 5$ гипотеза Пуанкаре вытекает из теоремы 3.9.1. Действительно, если (3.9.1) справедливо, то последовательность $(r_0, r_1, \dots, r_n) = (1, 0, \dots, 0, 1)$ удовлетворяет неравенствам Морса. Поэтому на M существует функция Морса с двумя критическими точками. Применяя теорему Роба (теорема 3.8.1), получаем, что M гомеоморфно \mathbb{S}^n .

Таким образом, после Смейла в гипотезе Пуанкаре оставались открытыми случаи $n = 3$ и $n = 4$. Вкратце расскажем и об этих случаях, хотя они не связаны непосредственно с теорией Морса.

Как мы упоминали в конце §2.2, прорыв в четырехмерной топологии произошел в 80-е годы прошлого века, в значительной степени под влиянием некоторых идей, пришедших из физики. В частности, была доказана четырехмерная гипотеза Пуанкаре.

Итак, оставался открытым лишь самый трудный трехмерный случай в гипотезе Пуанкаре. Интересно отметить, что в этом случае гипотеза допускает эквивалентную формулировку, в которой гомологии явно не упоминаются.

Проблема 3.9.3 (трехмерная гипотеза Пуанкаре). *Верно ли, что любое компактное, связное, односвязное, трехмерное многообразие гомеоморфно \mathbb{S}^3 ?*

Не вдаваясь в обсуждение долгой истории этого вопроса, в которую многие математики внесли существенный вклад, скажем лишь, что окончательный (положительный) ответ был получен Перельманом в 2004 году. Таким образом, история гипотезы Пуанкаре продолжалась ровно сто лет. Необходимо также сказать, что фактически Перельман доказал так называемую “геометризационную гипотезу Тёрстона”, значительно обобщающую трехмерную гипотезу Пуанкаре. Интересующихся отсылаю к книге [18].

Литература, рекомендуемая к этой главе: [10, 14].

Глава 4

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

4.1. Тензорная алгебра над конечномерным векторным пространством

Мы ограничимся рассмотрением векторного пространства над полем \mathbb{R} действительных чисел, хотя все содержание настоящего параграфа дословно переносится на случай векторного пространства над произвольным полем.

Пусть V — действительное векторное пространство конечной размерности n . *Линейным функционалом* на V называется отображение $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$\omega(\alpha X + \beta Y) = \alpha\omega(X) + \beta\omega(Y) \quad \text{для } X, Y \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через V' множество всех линейных функционалов на V . На этом множестве вводится структура действительного векторного пространства посредством равенства

$$(\alpha\omega + \beta\varepsilon)(X) = \alpha\omega(X) + \beta\varepsilon(X) \quad \text{для } \omega, \varepsilon \in V'; X \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Пространство V' называется *сопряженным* к V . Как мы увидим чуть позже, размерность V' также равна n .

Для $\omega \in V'$ и $X \in V$ значение $\omega(X)$ будем впредь обозначать через $\langle \omega, X \rangle$. Отображение

$$V' \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, X) \mapsto \langle \omega, X \rangle \quad (4.1.1)$$

называется *каноническим спариванием* пространств V' и V . Это отображение *билинейно*, т. е. линейно по каждому аргументу:

$$\begin{aligned}\langle \alpha\omega + \beta\varepsilon, X \rangle &= \alpha\langle \omega, X \rangle + \beta\langle \varepsilon, X \rangle, \\ \langle \omega, \alpha X + \beta Y \rangle &= \alpha\langle \omega, X \rangle + \beta\langle \omega, Y \rangle.\end{aligned}$$

Согласно определению линейного функционала, если для $\omega \in V'$ выполняется

$$\langle \omega, X \rangle = 0 \quad \text{для всех } X \in V,$$

то $\omega = 0$. Справедливо и двойственное утверждение: если

$$\langle \omega, X \rangle = 0 \quad \text{для всех } \omega \in V',$$

то $X = 0$. Это вытекает из известной теоремы Хана – Банаха (которая очевидна в случае конечномерного пространства): для любого $0 \neq X \in V$ найдется такой $\omega \in V'$, что $\langle \omega, X \rangle \neq 0$.

При фиксированном $\omega \in V'$ отображение

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \langle \omega, X \rangle$$

является линейным функционалом на V и все линейные функционалы на V имеют такой вид. В силу предыдущего абзаца справедливо и двойственное утверждение: при фиксированном $X \in V$ отображение

$$V' \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \langle \omega, X \rangle$$

является линейным функционалом на V' и все линейные функционалы на V' имеют такой вид. Иными словами,

$$V'' = V, \tag{4.1.2}$$

т. е. второе сопряженное к конечномерному пространству V каноническим образом отождествляется с самим V .

Напомним, что в функциональном анализе сопряженное V' к банахову пространству V определяется как множество всех *непрерывных* линейных функционалов на V . Для банаховых пространств соотношение (4.1.2) справедливо далеко не всегда. Банаховы пространства, удовлетворяющие (4.1.2), называются *рефлексивными*.

Определение 4.1.1. Пусть V — действительное конечномерное векторное пространство и (r, s) — пара неотрицательных целых чисел. Тензором валентности (r, s) на V называется \mathbb{R} -полилинейное (т. е. \mathbb{R} -линейное по каждому аргументу) отображение

$$T : \underbrace{V' \times \cdots \times V'}_r \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \mapsto T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

Число r называется контравариантной валентностью тензора T , а число s — ковариантной валентностью. Тензоры валентности $(r, 0)$ называются контравариантными, а тензоры валентности $(0, s)$ — ковариантными.

Обозначим через $\otimes_s^r V$ множество всех тензоров валентности (r, s) на V . Это множество снабжается структурой действительного векторного пространства посредством формулы

$$\begin{aligned} (\alpha S + \beta T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \\ = \alpha S(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \beta T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Чуть позже мы убедимся, что размерность этого пространства равна n^{r+s} . Чтобы освоиться с этим понятием, рассмотрим сначала несколько частных значений валентности (r, s) .

Возможно, определение 4.1.1 не вполне ясно при $(r, s) = (0, 0)$. По определению, $\otimes_0^0 V = \mathbb{R}$, т. е. тензоры валентности $(0, 0)$ являются действительными числами.

Согласно определению 4.1.1, тензор валентности $(1, 0)$ есть линейное отображение $T : V' \rightarrow \mathbb{R}$, т. е. элемент пространства V'' . Поскольку V'' отождествлено с V , мы можем утверждать, что

$$\otimes_0^1 V = V,$$

т. е. тензоры валентности $(1, 0)$ являются векторами.

Аналогично устанавливается равенство

$$\otimes_1^0 V = V',$$

т. е. тензоры валентности $(0, 1)$ являются линейными функционалами на V . Наряду с названием “линейный функционал на V ” используются

синонимы “1-форма на V ” и “ковектор пространства V ”. Чаще всего мы будем использовать последнее название.

Пространство $\otimes_1^1 V$ может быть отождествлено с пространством $L(V, V)$ всех линейных операторов $V \rightarrow V$:

$$\otimes_1^1 V = L(V, V). \quad (4.1.3)$$

Действительно, пусть $T \in \otimes_1^1 V$. Для фиксированного $X \in V$ отображение $\omega \mapsto T(\omega, X)$ есть линейный функционал на V , т. е. может быть отождествлено с некоторым вектором $\tilde{T}(X) \in V$. Тем самым мы получаем отображение $\tilde{T} : V \rightarrow V$, которое очевидным образом линейно, т. е. $\tilde{T} \in L(V, V)$. Обычно оператор $\tilde{T} \in L(V, V)$ отождествляется с тензором $T \in \otimes_1^1 V$. Это отождествление определяется формулой

$$\langle \omega, T(X) \rangle = T(\omega, X). \quad (4.1.4)$$

Обобщая рассуждения предыдущего абзаца, мы отождествляем

$$\otimes_s^1 V = L(\underbrace{V \times \cdots \times V}_s, V), \quad (4.1.5)$$

где $L(\underbrace{V \times \cdots \times V}_s, V)$ есть пространство всех полилинейных отображений $\underbrace{V \times \cdots \times V}_s \rightarrow V$. Это отождествление осуществляется посредством следующего аналога формулы (4.1.4):

$$\langle \omega, T(X_1, \dots, X_s) \rangle = T(\omega, X_1, \dots, X_s). \quad (4.1.6)$$

Перечислим основные алгебраические операции, определенные на тензорах.

Тензоры одинаковой валентности можно складывать и умножать на действительные числа поскольку $\otimes_s^r V$ является векторным пространством, см. формулу (4.1.1).

Для двух тензоров $S \in \otimes_s^r V$ и $T \in \otimes_{s'}^{r'} V$ их *тензорное произведение* $S \otimes T \in \otimes_{s+s'}^{r+r'} V$ определяется формулой

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ = S(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) T(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}). \end{aligned}$$

Это произведение определяет структуру *биградуированной алгебры* на векторном пространстве

$$\otimes V = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} (\otimes_s^r V). \quad (4.1.7)$$

Термин “биградуированная” означает, что произведение в алгебре согласовано с разложением (4.1.7): произведение элементов из $\otimes_s^r V$ и $\otimes_{s'}^{r'} V$ принадлежит $\otimes_{s+s'}^{r+r'} V$. Алгебра $\otimes V$ называется *тензорной алгеброй над пространством V* .

Напомним, что *след* $\text{tr } T$ линейного оператора $T \in L(V, V)$ определяется как сумма диагональных элементов матрицы, представляющей оператор T в некотором базисе пространства V ; эта сумма не зависит от выбора базиса. В силу отождествления $L(V, V) = \otimes_1^1 V$ мы получаем корректно определенное линейное отображение

$$\text{tr} : \otimes_1^1 V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.1.8)$$

Пусть $1 \leq k \leq r$ и $1 \leq \ell \leq s$. След (4.1.8) позволяет ввести линейный оператор

$$C_\ell^k : \otimes_s^r V \rightarrow \otimes_{s-1}^{r-1} V, \quad (4.1.9)$$

который называется *сверткой* по k -му верхнему и ℓ -му нижнему индексам. Этот оператор определяется следующим образом. Рассмотрим

$$T(\omega^1, \dots, \omega^k, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_\ell, \dots, X_s)$$

как функцию двух аргументов $\omega^k \in V'$ и $X_\ell \in V$, считая все остальные аргументы в этом выражении фиксированными. Как функция аргументов ω^k и X_ℓ , это выражение представляет тензор из $\otimes_1^1 V$ и, следовательно, определен след этого тензора. Мы полагаем

$$\begin{aligned} (C_\ell^k T)(\omega^1, \dots, \omega^{k-1}, \omega^{k+1}, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_{\ell-1}, X_{\ell+1}, \dots, X_s) \\ = \text{tr}_{(\omega^k, X_\ell)} T(\omega^1, \dots, \omega^k, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_\ell, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к координатному представлению тензоров. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис пространства V . Произвольный вектор $X \in V$ единственным образом представим в виде

$$X = \sum_{i=1}^n X^i e_i, \quad (4.1.10)$$

где $X^i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) — *координаты* вектора X относительно данного базиса. В тензорном анализе обычно используется *правило суммирования Эйнштейна*: если некоторый индекс повторяется в мономе дважды, в верхней и нижней позициях, то по этому индексу подразумевается суммирование от 1 до $n = \dim V$. Соответственно этому правилу, формула (4.1.10) упрощается до следующей:

$$X = X^i e_i. \quad (4.1.11)$$

Имея базис (e_1, \dots, e_n) пространства V , определим ковекторы $\theta^j \in V'$ ($1 \leq j \leq n$) равенствами

$$\langle \theta^j, e_i \rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Легко убедиться, что набор $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ является базисом пространства V' (проверьте), который называется *двойственным* к базису (e_1, \dots, e_n) . Отсюда, в частности, следует, что $\dim V' = n$. Любой ковектор $\omega \in V'$ единственным образом представим в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \theta^i,$$

где $\omega_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) — *координаты* ковектора ω относительно данного базиса. Используя правило Эйнштейна, эту формулу также сокращаем до следующей:

$$\omega = \omega_i \theta^i. \quad (4.1.13)$$

Сравнивая (4.1.11) и (4.1.13), обращаем внимание на следующее обстоятельство: для обозначения координат вектора используются верхние индексы, а для обозначения координат ковектора — нижние.

Отметим, что каноническое спаривание (4.1.1) выражается в координатах так:

$$\langle \omega, X \rangle = \omega_i X^i. \quad (4.1.14)$$

Перейдем теперь к определению координат произвольного тензора $T \in \otimes_s^r V$. В выражении $T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)$ представим каждый аргумент в виде

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \omega_{i_1}^1 \theta^{i_1}, \dots, \omega^r = \omega_{i_r}^r \theta^{i_r}, \\ X_1 &= X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_s = X_s^{j_s} e_{j_s}. \end{aligned}$$

Используя полилинейность, получаем

$$\begin{aligned} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= \\ &= T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Числа

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \quad (4.1.16)$$

называются *координатами* тензора T относительно базиса (e_1, \dots, e_n) . Формула (4.1.15) приобретает вид

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}. \quad (4.1.17)$$

Подчеркнем, что правая часть этого равенства является суммой из n^{r+s} слагаемых, поскольку по каждому из индексов $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s)$ выполняется суммирование от 1 до n . Таким образом, тензор $T \in \otimes_s^r V$ имеет n^{r+s} координат и, следовательно, $\dim(\otimes_s^r V) = n^{r+s}$.

Отдельно выпишем формулу (4.1.17) в случае $r = 0$

$$T(X_1, \dots, X_s) = T_{j_1 \dots j_s} X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} \quad \text{для} \quad T \in \otimes_s^0 V \quad (4.1.18)$$

и в случае $r = 1$

$$T(X_1, \dots, X_s) = T_{j_1 \dots j_s}^i X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} e_i \quad \text{для} \quad T \in \otimes_s^1 V. \quad (4.1.19)$$

В последней формуле T трактуется как полилинейное отображение $T : V \times \dots \times V \rightarrow V$ в соответствии с отождествлением (4.1.5).

Отметим, что формула (4.1.17) эквивалентна следующей:

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}. \quad (4.1.20)$$

Иными словами, совокупность из n^{r+s} произведений $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_s}$ образует базис пространства $\otimes_s^r V$.

Введенные ранее алгебраические операции над тензорами выражаются в координатах формулами

$$(\alpha S + \beta T)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \alpha S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \beta T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},$$

$$(S \otimes T)_{j_1 \dots j_{s+s'}}^{i_1 \dots i_{r+r'}} = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} T_{j_{s+1} \dots j_{s+s'}}^{i_{r+1} \dots i_{r+r'}},$$

$$\text{tr } T = T_p^p \quad \text{для} \quad T \in \otimes_1^1 V,$$

$$(C_\ell^k T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = T_{j_1 \dots j_{\ell-1} p j_\ell \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{k-1} p i_k \dots i_{r-1}}.$$

В заключение параграфа рассмотрим важный вопрос о преобразовании координат тензора при замене базиса. Пусть (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) — два базиса пространства V . Матрица перехода $B = (b_i^j)$ от первого базиса ко второму определяется посредством формулы

$$e'_i = b_i^j e_j. \quad (4.1.21)$$

Пусть $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ и $(\theta'^1, \dots, \theta'^n)$ — базисы пространства V' , двойственные к базисам (e_1, \dots, e_n) и (e'_1, \dots, e'_n) соответственно. Связь между этими базисами дается формулой

$$\theta'^i = a_j^i \theta^j, \quad (4.1.22)$$

где $A = (a_j^i)$ — обратная к B матрица. Чтобы убедиться в справедливости (4.1.22), достаточно подставить значения (4.1.21) и (4.1.22) в формулу (4.1.12)

$$\delta_i^j = \langle \theta'^j, e'_i \rangle = \langle a_k^j \theta^k, b_i^\ell e_\ell \rangle = a_k^j b_i^\ell \langle \theta^k, e_\ell \rangle = a_k^j b_i^\ell \delta_\ell^k = a_k^j b_i^k.$$

Равенство $a_k^j b_i^k = \delta_i^j$ эквивалентно соотношению $B = A^{-1}$.

Пусть $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ — координаты тензора $T \in \otimes_s^r V$ относительно базиса (e_1, \dots, e_n) и $T'_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ — координаты того же тензора относительно базиса (e'_1, \dots, e'_n) . Найдём связь между этими координатами. Согласно (4.1.16),

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T(\theta'^{i_1}, \dots, \theta'^{i_r}, e'_{j_1}, \dots, e'_{j_s}).$$

Подставляя сюда выражения (4.1.21)–(4.1.22) для аргументов и используя полилинейность, получаем

$$\begin{aligned} T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} &= T(a_{k_1}^{i_1} \theta^{k_1}, \dots, a_{k_r}^{i_r} \theta^{k_r}, b_{j_1}^{\ell_1} e_{\ell_1}, \dots, b_{j_s}^{\ell_s} e_{\ell_s}) \\ &= a_{k_1}^{i_1} \dots a_{k_r}^{i_r} b_{j_1}^{\ell_1} \dots b_{j_s}^{\ell_s} T(\theta^{k_1}, \dots, \theta^{k_r}, e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_s}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к *правилу преобразования координат тензора* при замене базиса

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = a_{k_1}^{i_1} \dots a_{k_r}^{i_r} b_{j_1}^{\ell_1} \dots b_{j_s}^{\ell_s} T^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s}. \quad (4.1.23)$$

Формула (4.1.23) является основной формулой тензорной алгебры. Во многих старых учебниках по геометрии (и в некоторых новых учебниках по физике) вы можете встретить следующее определение: тензором

валентности (r, s) на векторном пространстве V называется правило, сопоставляющее каждому базису пространства V совокупность чисел $(T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$, которая преобразуется по формуле (4.1.23) при замене базиса.

Упражнения

1. Докажите, что $\otimes_s^r V$ и $\otimes_r^s V$ могут рассматриваться как сопряженные друг другу векторные пространства, т.е. что существует каноническое отождествление

$$(\otimes_s^r V)' = \otimes_r^s V,$$

а каноническое спаривание

$$(\otimes_r^s V) \times (\otimes_s^r V) \rightarrow \mathbb{R}$$

выражается в координатах формулой

$$\langle S, T \rangle = S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

2. Рангом тензора $T \in \otimes_0^2 V$ называется ранг матрицы (T^{ij}) , образованной координатами этого тензора относительно некоторого базиса. Докажите независимость этого ранга от выбора базиса. Найдите ранги тензоров $X \otimes Y$ и $X \otimes Y + Y \otimes X$ для $X, Y \in V$.

3. Докажите, что если тензор $T \in \otimes_2^0 V$ удовлетворяет

$$T(X, X) = 0 \quad \text{для любого } X \in V,$$

то этот тензор *кососимметричен*, т.е.

$$T(X, Y) = -T(Y, X) \quad \text{для всех } X, Y \in V.$$

Как выглядит аналог этого утверждения для ковариантных тензоров валентности 3?

4.2. Тензорные поля на многообразии

В каждой точке p гладкого многообразия M определено касательное векторное пространство $T_p M$ размерности $n = \dim M$. Для $T_p M$

мы можем рассматривать все понятия, которые в предыдущем параграфе вводились для произвольного конечномерного пространства V . В частности, через $T'_p M$ обозначаем сопряженное пространство и через

$$\otimes(T_p M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} (\otimes_s^r(T_p M))$$

тензорную алгебру над $T_p M$. Таким образом, мы можем говорить о тензорах в точке $p \in M$.

Нас больше интересуют не тензоры в отдельных точках, а тензорные поля, т. е. функции, сопоставляющие каждой точке $p \in M$ тензор из $\otimes_s^r(T_p M)$. Чтобы определить понятие *гладкого* тензорного поля, мы сначала рассмотрим координаты тензора.

Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M с областью определения $U \subset M$. Обратите внимание, что отныне координаты нумеруются верхними индексами; это связано с правилом суммирования Эйнштейна. Как мы знаем (см. §2.4), в каждой точке $p \in U$ определены координатные векторы $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_p M$ ($1 \leq i \leq n$), образующие базис пространства $T_p M$. Обозначим двойственный базис пространства $T'_p M$ через $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$. Согласно (4.1.20), любой тензор $T_p \in \otimes_s^r(T_p M)$ однозначно представим в виде

$$T_p = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}|_p. \quad (4.2.1)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство, связанное с правилом Эйнштейна: в выражении $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p$ индекс i_1 считается нижним индексом, поскольку он стоит в знаменателе дроби. Правая часть формулы (4.2.1) является суммой, состоящей из n^{r+s} слагаемых. Коэффициенты $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{R}$ этой суммы называются *координатами* тензора $T_p \in \otimes_s^r(T_p M)$ относительно локальной системы координат $(U; x^1, \dots, x^n)$.

Определение 4.2.1. *Гладким тензорным полем T валентности (r, s) на многообразии M называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in M$ тензор $T_p \in \otimes_s^r(T_p M)$, которая является гладкой в следующем смысле. Для каждой точки $p_0 \in M$ существует такая локальная система координат $(U; x^1, \dots, x^n)$, определенная в некоторой окрестности точки p_0 , что все коэффициенты $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ суммы (4.2.1) являются гладкими функциями точки $p \in U$.*

Обозначим через $\mathcal{T}_s^r = \mathcal{T}_s^r(M)$ множество всех гладких тензорных полей валентности (r, s) на M . Это множество превращается в действительное векторное пространство (бесконечной размерности), если операции сложения тензорных полей и умножения тензорного поля на число определить равенством

$$(\alpha S + \beta T)_p = \alpha S_p + \beta T_p \quad (S, T \in \mathcal{T}_s^r; \alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Напомним, что через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ мы обозначаем кольцо всех гладких действительных функций на M . Гладкие тензорные поля можно умножать на гладкие функции по правилу

$$(fT)_p = f(p)T_p \quad (T \in \mathcal{T}_s^r; f \in \mathcal{F}).$$

Таким образом, \mathcal{T}_s^r становится \mathcal{F} -модулем.

Для $S \in \mathcal{T}_s^r$ и $T \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}$ тензорное произведение $S \otimes T \in \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}$ определяется равенством

$$(S \otimes T)_p = S_p \otimes T_p.$$

Снабженное этим произведением, пространство

$$\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r(M)$$

становится биградуированной $\mathcal{F}(M)$ -алгеброй. Отметим, что, как и требует определение алгебры над кольцом \mathcal{F} , тензорное произведение удовлетворяет правилу

$$(fS) \otimes T = S \otimes (fT) = f(S \otimes T) \quad \text{для } f \in \mathcal{F}.$$

Для $1 \leq k \leq r$ и $1 \leq \ell \leq s$ свертка

$$C_\ell^k : \mathcal{T}_s^r \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}$$

определяется равенством $(C_\ell^k T)_p = C_\ell^k(T_p)$.

Напомним, что через $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$ обозначается \mathcal{F} -модуль всех гладких векторных полей на M , см. §2.5. В дальнейшем нам будут в основном встречаться тензорные поля валентностей $(0, s)$ и $(1, s)$. Для таких полей справедливо следующее

Предложение 4.2.2.

1. Тензорное поле $T \in \mathcal{T}_s^0(M)$ может рассматриваться как полилинейное отображение

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_s \rightarrow \mathcal{F},$$

удовлетворяющее

$$T(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s) \quad \text{для} \quad f_i \in \mathcal{F}, \quad X_i \in \mathcal{V}. \quad (4.2.2)$$

Обратно, любое такое отображение можно рассматривать как тензорное поле валентности $(0, s)$.

2. Тензорное поле $T \in \mathcal{T}_s^1(M)$ может рассматриваться как полилинейное отображение

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_s \rightarrow \mathcal{V}, \quad (4.2.3)$$

удовлетворяющее (4.2.2). Обратно, любое такое отображение можно рассматривать как тензорное поле валентности $(1, s)$.

Доказательство. Мы докажем утверждение 2. То же доказательство с очевидными изменениями справедливо и для утверждения 1.

Пусть задано тензорное поле $T \in \mathcal{T}_s^1$. Согласно отождествлению (4.1.5), для каждой точки $p \in M$ тензор T_p может рассматриваться как полилинейное отображение

$$T_p : \underbrace{(T_p M) \times \cdots \times (T_p M)}_s \rightarrow T_p M.$$

Отсюда отображение $(X_1, \dots, X_s) \mapsto T_p((X_1)_p, \dots, (X_s)_p)$ есть полилинейное отображение из $\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}$ в \mathcal{V} , удовлетворяющее (4.2.2).

Обратно, пусть задано полилинейное отображение (4.2.3), удовлетворяющее (4.2.2). Существенный пункт доказательства — это показать, что значение векторного поля $T(X_1, \dots, X_s)$ в точке p зависит только от значений полей X_i в p . Мы заметим сначала, что отображение T может быть локализовано.

Лемма 4.2.3. Пусть задано полилинейное отображение (4.2.3), удовлетворяющее (4.2.2). Если $X_i = Y_i$ ($1 \leq i \leq s$) в некоторой окрестности V точки p , то

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(Y_1, \dots, Y_s) \quad \text{в } V.$$

Доказательство леммы. Достаточно показать, что если $X_1 = 0$ в области V , то $T(X_1, \dots, X_s) = 0$ в V . Для произвольной точки $q \in V$ найдем такую функцию $f \in \mathcal{F}(M)$, что $f(q) = 0$ и $f = 1$ вне V . Тогда $X_1 = fX_1$ и

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(fX_1, X_2, \dots, X_s) = fT(X_1, \dots, X_s).$$

Правая часть этой формулы обращается в нуль в точке q . Это доказывает лемму. \square

Чтобы завершить доказательство предложения 4.2.2, достаточно показать, что если $(X_1)_p = 0$, то векторное поле $T(X_1, \dots, X_s)$ обращается в нуль в точке p . Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат, определенная в окрестности точки p , так что $X_1 = X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ в U . Мы можем выбрать векторные поля $Y_i \in \mathcal{V}(M)$ ($1 \leq i \leq n$) и функции $f^i \in \mathcal{F}(M)$ так, что $f^i = X_1^i$ и $Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ в некоторой меньшей окрестности V точки p . Тогда $X_1 = f^i Y_i$ в V . По лемме

$$T(X_1, \dots, X_s) = T(f^i Y_i, X_2, \dots, X_s) = f^i T(Y_i, X_2, \dots, X_s).$$

Правая часть этой формулы обращается в нуль в точке p , поскольку $f^i(p) = X_1^i(p) = 0$. \square

Рассмотрим несколько частных значений валентности (r, s) . Очевидно,

$$\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{F}(M),$$

т. е. тензорные поля валентности $(0, 0)$ являются гладкими функциями.

В случае $(r, s) = (1, 0)$, сравнив определение 4.2.1 с приведенным в §2.5 определением векторного поля, мы видим, что

$$\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{V}(M),$$

т. е. тензорные поля валентности $(1, 0)$ — это векторные поля.

Тензорные поля валентности $(0, 1)$ обычно называются *ковекторными полями*. Согласно утверждению 1 предложения 4.2.2, такое поле $T \in \mathcal{T}_1^0(M)$ можно рассматривать как \mathcal{F} -линейное отображение $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$. Иными словами,

$$\mathcal{T}_1^0 = \mathcal{V}', \quad (4.2.4)$$

где \mathcal{V}' — сопряженный к \mathcal{V} \mathcal{F} -модуль.

Напомним (см. §2.5), что векторное поле $X \in \mathcal{V}$ может рассматриваться как дифференцирование алгебры \mathcal{F} , т. е. для любой гладкой функции f определена функция $Xf \in \mathcal{F}$. Если мы зафиксируем $f \in \mathcal{F}$ и рассмотрим Xf как функцию аргумента $X \in \mathcal{V}$, то получим \mathcal{F} -линейное отображение

$$df : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (df)(X) = Xf. \quad (4.2.5)$$

Согласно предложению 4.2.2, df является ковекторным полем, $df \in \mathcal{T}_1^0(M)$, которое называется *дифференциалом* функции f . В несколько ином контексте мы встречались ранее с этим понятием: значение ковекторного поля df в точке p является линейным функционалом $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, который обозначался $d_p f$ и назывался дифференциалом функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ в точке p (см. определение 2.4.5).

Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M . Тогда $x^i \in \mathcal{F}(U)$ ($1 \leq i \leq n$) и определен дифференциал $dx^i \in \mathcal{T}_1^0(U)$. Согласно (4.2.5),

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

т. е. $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ является базисом пространства $T'_p M$, двойственным к базису $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ для каждой точки $p \in U$. Это объясняет выбор обозначения $dx^i|_p$ в формуле (4.2.1). Далее, для векторного поля $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{V}(U)$

$$(dx^i)(X) = (dx^i)\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^j (dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^j \delta_j^i = X^i.$$

Следовательно, для $f \in \mathcal{F}(U)$

$$(df)(X) = Xf = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} (dx^i)(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right)(X),$$

т. е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Это равенство оправдывает название “дифференциал функции f ” для ковекторного поля df .

Итак, в области определения U локальной системы координат определены *координатные векторные поля* $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{V}(U)$ и *координатные ковекторные поля* $dx^i \in \mathcal{T}_1^0(U)$. Набор из $2n$ координатных полей $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, dx^1, \dots, dx^n)$ является системой образующих алгебры $\mathcal{T}(U)$, т. е. любое тензорное поле $T \in \mathcal{T}_s^r(U)$ однозначно представимо в виде суммы (ср. с формулой (4.2.1))

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}, \quad (4.2.6)$$

коэффициенты которой $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{F}(U)$ называются *координатами тензорного поля* T относительно данной локальной системы координат. Обычно этот факт выражают фразой: алгебра тензорных полей на n -мерном многообразии является локально свободной \mathcal{F} -алгеброй с $2n$ образующими. Отметим, что глобальный вариант этого утверждения верен не всегда: алгебра $\mathcal{T}(M)$ может не быть конечно порожденной.

В заключение параграфа приведем правило преобразования координат тензорного поля при замене координат. Пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ и $(U'; x'^1, \dots, x'^n)$ — две локальные системы координат на M . В области $U \cap U'$ эти координаты однозначно выражаются друг через друга

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \quad x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Как мы установили в §2.2, координатные векторные поля преобразуются по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (4.2.7)$$

Аналогичное правило преобразования координатных ковекторных полей выглядит так:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (4.2.8)$$

Сравнивая (4.2.7)–(4.2.8) с формулами (4.1.21)–(4.1.22), мы видим, что матрицы перехода A и B в данном случае совпадают с матрицами Якоби

$$A = \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right), \quad B = A^{-1} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right)$$

и формула (4.1.23) приобретает вид

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{\ell_s}}{\partial x^{j_s}} T_{\ell_1 \dots \ell_s}^{k_1 \dots k_r}. \quad (4.2.9)$$

Это и есть правило преобразования координат тензорного поля при замене системы координат. Эту формулу можно использовать в качестве определения гладкого тензорного поля, ср. с замечанием в конце предыдущего параграфа.

Упражнения

1. Докажите рефлексивность \mathcal{F} -модуля $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$, т. е. что $\mathcal{V}'' = \mathcal{V}$. В отличие от (4.1.2), это утверждение не очевидно, поскольку пространство $\mathcal{V}(M)$ бесконечномерно. В доказательстве должны участвовать некоторые аргументы, использующие локальные координаты, аналогично доказательству предложения 4.2.2.

2. Докажите следующее обобщение предложения 4.2.2: пространство $\mathcal{T}_s^r(M)$ можно отождествить с пространством всех \mathcal{F} -полилинейных отображений

$$T : \underbrace{\mathcal{V}' \times \dots \times \mathcal{V}'}_r \times \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_s \rightarrow \mathcal{F}.$$

3. Докажите, что $\mathcal{F}(M)$ -модули $\mathcal{T}_s^r(M)$ и $\mathcal{T}_r^s(M)$ сопряжены друг другу, а каноническое спаривание

$$\mathcal{T}_s^r(M) \times \mathcal{T}_r^s(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

выражается в координатах формулой

$$\langle S, T \rangle = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}.$$

4.3. Связность на многообразии

Этот параграф — центральный в настоящей главе. Прежде чем приступить к формальному изложению, приведу замечание, которое может рассматриваться как мотивировка основного определения.

Векторное поле $X \in \mathcal{V}(M)$ в локальных координатах записывается в виде $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Координаты векторного поля преобразуются при замене координат по правилу

$$X'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} X^k. \quad (4.3.1)$$

Найдем правило преобразования производных $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$. Для этого сначала применяем правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial X'^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}.$$

Подставляя сюда значение (4.3.1), получаем

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} X^k \right).$$

Дифференцируя произведение в правой части, приходим к искомому правилу преобразования

$$\frac{\partial X'^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j} \frac{\partial X^k}{\partial x^\ell} + \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^\ell} X^k. \quad (4.3.2)$$

Правая часть этой формулы содержит производные $\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^\ell}$ второго порядка, которые не участвуют в правиле (4.2.9) преобразования координат тензора. Таким образом, набор производных $\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right)$ не является семейством координат тензорного поля. Возникает вопрос: нельзя ли исправить ситуацию, добавив к частной производной $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ некоторое алгебраическое выражение, т. е. заменив эту производную оператором

$$\nabla_j X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k, \quad (4.3.3)$$

где Γ_{jk}^i — некоторые функции? Мы пытаемся подобрать эти функции так, чтобы определенный формулой (4.3.3) набор $(\nabla_j X^i)$ представлял координаты некоторого тензорного поля валентности $(1, 1)$, т.е. преобразовывался по правилу (4.2.9) при замене координат. Переходя к реализации этого плана, мы снова возвращаемся к инвариантному (т. е. не зависящему от координат) изложению.

Определение 4.3.1. Связностью на гладком многообразии M называется отображение

$$\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y, \quad (4.3.4)$$

удовлетворяющее условиям:

1) это отображение \mathcal{F} -линейно по первому аргументу, т. е.

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \quad \text{для} \quad X_1, X_2, Y \in \mathcal{V}; \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}; \quad (4.3.5)$$

2) по второму аргументу это отображение аддитивно

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \quad \text{для} \quad X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{V} \quad (4.3.6)$$

и является дифференцированием по отношению к умножению второго аргумента на функцию, т. е.

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y \quad \text{для} \quad X, Y \in \mathcal{V}; \quad f \in \mathcal{F}. \quad (4.3.7)$$

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется ковариантной производной векторного поля Y по направлению поля X (относительно связности ∇).

В следующей главе мы убедимся, что на каждом многообразии существует связность (на самом деле на любом многообразии существует бесконечно много связностей). Продолжим наши рассуждения в предположении, что на M задана связность ∇ . Доказательство следующего утверждения не приводится, поскольку оно аналогично двум ранее доказанным утверждениям: лемме 4.2.3 настоящей главы и лемме 2.4.2 главы 2.

Лемма 4.3.2 (о локализации). Если $X_1 = X_2$ и $Y_1 = Y_2$ на некотором открытом множестве $U \subset M$, то и $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla_{X_2} Y_2$ на U .

Эта лемма позволяет при изучении связности ограничиться рассмотрением векторных полей в области определения локальной системы координат. Если $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M , то определены координатные векторные поля $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{V}(U)$. Представим векторное поле $\nabla_{\partial_i} \partial_j \in \mathcal{V}(U)$ в виде линейной комбинации координатных полей

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (4.3.8)$$

Определяемые этим равенством функции $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ называются *символами Кристоффеля* связности ∇ (относительно данной системы координат). Символы Кристоффеля однозначно определяют связность. Действительно, используя аксиомы (4.3.5)–(4.3.7), мы можем написать для векторных полей $X = X^i \partial_i$ и $Y = Y^i \partial_i$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \left(Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_j \right).$$

Подставляя сюда выражение (4.3.8), приходим к формуле

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k. \quad (4.3.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что значение векторного поля $\nabla_X Y$ в точке p зависит лишь от значения поля X в точке p .

Выведем правило преобразования символов Кристоффеля при замене координат. Пусть (Γ_{ij}^k) — символы Кристоффеля связности ∇ относительно системы координат $(U; x^1, \dots, x^n)$ и (Γ'_{ij}^k) — символы Кристоффеля той же связности ∇ относительно системы координат $(U'; x'^1, \dots, x'^n)$. Согласно (4.3.8),

$$\nabla_{\partial'_i} \partial'_j = \Gamma'^k_{ij} \partial'_k. \quad (4.3.10)$$

В $U \cap U'$ координатные векторные поля связаны равенствами $\partial'_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \partial_\alpha$. Подставив эти значения в (4.3.10) и воспользовавшись аксиомами (4.3.5)–(4.3.7), получим

$$\nabla_{\partial'_i} \partial'_j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \nabla_{\partial_\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \partial_\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \right) \partial_\beta \right). \quad (4.3.11)$$

Участвующую в правой части вторую производную вычисляем по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \right) = \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\ell \partial x'^j}.$$

Подставляем это значение и $\nabla_{\partial_\alpha} \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma$ в (4.3.11)

$$\nabla_{\partial'_i} \partial'_j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma + \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\ell \partial x'^j} \partial_\beta \right).$$

Заметим, что после раскрытия скобок второе слагаемое упростится в силу соотношения $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^\alpha} = \delta_i^\ell$. Произведя это упрощение и изменив обозначение индекса суммирования во втором слагаемом, получим

$$\nabla_{\partial'_i} \partial'_j = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) \partial_\gamma.$$

Наконец, подставим сюда значение $\partial_\gamma = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \partial'_k$:

$$\nabla_{\partial'_i} \partial'_j = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) \partial'_k. \quad (4.3.12)$$

Левые части формул (4.3.10) и (4.3.12) совпадают. Приравнявая правые части этих формул и учитывая линейную независимость векторов ∂'_k ($1 \leq k \leq n$), получаем искомое правило преобразования символов Кристоффеля при замене координат:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (4.3.13)$$

Как видно из этой формулы, символы Кристоффеля не являются координатами тензорного поля.

Нетрудно доказать следующее утверждение: если в области определения U каждой локальной системы координат на многообразии M заданы функции $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$, преобразующиеся по правилу (4.3.13) при замене координат, то формула (4.3.9) корректно определяет связность на M .

Наряду с геометрией, формула (4.3.13) играет большую роль в общей теории относительности, где символы Кристоффеля имеют физический смысл потенциала гравитационного поля; см., например, том 2 известного учебника Ландау – Лифшица.

Будучи определенной на векторных полях, ковариантная производная ∇_X затем однозначно распространяется на тензорные поля произвольной валентности, если дополнительно потребовать ее согласованность с тензорным произведением и сверткой.

Теорема 4.3.3. *Если на гладком многообразии M задана связность ∇ , то для каждого (r, s) существует единственный оператор (обозначаемый тем же символом)*

$$\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M), \quad (X, T) \mapsto \nabla_X T, \quad (4.3.14)$$

который \mathcal{F} -линеен по первому аргументу,

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} T = f_1 \nabla_{X_1} T + f_2 \nabla_{X_2} T \quad \text{для} \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M), \quad (4.3.15)$$

и обладает следующими свойствами.

- 1) $\nabla_X f = Xf$ для $f \in \mathcal{F}(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$.
- 2) В случае $(r, s) = (1, 0)$ оператор (4.3.14) совпадает с участвующим в определении связности оператором (4.3.4).
- 3) Оператор ∇_X аддитивен, т. е. $\nabla_X(T_1 + T_2) = \nabla_X T_1 + \nabla_X T_2$.
- 4) Оператор ∇_X является дифференцированием по отношению к тензорному произведению, т. е.

$$\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T). \quad (4.3.16)$$

- 5) Оператор ∇_X перестановочен со свертками, т. е.

$$\nabla_X(C_\ell^k T) = C_\ell^k(\nabla_X T) \quad \text{для} \quad T \in \mathcal{T}_s^r(M); \quad 1 \leq k \leq r, 1 \leq \ell \leq s. \quad (4.3.17)$$

В координатах этот оператор выражается формулой

$$\nabla_X T = X^k \nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}, \quad (4.3.18)$$

где

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} + \sum_{a=1}^r \Gamma_{kp}^{i_a} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{a-1} p i_{a+1} \dots i_r} - \sum_{a=1}^s \Gamma_{kj_a}^p T_{j_1 \dots j_{a-1} p j_{a+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (4.3.19)$$

Как и ранее, тензорное поле $\nabla_X T$ называется ковариантной производной поля T по направлению X .

Набросок доказательства. Докажем справедливость равенств (4.3.18)–(4.3.19) в предположении существования оператора (4.3.14), удовлетворяющего перечисленным условиям. Тем самым будет доказана единственность.

Заметим, что из условий 3) и 1) вытекает следующее правило дифференцирования произведения функции и тензорного поля:

$$\nabla_X(fT) = f \nabla_X T + (Xf) T \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}. \quad (4.3.20)$$

Используя (4.3.15) и (4.3.20), для $\nabla_X T$ легко доказать принцип локализации, аналогичный лемме 4.3.2, который позволяет свести изучение ковариантной производной $\nabla_X T$ к случаю тензорного поля T , заданного лишь в области определения U некоторой локальной системы координат.

Для координатных полей $\partial_i \in \mathcal{V}(U)$ и $dx^j \in \mathcal{T}_1^0(U)$ ковариантная производная $\nabla_{\partial_i}(dx^j) \in \mathcal{T}_1^0(U)$ единственным образом представима в виде

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) = \tilde{\Gamma}_{ik}^j dx^k \quad (4.3.21)$$

с некоторыми функциями $\tilde{\Gamma}_{ik}^j \in \mathcal{F}(U)$. Выразим эти функции через символы Кристоффеля. Применяя оператор ∇_{∂_i} к равенству

$$C_1^1(dx^j \otimes \partial_k) = \langle dx^j, \partial_k \rangle = \delta_k^j = \text{const}$$

и используя (4.3.16)–(4.3.17), получаем

$$C_1^1(\nabla_{\partial_i}(dx^j) \otimes \partial_k + dx^j \otimes \nabla_{\partial_i} \partial_k) = 0.$$

Подставим сюда значения (4.3.8) и (4.3.21) ковариантных производных

$$C_1^1(\tilde{\Gamma}_{il}^j dx^\ell \otimes \partial_k + \Gamma_{ik}^\ell dx^j \otimes \partial_\ell) = 0.$$

Используя \mathcal{F} -линейность оператора свертки C_1^1 , переписываем это равенство в виде

$$\tilde{\Gamma}_{il}^j C_1^1(dx^\ell \otimes \partial_k) + \Gamma_{ik}^\ell C_1^1(dx^j \otimes \partial_\ell) = 0.$$

Поскольку $C_1^1(dx^\ell \otimes \partial_k) = \delta_k^\ell$, окончательно получаем

$$\tilde{\Gamma}_{il}^j \delta_k^\ell + \Gamma_{ik}^\ell \delta_\ell^j = \tilde{\Gamma}_{ik}^j + \Gamma_{ik}^j = 0.$$

Таким образом, $\tilde{\Gamma}_{ik}^j = -\Gamma_{ik}^j$ и формула (4.3.21) приобретает вид

$$\nabla_{\partial_i}(dx^j) = -\Gamma_{ik}^j dx^k. \quad (4.3.22)$$

Теперь для ковекторного поля $T = T_j dx^j$ находим с помощью (4.3.22)

$$\begin{aligned} \nabla_X T &= \nabla_{X^k \partial_k}(T_j dx^j) = X^k \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^k} dx^j + T_j \nabla_{\partial_k}(dx^j) \right) \\ &= X^k \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^k} dx^j - T_j \Gamma_{k\ell}^j dx^\ell \right), \end{aligned}$$

что может быть записано в виде

$$\nabla_X T = X^k (\nabla_k T_j) dx^j, \quad \nabla_k T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^p T_p.$$

Это совпадает с (4.3.18)–(4.3.19) при $(r, s) = (0, 1)$.

С помощью (4.3.8) и (4.3.22) нетрудно доказать справедливость (4.3.18)–(4.3.19) для любых (r, s) . Чтобы не писать слишком длинных формул, мы продемонстрируем это доказательство в случае $(r, s) = (1, 1)$; в общем случае доказательство то же, хотя формулы значительно более громоздкие.

Представим тензорное поле $T \in \mathcal{T}_1^1(U)$ в виде

$$T = T_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства можно рассматривать как тензорное произведение трех полей: $T_j^i \in \mathcal{T}_0^0(U)$, $\partial_i \in \mathcal{T}_0^1(U)$ и $dx^j \in \mathcal{T}_1^0(U)$. Ковариантные производные последних двух множителей находятся по формулам (4.3.8) и (4.3.22) соответственно, в то время как ковариантная производная функции T_j^i выражается формулой

$$\nabla_X (T_j^i) = X(T_j^i) = X^k \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla_X T &= \nabla_X (T_j^i \partial_i \otimes dx^j) \\ &= \nabla_X (T_j^i) \partial_i \otimes dx^j + T_j^i (\nabla_X \partial_i) \otimes dx^j + T_j^i \partial_i \otimes \nabla_X (dx^j) \\ &= X^k \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} \partial_i \otimes dx^j + T_j^i (\nabla_{\partial_k} \partial_i) \otimes dx^j + T_j^i \partial_i \otimes \nabla_{\partial_k} (dx^j) \right) \\ &= X^k \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} \partial_i \otimes dx^j + T_j^i \Gamma_{ki}^\ell \partial_\ell \otimes dx^j + T_j^i \partial_i \otimes (-\Gamma_{k\ell}^j dx^\ell) \right). \end{aligned}$$

После очевидных изменений в обозначении индексов суммирования эта формула приобретает вид

$$\nabla_X T = X^k \left(\frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^i T_j^p - \Gamma_{kj}^p T_p^i \right) \partial_i \otimes dx^j$$

или

$$\nabla_X T = X^k \nabla_k T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \quad \text{где} \quad \nabla_k T_j^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^i T_j^p - \Gamma_{kj}^p T_p^i.$$

Это совпадает с (4.3.18)–(4.3.19) при $(r, s) = (1, 1)$. На этом мы заканчиваем доказательство единственности в теореме 4.3.3.

Доказательство существования проводится по следующей схеме. Сначала определяем оператор (4.3.14) в области действия локальных координат формулами (4.3.18)–(4.3.19). Затем доказываем корректность этого определения, т. е. что координаты тензорного поля $\nabla_X T$ преобразуются по правилу (4.2.9) при замене координат; при этом надо использовать правило (4.3.13) преобразования символов Кристоффеля. Рекомендую вам самостоятельно провести доказательство корректности для $T \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Наконец, доказываем, что так определенный оператор (4.3.14) обладает всеми перечисленными в теореме свойствами. \square

В заключение параграфа еще раз вернемся к определению 4.3.1 и заметим, что для фиксированного $Y \in \mathcal{V}(M)$ отображение

$$\nabla Y : \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (\nabla Y)(X) = \nabla_X Y$$

$\mathcal{F}(M)$ -линейно. Согласно предложению 4.2.2, ∇Y является тензорным полем валентности $(1, 1)$. Тем самым связность может рассматриваться как \mathbb{R} -линейный оператор (ковариантная производная)

$$\nabla : \mathcal{V}(M) = \mathcal{T}_0^1(M) \rightarrow \mathcal{T}_1^1(M), \quad Y \mapsto \nabla Y. \quad (4.3.23)$$

Как видно из (4.3.9), в координатах этот оператор выглядит следующим образом: для $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\nabla Y = \nabla_k Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k, \quad \text{где} \quad \nabla_k Y^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^i Y^p. \quad (4.3.24)$$

Вполне аналогично, ковариантная производная на тензорных полях произвольной валентности может рассматриваться как \mathbb{R} -линейный оператор

$$\nabla : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r(M), \quad T \mapsto \nabla T, \quad (4.3.25)$$

задаваемый в координатах равенством

$$\nabla T = \nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^k, \quad (4.3.26)$$

в котором координаты $\nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ выражаются через координаты поля T формулой (4.3.19). Отметим, что в случае $(r, s) = (0, 0)$ оператор (4.3.25) выглядит так:

$$\nabla : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{T}_1^0(M)$$

и ∇f совпадает с введенным в предыдущем параграфе дифференциалом df функции $f \in \mathcal{F}(M)$.

Упражнения

1. Пусть (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты на \mathbb{R}^3 и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ — координатные векторные поля. Зададим на \mathbb{R}^3 связность, положив $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$. Сферические координаты (r, φ, ψ) на \mathbb{R}^3 определяются равенствами

$$x^1 = r \cos \varphi \cos \psi, \quad x^2 = r \cos \varphi \sin \psi, \quad x^3 = r \sin \varphi.$$

Найдите символы Кристоффеля заданной связности относительно сферических координат.

2. Дивергенцией векторного поля $X \in \mathcal{V}(M)$ (относительно связности ∇) называется функция

$$\operatorname{div} X = C_1^1(\nabla X) = \nabla_i X^i.$$

Найдите выражение для дивергенции векторного поля

$$X = X^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^3)$$

в сферических координатах относительно связности, введенной в упражнении 1.

4.4. Тензоры кручения и кривизны

Пусть на многообразии M задана связность ∇ . Определим отображение

$$T : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M) \tag{4.4.1}$$

формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{4.4.2}$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y , см. §2.5. Покажем, что отображение (4.4.1) \mathcal{F} -линейно по обоим аргументам, т. е. является тензорным полем валентности $(1, 2)$ (см. предложение 4.2.2). Это поле $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$ называется *тензором кручения* связности ∇ . Достаточно проверить \mathcal{F} -линейность по первому аргументу в силу равноправия X и Y в формуле (4.4.2). Напомним, что в §2.5 доказано следующее свойство скобки Ли:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}.$$

Используя это свойство и равенства (4.3.5), (4.3.7) из определения связности, выводим

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_XY - f\nabla_YX - (Yf)X - f[X, Y] + (Yf)X \\ &= f\nabla_XY - f\nabla_YX - f[X, Y] = fT(X, Y). \end{aligned}$$

Найдем координаты тензора кручения, для чего положим $X = \partial_i$ и $Y = \partial_j$ в (4.4.2). Используя (4.3.8) и учитывая, что скобка Ли координатных полей равна нулю, получим

$$T(\partial_i, \partial_j) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k,$$

т. е.

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k. \quad (4.4.3)$$

Говорят, что связность ∇ *симметрична*, если ее тензор кручения тождественно равен нулю. Происхождение этого названия очевидно: связность симметрична тогда и только тогда, когда символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Определим еще одно отображение

$$R : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M) \quad (4.4.4)$$

формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (4.4.5)$$

Оказывается, что это отображение \mathcal{F} -линейно по каждому из трех аргументов. Доказательство этого утверждения вполне аналогично приведенному выше доказательству линейности отображения (4.4.1), хотя

и несколько длиннее, поскольку не все аргументы равноправны; оставляю это доказательство в качестве упражнения. Согласно предложению 4.2.2, R является тензорным полем валентности $(1, 3)$, которое называется *тензором кривизны* связности ∇ . Координаты тензора кривизны находятся посредством вычислений, аналогичных проделанным выше при выводе формулы (4.4.3). Опуская эти вычисления, приведу результат:

$$R^\ell_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^\ell_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\ell_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^\ell_{jp} \Gamma^p_{ki} - \Gamma^\ell_{kp} \Gamma^p_{ji}. \quad (4.4.6)$$

Это — одна из важнейших формул тензорного анализа.

Положив $X = \partial_k$, $Y = \partial_\ell$ и $Z = Z^i \partial_i$ в (4.4.5), придем к *формуле коммутации* для вторых ковариантных производных:

$$(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) Z^i = R^i_{pkl} Z^p. \quad (4.4.7)$$

В отличие от вторых частных производных $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell}$, вторые ковариантные производные $\nabla_k \nabla_\ell$ не симметричны и тензор кривизны измеряет степень этой несимметричности. Аналогичная формула для тензорных полей произвольной валентности выглядит так:

$$(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{a=1}^r R^i_{a pkl} T^{i_1 \dots i_{a-1} p i_{a+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \sum_{a=1}^s R^p_{j_a k \ell} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{a-1} p j_{a+1} \dots j_s}. \quad (4.4.8)$$

Мы не приводим доказательства этой формулы, ограничившись лишь его обсуждением. Найдём вторые ковариантные производные

$$\nabla_k \nabla_\ell T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

пользуясь формулой (4.3.19). Получится довольно громоздкое выражение, являющееся линейным дифференциальным оператором второго порядка от координат поля T . Затем произведем альтернирование этого выражения по индексам k и ℓ , т. е. вычислим разность $(\nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k) T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$. Понятно, что все слагаемые второго порядка (т. е. содержащие вторые производные) сократятся при альтернировании в силу симметричности вторых частных производных. Несколько неожиданным обстоятельством оказывается то, что и все слагаемые первого порядка также сокращаются при этом альтернировании, т. е. в результате остается чисто алгебраическое выражение, не содержащее производных. Приведя подобные члены в этом выражении, можно убедиться,

что все его коэффициенты выражаются через тензор кривизны посредством формулы (4.4.6). В итоге получается формула (4.4.8). Я настоятельно рекомендую проделать эти вычисления для $(r, s) = (1, 1)$.

Упражнения

1. Докажите, что если связность симметрична, то ее тензор кривизны удовлетворяет *первому тождеству Бианки*

$$R^\ell_{ijk} + R^\ell_{jki} + R^\ell_{kij} = 0.$$

2. Считая связность симметричной, найдите ковариантную производную тензора кривизны и докажите *второе тождество Бианки*

$$\nabla_m R^\ell_{ijk} + \nabla_j R^\ell_{ikm} + \nabla_k R^\ell_{imj} = 0.$$

4.5. Параллельный перенос

Напомним, что (*гладкой параметризованной*) кривой в многообразии M называется гладкое отображение $\mathbb{R} \supset [a, b] \xrightarrow{\gamma} M$. Первые два слова в этом определении заключены в скобки, поскольку они обычно опускаются. В локальных координатах такая кривая задается гладкими функциями: $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$. (*Гладким*) векторным полем вдоль кривой γ называется отображение X , ставящее в соответствие каждому $t \in [a, b]$ вектор $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, причем это отображение должно быть гладким в следующем смысле: в локальных координатах $X(t) = X^i(t)\partial_i$ с гладкими функциями $X^i(t)$. Примером векторного поля вдоль γ является *вектор скорости* $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma^i(t)}{dt}\partial_i$. Обозначим через $\gamma^*\mathcal{V}$ множество всех гладких векторных полей вдоль кривой γ .

Предложение 4.5.1. Пусть на многообразии M задана связность ∇ . Тогда для каждой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ однозначно определен оператор

$$\frac{D}{dt} : \gamma^*\mathcal{V} \rightarrow \gamma^*\mathcal{V},$$

обладающий следующими свойствами:

- 1) $\frac{D(X+Y)}{dt} = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$;
- 2) если $f(t)$ — гладкая функция на $[a, b]$, то

$$\frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt};$$

3) если векторное поле $X(t)$ вдоль γ индуцировано векторным полем $Y \in \mathcal{V}(M)$, т. е. $X(t) = Y(\gamma(t))$, то $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} Y$.

Векторное поле $\frac{DX}{dt}$ называется абсолютной производной поля $X(t)$ вдоль γ .

Доказательство. Сначала докажем единственность. На той части кривой, которая лежит в области определения локальной системы координат, мы можем написать $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ и $X(t) = X^i(t)\partial_i$. Пользуясь свойствами 1)–3), имеем

$$\frac{DX}{dt} = \frac{dX^j}{dt}\partial_j + X^j \frac{D\partial_j}{dt} = \frac{dX^j}{dt}\partial_j + X^j \nabla_{\dot{\gamma}} \partial_j = \frac{dX^k}{dt}\partial_k + X^j \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Таким образом,

$$\frac{DX}{dt} = \left(\frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i X^j \right) \partial_k. \quad (4.5.1)$$

Это доказывает единственность. Обратно, приняв (4.5.1) в качестве определения оператора $\frac{D}{dt}$, легко доказать его инвариантность (независимость от выбора координат) и свойства 1)–3). \square

Говорим, что векторное поле $X(t)$ вдоль кривой γ *параллельно вдоль γ* , если $\frac{DX}{dt} = 0$. Согласно (4.5.1), это означает, что

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j X^k = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (4.5.2)$$

Заметим, что (4.5.2) является системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Как известно, решение задачи Коши для такой системы существует и единственно. Таким образом, получаем: Для любого $t_0 \in [a, b]$ и любого вектора $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}$ существует единственное параллельное вдоль кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ векторное поле $X(t)$, удовлетворяющее $X(t_0) = X_0$.

Пусть две точки $p, q \in M$ соединены кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, т. е. $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$. Определим отображение

$$\mathfrak{T}_{\gamma} : T_p M \rightarrow T_q M \quad (4.5.3)$$

следующим образом. Для $X_0 \in T_p M$ находим параллельное вдоль γ векторное поле $X(t)$, удовлетворяющее начальному условию $X(a) =$

X_0 , и полагаем $\mathfrak{T}_\gamma(X_0) = X(b)$. Это отображение называется *параллельным переносом векторов из точки p в точку q вдоль кривой γ* . Мы утверждаем, что это отображение является изоморфизмом векторных пространств. Действительно, линейность отображения \mathfrak{T}_γ следует из известного факта: решение линейной системы линейно зависит от начальных данных. Инъективность отображения \mathfrak{T}_γ устанавливается следующим образом. Пусть $\mathfrak{T}_\gamma(X_0) = 0$ для некоторого $X_0 \in T_p M$. Тогда соответствующее решение $X(t)$ системы (4.5.2) удовлетворяет $X(b) = 0$ и, следовательно, $X(t) = 0$ для всех t в силу единственности решения задачи Коши. В частности, $X_0 = X(a) = 0$. Остается воспользоваться очевидным утверждением: линейное инъективное отображение между векторными пространствами одинаковой размерности есть изоморфизм.

В §2.4 мы подчеркивали, что касательные пространства $T_p M$ и $T_q M$ являются непересекающимися множествами при $p \neq q$, никак не связанными друг с другом. На многообразии со связностью ситуация иная: каждая кривая γ , соединяющая точки p и q , связывает пространства $T_p M$ и $T_q M$ посредством параллельного переноса вдоль γ . Этим отчасти объясняется термин “связность”.

Рассмотрим две кривые $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow M$ ($i = 1, 2$), соединяющие точки p и q , т. е. $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) = p$ и $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2) = q$. Возникает естественный вопрос: как связаны между собой изоморфизмы $\mathfrak{T}_{\gamma_1} : T_p M \rightarrow T_q M$ и $\mathfrak{T}_{\gamma_2} : T_p M \rightarrow T_q M$? Этот вопрос весьма не прост. Приблизительный ответ на него звучит так: разница между этими изоморфизмами определяется тензором кривизны. Если говорить более точно, то справедливо, например, следующее утверждение: тензор кривизны связности ∇ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда параллельные переносы $\mathfrak{T}_{\gamma_1} : T_p M \rightarrow T_q M$ и $\mathfrak{T}_{\gamma_2} : T_p M \rightarrow T_q M$ совпадают для любых точек $p, q \in M$ и любых гомотопных друг другу кривых γ_1 и γ_2 , соединяющих эти точки.

Упражнение

Как показывает следующая конструкция, связность ∇ однозначно восстанавливается, если известен параллельный перенос вдоль всех кривых, определяемый этой связностью. Действительно, для вектора $X \in T_p M$ выберем кривую $\gamma : [0, b) \rightarrow M$, выходящую из точки p в направлении X , т. е. $\gamma(0) = p$ и $\dot{\gamma}(0) = X$. Пусть $\mathfrak{T}_\gamma^t : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ параллельный перенос из точки p в точку $\gamma(t)$ вдоль кривой $\gamma|_{[0, t]}$. Тогда

для любого векторного поля $Y \in \mathcal{V}(M)$ справедливо равенство

$$(\nabla_X Y)_p = \left. \frac{d((\mathfrak{T}_\gamma^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (4.5.4)$$

Отметим, что вектор $(\mathfrak{T}_\gamma^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)})$ принадлежит пространству $T_p M$ при любом t , поэтому определена производная, участвующая в правой части формулы (4.5.4). Докажите эту формулу.

Литература, рекомендуемая к этой главе: [7, 15, 23].

Глава 5

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

5.1. Определение риманова многообразия. Связность Леви-Чивиты

Напомним, что в §2.13 мы уже ввели понятие римановой метрики на многообразии. Повторим его здесь в несколько иных терминах.

Римановой метрикой на гладком многообразии M называется гладкое ковариантное тензорное поле $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ валентности $(0, 2)$, которое симметрично, $g(X, Y) = g(Y, X)$, и положительно определено во всех точках, т. е. $g_p(X, X) > 0$ для любой точки $p \in M$ и для любого вектора $0 \neq X \in T_p M$. Многообразие вместе с зафиксированной на нем римановой метрикой называется *римановым многообразием*. Риманово многообразие обычно обозначается (M, g) . Иногда, впрочем, это обозначение сокращается до M , если из контекста ясно, о какой метрике идет речь. Само тензорное поле g обычно называют *метрическим тензором*.

В локальных координатах метрический тензор выглядит так:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (5.1.1)$$

где $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ — гладкие функции, заданные в области определения локальной системы координат; причем матрица (g_{ij}) симметрична и положительно определена. В старых учебниках по геометрии

формула (5.1.1) писалась в виде

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.1.2)$$

где ds интерпретировалось как дифференциал расстояния между близкими точками (x^1, \dots, x^n) и $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$. При замене координат функции g_{ij} преобразуются по правилу преобразования координат тензорного поля валентности $(0, 2)$:

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j} g_{k\ell}. \quad (5.1.3)$$

Положительно определенная матрица (g_{ij}) обратима. Обозначим обратную матрицу через (g^{ij}) . Эта матрица также симметрична и, как легко следует из (5.1.3), ее компоненты преобразуются при замене координат по формуле

$$g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell} g^{k\ell}. \quad (5.1.4)$$

Это означает, что g^{-1} является контравариантным тензорным полем, т. е. $g^{-1} \in \mathcal{T}_0^2(M)$.

Метрический тензор определяет *скалярное произведение* в касательном пространстве $T_p M$ для каждой точки $p \in M$. Мы будем обозначать это скалярное произведение через $\langle X, Y \rangle_g = g(X, Y)$, часто сокращая его до $\langle X, Y \rangle$. Таким образом,

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle X, Y \rangle = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \quad \text{для } X, Y \in T_p M.$$

Скалярное произведение определяет *норму вектора* $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ и *угол между векторами* $\cos \varphi = \langle X, Y \rangle / \|X\| \|Y\|$ для $X, Y \in T_p M$. Заметим также, что для двух гладких векторных полей $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ скалярное произведение $\langle X, Y \rangle$ является гладкой функцией на M .

Скалярное произведение определяет канонический изоморфизм между пространством $T_p M$ и сопряженным пространством $T'_p M$ для каждой точки $p \in M$. Действительно, для фиксированного вектора $X \in T_p M$ отображение $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $Y \mapsto \langle X, Y \rangle$ является линейным функционалом, т. е. элементом пространства $T'_p M$. Таким образом, любой вектор может одновременно рассматриваться как ковектор. Мы обычно будем рассматривать этот изоморфизм как отождествление, т. е.

$$T_p M = T'_p M.$$

В координатах это отождествление выражается формулой

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X_i dx^i,$$

где

$$X_i = g_{ij} X^j, \quad X^i = g^{ij} X_j. \quad (5.1.5)$$

Таким образом, мы перестаем различать векторы и ковекторы, а вместо этого говорим о ковариантных и контравариантных координатах вектора.

Отождествление векторов и ковекторов затем распространяется на тензоры и тензорные поля:

$$\mathcal{T}_s^r(M) = \mathcal{T}_0^{r+s}(M) = \mathcal{T}_{r+s}^0(M).$$

Мы не различаем ковариантные и контравариантные тензоры, а вместо этого говорим о ковариантных и контравариантных координатах одного и того же тензора. Например, для тензора второй валентности в координатах

$$T^{ij} = g^{ik} g^{jl} T_{kl}, \quad T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl}. \quad (5.1.6)$$

Можно также использовать смешанные координаты двух сортов того же тензора:

$$T^i_j = g^{ik} T_{kj}, \quad T_i^j = g^{jk} T_{ik}. \quad (5.1.7)$$

Операции (5.1.5)–(5.1.7) называются *поднятием и опусканием индексов тензора*.

Чтобы убедиться, что на каждом многообразии существует риманова метрика, воспользуемся теоремой Уитни. Сначала упомянем, что евклидова метрика e на \mathbb{R}^N задается в декартовых координатах формулой

$$\langle X, Y \rangle_e = \sum_{\alpha=1}^N X^\alpha Y^\alpha \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N.$$

Согласно теореме 2.8.1, любое многообразие можно вложить в евклидово пространство достаточно большой размерности. Пусть $r : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ — такое вложение. Тогда мы можем определить риманову метрику на M формулой

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle (d_p r)(X), (d_p r)(Y) \rangle_e \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p M,$$

где $d_p r : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^N$ — дифференциал вложения r . Говорят, что определенная таким образом риманова метрика g на M *индуцирована* евклидовой метрикой e посредством вложения r . В локальных координатах эта метрика задается формулой

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^j}, \quad \text{если} \quad r = (r^1(x^1, \dots, x^n), \dots, r^N(x^1, \dots, x^n)). \quad (5.1.8)$$

Формула (5.1.8) устанавливает также мостик между римановой геометрией и дифференциальной геометрией, читаемой на 2-м курсе, большая часть которой посвящена изучению двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Действительно, переобозначив при $n = 2$ и $N = 3$

$$u = x^1, \quad v = x^2; \quad E = g_{11}, \quad F = g_{12}, \quad G = g_{22},$$

мы можем переписать (5.1.2) в виде

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (5.1.9)$$

где, согласно (5.1.8),

$$E = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle_e, \quad F = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle_e, \quad G = \left\langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle_e. \quad (5.1.10)$$

Формулы (5.1.9)–(5.1.10) являются определением первой квадратичной формы поверхности в обозначениях Гаусса, см. [13]. Напомним, что *внутренней геометрией поверхностей* называется та часть дифференциальной геометрии, которая изучает те свойства поверхности, которые зависят лишь от ее первой квадратичной формы. Таким образом, метрический тензор есть многомерное обобщение первой квадратичной формы поверхности, а риманова геометрия может рассматриваться как многомерный аналог внутренней геометрии поверхностей. К этой аналогии мы в дальнейшем будем неоднократно возвращаться.

Пусть (M, g) и (M', g') — два римановых многообразия. Говорим, что гладкое отображение $\varphi : M \rightarrow M'$ *сохраняет риманову метрику*, если для любой точки $p \in M$

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle d_p \varphi(X), d_p \varphi(Y) \rangle_{g'} \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p M,$$

где $d_p\varphi : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}M'$ — дифференциал отображения φ . Если, дополнительно, это отображение биективно, то говорим, что φ — *изометрия римановых многообразий*.

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Говорим, что связность ∇ на M *совместна с метрикой*, если параллельный перенос относительно этой связности сохраняет скалярное произведение, т. е. если $X(t)$ и $Y(t)$ — параллельные вдоль кривой $\gamma(t)$ векторные поля, то скалярное произведение $\langle X(t), Y(t) \rangle$ постоянно.

Лемма 5.1.1. *Пусть связность ∇ совместна с метрикой. Если $X(t)$ и $Y(t)$ — векторные поля вдоль кривой $\gamma(t)$, то*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle. \quad (5.1.11)$$

Доказательство. Для некоторого t_0 в пространстве $T_{\gamma(t_0)}M$ выберем ортонормированный базис $(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0))$ и затем продолжим каждый вектор $e_i(t_0)$ до параллельного вдоль γ векторного поля $e_i(t)$. Тогда $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ есть ортонормированный базис пространства $T_{\gamma(t)}M$ при каждом t , поскольку параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. Пусть $X(t) = X^i(t)e_i(t)$ и $Y(t) = Y^i(t)e_i(t)$ — векторные поля вдоль γ . Тогда $\langle X, Y \rangle = \sum_i X^i Y^i$ и

$$\frac{DX}{dt} = \frac{dX^i}{dt}e_i, \quad \frac{DY}{dt} = \frac{dY^i}{dt}e_i.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \sum_i \left(\frac{dX^i}{dt}Y^i + X^i \frac{dY^i}{dt} \right) = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

□

Следствие 5.1.2. *Для любых трех векторных полей $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ справедливо равенство*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (5.1.12)$$

Доказательство. Для фиксированной точки $p \in M$ выберем кривую $\gamma(t)$ так, что $\gamma(0) = p$ и $\dot{\gamma}(0) = X_p$, и применим (5.1.11)

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{X_p} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{X_p} Z \rangle.$$

Это доказывает (5.1.12), поскольку точка p произвольна. \square

Следующее утверждение часто называют основной теоремой римановой геометрии, хотя его доказательство несложно.

Теорема 5.1.3. *На римановом многообразии существует единственная симметричная связность, совместная с метрикой.*

Отсюда, в частности, следует анонсированное в §3 предыдущей главы утверждение: на любом многообразии существует связность. Связность, существование и единственность которой гарантирует теорема 5.1.3, иногда называют *римановой связностью*, чтобы подчеркнуть, что она определяется римановой метрикой; но чаще ее называют *связностью Леви-Чивиты* по имени ее автора.

Доказательство. Сначала докажем единственность, для чего получим явную формулу, выражающую символы Кристоффеля через метрический тензор.

Пусть ∇ — симметричная связность, совместная с метрикой, и $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M . Тогда $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle$. Применяя правило (5.1.12), получаем

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k \rangle. \quad (5.1.13)$$

Подставив сюда значение $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^\ell \partial_\ell$, получим

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^\ell \langle \partial_\ell, \partial_k \rangle + \Gamma_{ik}^\ell \langle \partial_j, \partial_\ell \rangle = \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} + \Gamma_{ik}^\ell g_{j\ell}.$$

Тем самым мы пришли к линейной системе уравнений относительно символов Кристоффеля

$$g_{k\ell} \Gamma_{ij}^\ell + g_{j\ell} \Gamma_{ik}^\ell = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \quad (5.1.14)$$

где индексы i, j, k могут принимать произвольные значения. Эта система легко решается. Действительно, допишем к (5.1.14) еще два уравнения, первое из которых получается из (5.1.14) перестановкой индексов i и j , а второе — перестановкой индексов i и k

$$\begin{aligned} g_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell + g_{j\ell}\Gamma_{ik}^\ell &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \\ g_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell + g_{i\ell}\Gamma_{jk}^\ell &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}, \\ g_{i\ell}\Gamma_{jk}^\ell + g_{j\ell}\Gamma_{ik}^\ell &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отметим, что при этом мы воспользовались симметричностью связности, т. е. симметричностью символов Кристоффеля по нижним индексам. Сложив первые два уравнения и вычтя из суммы третье уравнение, получаем

$$2g_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Отсюда символы Кристоффеля однозначно находятся, поскольку $(g_{k\ell})$ — невырожденная матрица. А именно умножим эту формулу на g^{pk} , произведем суммирование по k и воспользуемся тем, что $g^{pk}g_{k\ell} = \delta_\ell^p$. В итоге получаем

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kp}\left(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right). \quad (5.1.15)$$

Тем самым утверждение о единственности доказано.

Существование доказывается по следующей схеме. Определим символы Кристоффеля формулой (5.1.15) в локальных координатах. Затем докажем корректность этого определения, т. е. что при замене координат так определенные символы Кристоффеля преобразуются по формуле (4.3.13). Это делается путем непосредственных вычислений, исходя из формул (5.1.3)–(5.1.4). Тем самым симметричная связность ∇ корректно определена. Остается доказать ее совместность с метрикой. Для этого сначала доказываем, что из определения (5.1.15) вытекает справедливость формулы (5.1.13). В свою очередь, как нетрудно видеть, формула (5.1.13) эквивалентна (5.1.12), что означает совместность связности с метрикой. \square

Полученная в ходе доказательства формула (5.1.15) является одной из основных формул римановой геометрии, она будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Упражнения

1. Обобщите формулу (5.1.8) в следующем направлении. Для риманова многообразия (M, g) метрика g индуцирует некоторую вполне определенную риманову метрику на любом подмногообразии $A \subset M$ так, что вложение касательных пространств $T_p A \subset T_p M$ сохраняет скалярное произведение для любой точки $p \in A$.

2. Как мы знаем, связность определяет ковариантную производную тензорных полей произвольной валентности. Докажите, что симметричная связность ∇ на римановом многообразии является связностью Леви-Чивиты тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$. Отсюда следует правило, облегчающее многие вычисления с тензорами: операции поднятия и опускания индексов перестановочны с ковариантным дифференцированием. Например, для тензорных полей валентности 2

$$\nabla_k T^i_j = g^{ip} \nabla_k T_{pj} = g_{jp} \nabla_k T^{ip}.$$

3. Пусть (M, g) — риманово многообразие. Для подмногообразия $A \subset M$ пусть \tilde{g} — индуцированная риманова метрика на A , как в упражнении 1. Докажите, что связность Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ многообразия (A, \tilde{g}) выражается через связность Леви-Чивиты ∇ многообразия (M, g) следующим образом. Пусть $p \in A$, $X \in T_p A$ и Y — векторное поле на A . Продолжим Y до векторного поля $\hat{Y} \in \mathcal{V}(M)$. Тогда

$$\tilde{\nabla}_X Y = P(\nabla_X \hat{Y}),$$

где $P : T_p M \rightarrow T_p A$ — ортогональная проекция.

5.2. Тензор кривизны риманова многообразия

Напомню, что для произвольной связности ∇ тензор кривизны определяется формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad \text{для} \quad X, Y, Z \in \mathcal{V}(M). \quad (5.2.1)$$

В случае риманова многообразия (M, g) тензор кривизны связности Леви-Чивиты называют *тензором кривизны метрики g* , или *тензором кривизны Римана*. В этом параграфе мы рассмотрим алгебраические свойства этого тензора.

Предложение 5.2.1. *На римановом многообразии тензор кривизны Римана обладает следующими симметриями:*

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \quad (5.2.2)$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = -\langle R(X, Y)U, Z \rangle, \quad (5.2.4)$$

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = \langle R(Z, U)X, Y \rangle. \quad (5.2.5)$$

Доказательство. Мы знаем, что значение векторного поля $R(X, Y)Z$ в точке p зависит лишь от значений полей X, Y, Z в этой точке. Благодаря этому достаточно установить справедливость каждого из доказываемых равенств в случае, когда попарные скобки Ли всех участвующих в равенстве векторных полей тождественно равны нулю. В этом случае формула (5.2.1) упрощается до следующей

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \quad (5.2.6)$$

и равенство (5.2.2) становится очевидным. Отметим также, что симметричность связности означает в данном случае, что

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0. \quad (5.2.7)$$

Согласно (5.2.6),

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y. \end{aligned}$$

В силу (5.2.7), все слагаемые в правой части этого равенства попарно сокращаются и мы приходим к (5.2.3).

Равенство (5.2.4) эквивалентно тождеству $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$. Так как связность ∇ совместна с метрикой, то

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle = X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}XY \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2}YX \langle Z, Z \rangle = \frac{1}{2}[X, Y] \langle Z, Z \rangle = 0.\end{aligned}$$

Тождество (5.2.5) является чисто алгебраическим следствием трех предыдущих. Действительно, из (5.2.2) и (5.2.3) следует, что

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = -\langle R(Y, X)Z, U \rangle = \langle R(X, Z)Y, U \rangle + \langle R(Z, Y)X, U \rangle,$$

а из (5.2.4) и (5.2.3) следует, что

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = -\langle R(X, Y)U, Z \rangle = \langle R(Y, U)X, Z \rangle + \langle R(U, X)Y, Z \rangle.$$

Складывая последние две формулы, получаем

$$\begin{aligned}2\langle R(X, Y)Z, U \rangle &= \langle R(X, Z)Y, U \rangle + \langle R(Z, Y)X, U \rangle + \langle R(Y, U)X, Z \rangle \\ &\quad + \langle R(U, X)Y, Z \rangle.\end{aligned}$$

Меняя в этом равенстве местами X и Z , а также Y и U , имеем

$$\begin{aligned}2\langle R(Z, U)X, Y \rangle &= \langle R(Z, X)U, Y \rangle + \langle R(X, U)Z, Y \rangle + \langle R(U, Y)Z, X \rangle \\ &\quad + \langle R(Y, Z)U, X \rangle.\end{aligned}$$

В силу (5.2.2) и (5.2.3) правые части двух последних формул совпадают.

□

Пусть (R^i_{jkl}) координаты тензора кривизны относительно локальной системы координат. Опустив верхний индекс, получим чисто ковариантный тензор (R_{ijkl}) . Его индексы упорядочены так, что

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = R_{ijkl}X^kY^\ell Z^jU^i.$$

Симметрии (5.2.2)–(5.2.5) выражаются в координатах равенствами:

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad (5.2.8)$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0, \quad (5.2.9)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad (5.2.10)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \quad (5.2.11)$$

Тензор четвертой валентности имеет n^4 координат. Однако в силу симметрий (5.2.8)–(5.2.11) между координатами тензора кривизны имеется много линейных зависимостей. Можно показать, что число линейно независимых координат этого тензора равно $n^2(n^2 - 1)/12$.

Тензор кривизны можно выразить через метрический тензор. Для этого надо подставить значения (5.1.15) символов Кристоффеля в формулу (4.4.6). Понятно, что при этом получится квазилинейный (т. е. линейный по старшим производным) дифференциальный оператор второго порядка от координат метрического тензора. Это выражение настолько громоздко, что в общем случае не представляет практической ценности. Однако в некоторых частных случаях, когда координаты выбраны так, что метрический тензор имеет простую структуру, это выражение упрощается и может быть полезным.

Свернув тензор кривизны по двум индексам, получим симметричный тензор второй валентности

$$Ric_{ij} = R^p_{ipj},$$

который называется *тензором Риччи*. Если этот тензор, в свою очередь, свернуть с метрическим тензором, то получается скалярная функция

$$S = \text{tr } Ric = g^{ij} Ric_{ij},$$

называемая *скалярной кривизной*. Эти понятия важны, в первую очередь, в общей теории относительности, где тензор $Ric_{ij} - Sg_{ij}$ интерпретируется как тензор энергии – импульса, а скалярная кривизна S отождествляется с плотностью массы материи во вселенной.

Для $X, Y \in T_p M$ положим $k(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$, или в координатах

$$k(X, Y) = R_{ijkl} X^i X^k Y^j Y^l. \quad (5.2.12)$$

Введем также обозначения

$$R_0(X, Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$$

и

$$k_0(X, Y) = \langle R_0(X, Y)Y, X \rangle = \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2.$$

Если векторы X и Y линейно независимы, то $k_0(X, Y) > 0$ и имеет смысл отношение

$$K(p, \sigma) = K(X, Y) = \frac{k(X, Y)}{k_0(X, Y)}. \quad (5.2.13)$$

Легко убедиться, что это отношение зависит не от самих векторов X, Y , а лишь от двумерного подпространства $\sigma \subset T_p M$, натянутого на эти векторы. Действительно, если X', Y' второй базис подпространства σ , то

$$X' = a_{11}X + a_{12}Y, \quad Y' = a_{21}X + a_{22}Y$$

с невырожденной матрицей $a = (a_{ij})$. Легко проверить, что

$$k(X, Y) = (\det a)^2 k(X', Y'), \quad k_0(X, Y) = (\det a)^2 k_0(X', Y').$$

Определяемое равенством (5.2.13) число $K(p, \sigma)$ называется *секционной кривизной* риманова многообразия (M, g) в точке p и двумерном направлении σ . В отличие от тензора R , секционная кривизна имеет более наглядный геометрический смысл; мы обсудим его позднее. Можно показать, что тензор R однозначно определяется секционной кривизной, см. упражнение 3 ниже.

Буква R используется для обозначения тензора кривизны в честь Римана, который первым ввел в рассмотрение этот тензор. Расскажем здесь вкратце, как Риман пришел к этому. В то время понятия риманова многообразия еще не существовало, равно как и понятия связности; они сформировались позднее, в значительной степени благодаря работам Римана.

Хорошо известно, что положительно определенную квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к сумме квадратов путем линейной замены переменных. В случае квадратичной формы с переменными коэффициентами ситуация гораздо сложнее. Риман задался вопросом: в каком случае положительно определенная квадратичная форма

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^j \quad (5.2.14)$$

может быть преобразована в форму с постоянными коэффициентами путем замены переменных? Согласно (5.1.14)–(5.1.15), коэффициенты квадратичной формы постоянны тогда и только тогда, когда все символы Кристоффеля тождественно равны нулю. Согласно формуле (3.13) предыдущей главы, преобразование

$x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n)$ переводит данную положительно определенную квадратичную форму в форму с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0. \quad (5.2.15)$$

Таким образом, речь идет о решении системы уравнений (5.2.15), которые должны удовлетворяться для всех значений индексов (i, j, k) . Риман доказал, что система (5.2.15) локально разрешима тогда и только тогда, когда тензор кривизны квадратичной формы (5.2.14) тождественно равен нулю. Коль скоро положительно определенная квадратичная форма преобразована в форму с постоянными коэффициентами, ее затем можно привести к сумме квадратов. Таким образом, выражаясь современным языком, результат Римана можно сформулировать так:

Теорема 5.2.2. *Риманово многообразие (M, g) локально изометрично евклидову пространству (\mathbb{R}^n, e) тогда и только тогда, когда его тензор кривизны тождественно равен нулю.*

Евклидова метрика e на \mathbb{R}^n определяется равенством $\langle X, Y \rangle_e = \sum_i X^i Y^i$ в декартовых координатах. Метод Римана был в дальнейшем распространен и на другие системы уравнений типа (5.2.15).

Упражнения

1. В двумерном случае секционная кривизна является функцией точки: $K(p, \sigma) = K(p)$, поскольку $\sigma = T_p M$. С другой стороны, согласно приведенному после формулы (5.2.11) замечанию, все координаты тензора кривизны пропорциональны одной из них. Таким образом, в двумерном случае тензор кривизны определяется одной скалярной функцией. В качестве этой функции можно выбрать секционную кривизну $K = K(p)$, через которую тензор кривизны выражается так:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (5.2.16)$$

Докажите эту формулу.

2. Напомним, что гауссова кривизна поверхности, определяемая как произведение главных кривизн, оказывается объектом внутренней геометрии, т. е. выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. В этом состоит содержание знаменитой теоремы Гаусса. Таким образом, гауссова кривизна оказывается определенной для двумерного риманова многообразия. Докажите, что она совпадает с

секционной кривизной. Для этого вам придется вспомнить выражение гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы.

3. Докажите, что тензор кривизны выражается через биквадратичную форму (5.2.12) формулой

$$\begin{aligned} 6\langle R(X, Y)Z, U \rangle = & k(X + U, Y + Z) - k(X + U, Y) - k(X + U, Z) \\ & - k(X, Y + Z) - k(U, Y + Z) + k(X, Z) + k(U, Z) \\ & - k(Y + U, X + Z) + k(Y + U, X) + k(Y + U, Z) \\ & + k(Y, X + Z) + k(U, X + Z) - k(Y, Z) - k(U, Z). \end{aligned}$$

Отсюда следует упомянутое утверждение: тензор кривизны однозначно определяется секционной кривизной.

4. Докажите, что если секционная кривизна риманова многообразия постоянна $K(p, \sigma) = K = \text{const}$, то тензор кривизны выражается формулой (5.2.16).

5. В трехмерном случае в выражении R_{ijkl} хотя бы два индекса совпадают. Из этого очевидного наблюдения следует важное утверждение: тензор кривизны трехмерного риманова многообразия однозначно определяется тензором Риччи. Найдите явную формулу, выражающую R_{ijkl} через Ric_{ij} и g_{ij} в трехмерном случае.

5.3. Геодезические и экспоненциальное отображение

Пусть (M, g) — риманово многообразие. *Длиной* кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ называется

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

или в координатах

$$L(\gamma) = \int_a^b (g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t))^{1/2} dt.$$

Для существования этого интеграла достаточно, чтобы γ была кривой класса C^1 (или даже непрерывной и кусочно-дифференцируемой

кривой). *Длиной дуги* такой кривой называется функция

$$s(t) = L(\gamma|_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau.$$

Говорим, что кривая параметризована длиной дуги или *естественно параметризована*, если $s(t) = t + \text{const}$. Равенство $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы кривая была естественно параметризована.

Когда скоро определена длина кривой, легко определить *расстояние между точками*. Считая многообразие M связным, полагаем для $p, q \in M$

$$\rho(p, q) = \inf L(\gamma), \quad (5.3.1)$$

где точная нижняя грань берется по всем гладким кривым $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, соединяющим точки p и q , т. е. $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Легко убедиться, что так определенная функция $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиомам расстояния (см. §1.3), так что (M, ρ) становится метрическим пространством.

Определение 5.3.1. Пусть (M, g) — риманово многообразие. Гладкая параметризованная кривая $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ называется *геодезической*, если ее вектор ускорения тождественно равен нулю, т. е.

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0. \quad (5.3.2)$$

Применяя правило (5.1.11) дифференцирования скалярного произведения, получаем из (5.3.2)

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

т. е. $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const}$. Таким образом, параметр t геодезической $\gamma(t)$ пропорционален длине дуги.

Согласно формуле (4.5.2), уравнение (5.3.2) в координатах выглядит так:

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (5.3.3)$$

Отметим, что это — система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, причем уравнения нелинейны, поскольку второе слагаемое квадратично по $\dot{\gamma}$. Начальные условия для такой системы выглядят так:

$$\gamma^i(0) = x_0^i, \quad \dot{\gamma}^i(0) = X_0^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

или

$$\gamma(0) = p \in M, \quad \dot{\gamma}(0) = X \in T_p M. \quad (5.3.4)$$

Как доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение задачи Коши (5.3.3)–(5.3.4) существует при малых $|t|$ и единственно. Обычно это выражают фразой: из любой точки в любом направлении выходит единственная геодезическая. Более точно: для любой точки $(p_0, X_0) \in TM$ найдется окрестность $W \subset TM$ этой точки и число $\varepsilon > 0$, такие, что для $(p, X) \in W$ решение задачи (5.3.3)–(5.3.4) существует и единственно при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Более удобным является следующее утверждение:

Лемма 5.3.2. *Для каждой точки p_0 риманова многообразия M существуют такая окрестность U точки p_0 и такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $p \in U$ и любого вектора $X \in T_p M$, удовлетворяющего $\|X\| < \varepsilon$, существует единственная геодезическая*

$$\gamma_{p,X} : (-2, 2) \rightarrow M,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\gamma_{p,X}(0) = p, \quad \dot{\gamma}_{p,X}(0) = X.$$

Доказательство. Согласно приведенному перед леммой утверждению, можно найти окрестность U точки p_0 и положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, такие, что для каждой точки $p \in U$ и каждого $X \in T_p M$, удовлетворяющего $\|X\| < \varepsilon_1$, существует единственная геодезическая

$$\gamma_{p,X} : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \rightarrow M,$$

удовлетворяющая требуемым начальным условиям.

Чтобы получить отсюда утверждение леммы, достаточно заметить, что уравнение геодезических (5.3.2) обладает следующим свойством

однородности: если параметризованная кривая $t \mapsto \gamma(t)$ является геодезической, то кривая $t \mapsto \gamma(ct)$ также является геодезической для любой константы c .

Пусть теперь $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Тогда, если $\|X\| < \varepsilon$ и $|t| < 2$, то

$$\|X/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

Поэтому мы можем определить $\gamma_{p,X}(t)$ как $\gamma_{p,X/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$.

□

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть вектор $X \in T_p M$ таков, что существует геодезическая

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = X.$$

Тогда полагаем

$$\exp_p(X) = \gamma(1).$$

Точка $\exp_p(X)$ называется *экспонентой вектора* X . Сама геодезическая γ может быть записана в виде

$$\gamma(t) = \exp_p(tX).$$

Согласно лемме 5.3.2, $\exp_p(X)$ определена для достаточно малых $\|X\|$. Вообще говоря, $\exp_p(X)$ не определена при больших X . Но если $\exp_p(X)$ определена, то обязательно однозначно.

Обозначим через $B_\varepsilon = \{X \in T_p M \mid \|X\| < \varepsilon\} \subset T_p M$ открытый шар радиуса ε с центром в нуле. *Экспоненциальное отображение*

$$\exp_p : B_\varepsilon \rightarrow M \tag{5.3.5}$$

определено при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Гладкость этого отображения следует из того, что решение задачи Коши гладко зависит от начальных данных. Заметим, что дифференциал этого отображения в нуле

$$d_0 \exp_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

является тождественным отображением.

Чтобы доказать это утверждение, заметим сначала, что для произвольного гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ дифференциал $d_q f : T_q M \rightarrow T_{f(q)} N$ можно описать следующим образом. Если $\gamma : (-a, a) \rightarrow M$ — кривая, для которой $\gamma(0) = q$, и $\delta = f \circ \gamma : (-a, a) \rightarrow N$, то $(d_q f)(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\delta}(0)$.

Применим это правило к отображению $T_p M \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_p} M$, полагая в предыдущем предложении $q = 0 \in T_p M$. Для $X \in T_p M = T_0(T_p M)$ определяем кривую $\gamma : (-a, a) \rightarrow T_p M$, полагая $\gamma(t) = tX$. Тогда $\delta(t) = (\exp_p \circ \gamma)(t) = \exp_p(tX)$. Следовательно,

$$(d_0 \exp_p)(X) = \dot{\delta}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tX) = X.$$

Итак, дифференциал отображения (5.3.5) в точке $0 \in T_p M$ невырожден. Согласно теореме об обратной функции, для некоторого $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ отображение \exp_p отображает шар $B_{\varepsilon'}$ диффеоморфно на некоторую окрестность $U \subset M$ точки p . Ниже мы докажем более точное утверждение, см. теорему 5.3.3.

Кроме задачи Коши, для уравнений второго порядка часто рассматривают краевую задачу: найти решение уравнения, принимающее заданные значения в двух различных точках. В применении к геодезическим эта задача звучит так: найти геодезическую, соединяющую две данные точки $p, q \in M$. В общем случае эта задача может не иметь решения, а может иметь бесконечно много решений. Но локальный вариант этой задачи всегда имеет единственное решение, как показывает следующая

Теорема 5.3.3. *Для каждой точки p_0 риманова многообразия M существуют окрестность W и число $\varepsilon > 0$, такие, что*

- 1) *любые две точки из W соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше ε ;*
- 2) *эта геодезическая гладко зависит от своих концов, т. е. если $t \mapsto \exp_{p_1}(tX)$ ($0 \leq t \leq 1$) — геодезическая, соединяющая p_1 и p_2 , то пара $(p_1, X) \in TM$ гладко зависит от пары $(p_1, p_2) \in W \times W$;*
- 3) *для каждой точки $p \in W$ отображение \exp_p отображает шар $B_\varepsilon = \{X \in T_p M \mid \|X\| < \varepsilon\}$ диффеоморфно на открытое множество $U_p \supset W$.*

Доказательство. Напомним, что в §2.4 мы снабдили касательное расслоение TM структурой гладкого многообразия размерности $2n = 2 \dim M$. Отображение $(p, X) \mapsto \exp_p(X)$ определено в некоторой окрестности $V \subset TM$ точки $(p_0, 0)$. Рассмотрим гладкое отображение

$$E : V \rightarrow M \times M, \quad E(p, X) = (p, \exp_p(X)).$$

Дифференциал $d_{(p_0, 0)}E$ отображения E в точке $(p_0, 0)$ невырожден. В самом деле, пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ локальная система координат на M , определенная в окрестности U точки p_0 . Пусть $(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$ — соответствующие координаты в $U \times U \subset M \times M$, а $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n)$ — индуцированные координаты в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ (см. конец параграфа 2.4). Матрица Якоби отображения E в выбранных координатах имеет вид

$$d_{(p_0, 0)}E = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где I — единичная $n \times n$ -матрица. Единственным неочевидным местом здесь является правый нижний блок этой матрицы. Но этот блок совпадает с матрицей Якоби дифференциала $d_0 \exp_{p_0}$, который является тождественным отображением пространства $T_{p_0}M$, как мы показали выше.

По теореме об обратной функции E отображает некоторую окрестность V' точки $(p_0, 0) \in TM$ диффеоморфно на окрестность точки $(p_0, p_0) \in M \times M$. Можно считать, что V' состоит из тех (p, X) , что $p \in U'$ и $\|X\| < \varepsilon$. Выберем меньшую окрестность W точки p_0 так, что $E(V') \supset W \times W$. Для этих W и ε справедливы все утверждения теоремы. \square

В заключение параграфа рассмотрим два простейших примера.

Евклидова метрика e на \mathbb{R}^n определяется в декартовых координатах равенством

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Координаты метрического тензора в декартовой системе координат (а также в аффинной системе координат) постоянны и, следовательно,

символы Кристоффеля тождественно равны нулю. Уравнения геодезических (5.3.3) принимают вид

$$\ddot{\gamma}^i = 0.$$

Решение этой системы очевидно: $\gamma(t) = At + B$ с постоянными $A, B \in \mathbb{R}^n$. Другими словами: геодезические евклидова пространства — прямые. Поэтому можно сказать, что понятие геодезической в римановом многообразии является аналогом понятия прямой в евклидовом пространстве.

В римановом многообразии (\mathbb{R}^n, e) любые две точки соединяются единственной геодезической. Если же мы выбросим из \mathbb{R}^n одну точку, то для полученного риманова многообразия перестанет быть верным утверждение: для любых двух точек существует соединяющая их геодезическая.

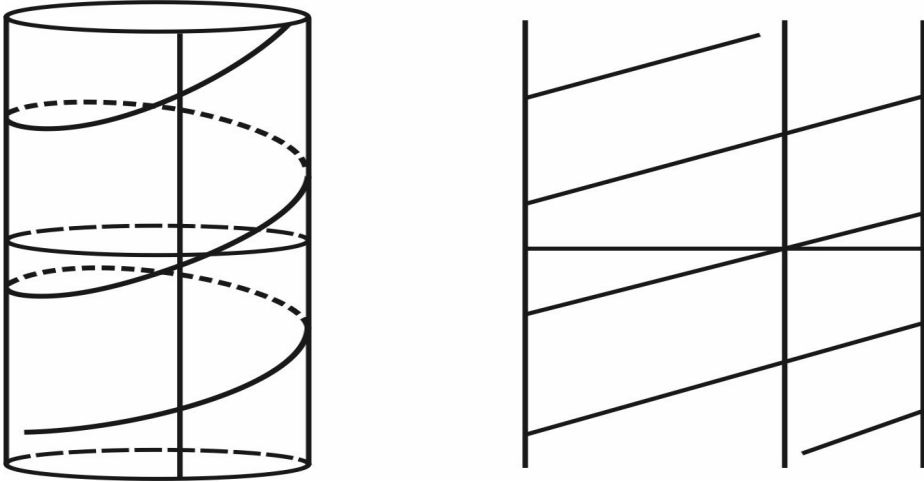


Рис. 5.1. Геодезические на круглом цилиндре

В качестве второго примера рассмотрим прямой круговой цилиндр $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ с индуцированной из \mathbb{R}^3 метрикой (рис. 5.1). Я утверждаю, что геодезическими на цилиндре являются три семейства линий: 1) прямолинейные вертикальные образующие; 2) окружности, получающиеся пересечением цилиндра горизонтальными плоскостями; и 3) винтовые линии. Чтобы убедиться в этом, разрежем цилиндр по одной из вертикальных образующих и развернем на плоскую

полосу $\Pi = \{(x, z) \mid -\pi \leq x \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Очевидно, при этом метрика цилиндра перейдет в евклидову метрику, а каждая геодезическая цилиндра перейдет в прямую, возможно разделенную на куски линией разреза. Обратно, цилиндр получается из полосы Π склеиванием вертикальных сторон, при этом прямые переходят в линии трех указанных семейств. Отметим, что на цилиндре каждые две точки соединяются бесконечным числом геодезических.

Упражнения

1. Проверьте, что определенное формулой (5.3.1) расстояние ρ между точками связного риманова многообразия M удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Докажите, что определяемая метрикой ρ топология совпадает с исходной топологией многообразия M .

2. Напишите уравнения геодезических (т. е. уравнения прямых) евклидова пространства (\mathbb{R}^3, e) в сферических координатах, введенных в упражнении 3 из §4.3.

3. Фиксируем точку p риманова многообразия (M, g) и выберем ортонормированный базис (e_1, \dots, e_n) в $T_p M$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что \exp_p диффеоморфно отображает шар $B_\varepsilon = \{X \mid \|X\| < \varepsilon\} \subset T_p M$ на некоторую окрестность U точки p . Определим в U координаты условием: точка $x \in U$ имеет координаты (x^1, \dots, x^n) , если $(\exp_p)^{-1}(x) = x^i e_i$. Это — так называемые *нормальные координаты* (с центром в точке p). Докажите, что в нормальных координатах:

- а) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера);
- б) символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке p ;
- в) проходящие через p геодезические выражаются линейными функциями: $\gamma^i(t) = c^i t$ ($c^i = \text{const}$).

4. Пусть (M, g) и (M', g') — два римановых многообразия и $\varphi : M \rightarrow M'$ — изометрия римановых многообразий. Докажите, что φ сохраняет расстояния между точками и переводит геодезические в геодезические. Оба утверждения перестают быть верными, если φ сохраняет риманову метрику, но не является биективным отображением. Например, тождественное вложение цилиндра, рассмотренного в конце параграфа, в евклидово пространство (\mathbb{R}^3, e) сохраняет риманову метрику (это тавтология, поскольку метрика на цилиндре индуцируется евклидовой метрикой e). Очевидно, расстояние между точками цилиндра, измеренное в смысле его внутренней геометрии, не совпадает с евклидово-

вым расстоянием. Большинство геодезических цилиндра не являются прямыми.

5. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. В верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

введем риманову метрику g , положив

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Двумерное риманово многообразие (\mathbb{H}^2, g) называется *моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского*. Это обозначение обычно сокращается до \mathbb{H}^2 . Убедитесь, что определяемый метрикой g угол между векторами $X, Y \in T_p \mathbb{H}^2$ совпадает с евклидовым углом для каждой точки $p \in \mathbb{H}^2$.

5.1. Напишите уравнения геодезических в \mathbb{H}^2 , проинтегрируйте их и докажите, что геодезические — это в точности линии двух семейств: а) вертикальные полупрямые $\{x = \text{const}, y > 0\}$ и б) полуокружности $\{(x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$, центры которых расположены на оси абсцисс. Эти линии обычно называются *прямыми Лобачевского*. Проверьте, что через любые две различные точки $p, q \in \mathbb{H}^2$ проходит ровно одна прямая Лобачевского. Затем убедитесь в справедливости следующего утверждения: для любой прямой Лобачевского L и для любой точки p , не лежащей на L , существует бесконечно много прямых Лобачевского, проходящих через p и не пересекающих L .

5.2. Найдите гауссову кривизну плоскости Лобачевского \mathbb{H}^2 (ответ: $K = -1$).

5.3. Пусть $SL(\mathbb{R}, 2)$ группа всех действительных 2×2 -матриц с равным единице определителем. Докажите, что для любой матрицы $A \in SL(\mathbb{R}, 2)$ отображение

$$A : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

есть изометрия, причем композиция этих изометрий совпадает с произведением матриц.

5.4. Подгруппа $\{I, -I\}$, состоящая из двух элементов (I — единичная матрица), является нормальным делителем в $SL(\mathbb{R}, 2)$ и, следовательно, определена фактор-группа

$$PSL(\mathbb{R}, 2) = SL(\mathbb{R}, 2)/\{I, -I\}.$$

Докажите, что эта группа может быть отождествлена с группой всех изометрий плоскости Лобачевского.

5.5. Докажите следующую *аксиому подвижности* плоскости Лобачевского: для любых двух точек p и q и для любых двух векторов $X \in T_p\mathbb{H}^2$ и $Y \in T_q\mathbb{H}^2$, удовлетворяющих $\|X\|_g = \|Y\|_g = 1$, существуют ровно две изометрии плоскости Лобачевского, переводящие p в q и X в Y . В частности, совместив эти точки и векторы, получаем: для любой точки p и любого единичного вектора $X \in T_p\mathbb{H}^2$ существует единственная отличная от тождественного отображения изометрия $S : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, удовлетворяющая $S(p) = p$ и $S(X) = X$. Найдите ее геометрический смысл.

5.4. Поля Якоби

Пусть (M, g) — риманово многообразие и $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая. Векторное поле $J(t)$ вдоль γ называется *полем Якоби*, если

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0, \quad (5.4.1)$$

где R — риманов тензор кривизны. Уравнение (5.4.1) также называется *уравнением Якоби*.

Будучи записанным в координатах, (5.4.1) является системой *линейных* дифференциальных уравнений второго порядка. Начальные условия для этого уравнения запишем в виде

$$J(t_0) = J_0, \quad \frac{DJ}{dt}(t_0) = J_1 \quad (t_0 \in [a, b]). \quad (5.4.2)$$

Хорошо известно, что решение задачи Коши для линейной системы существует и единственно. Таким образом, для любого $t_0 \in [a, b]$ и для любых векторов $J_0, J_1 \in T_{\gamma(t_0)}M$ существует единственное поле Якоби вдоль геодезической γ , удовлетворяющее (5.4.2). В частности, размерность пространства полей Якоби вдоль γ равна $2n = 2 \dim M$. Два

линейно независимых решения находятся немедленно в силу следующего простого, но важного утверждения.

Функция $\langle \dot{\gamma}(t), J(t) \rangle$ линейна по t для любого поля Якоби $J(t)$ вдоль геодезической $\gamma(t)$.

Действительно, используя правило дифференцирования скалярного произведения и уравнение геодезических, имеем

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, J \rangle = \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, J \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle = \left\langle \dot{\gamma}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle.$$

Дифференцируя повторно, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \dot{\gamma}, J \rangle = \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D^2J}{dt^2} \right\rangle = \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D^2J}{dt^2} \right\rangle.$$

Подставляем сюда выражение для $\frac{D^2J}{dt^2}$ из уравнения Якоби

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \dot{\gamma}, J \rangle = -\langle R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle.$$

Правая часть этой формулы тождественно равна нулю в силу симметрии (5.2.4) тензора кривизны.

В силу этого утверждения любое поле Якоби $J(t)$ представимо в виде

$$J(t) = (\alpha t + \beta)\dot{\gamma}(t) + \tilde{J}(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \quad (5.4.3)$$

где $\tilde{J}(t)$ — поле Якоби вдоль $\gamma(t)$, удовлетворяющее дополнительно соотношению $\langle \dot{\gamma}, \tilde{J} \rangle = 0$. Таким образом, при решении уравнения Якоби достаточно ограничиться поиском решений, ортогональных $\dot{\gamma}$. Размерность пространства таких решений равна $2n - 2$.

Уравнение Якоби (5.4.1) является линеаризацией уравнения геодезических (5.3.2). Чтобы придать этой фразе точный смысл, мы сначала введем некоторые предварительные понятия.

Пусть M — гладкое многообразие (без метрики). (Гладкой) *параметризованной поверхностью* в M будем называть гладкое отображение

$$\mathbb{R}^2 \supset [a, b] \times (-\delta, \delta) \xrightarrow{\sigma} M, \quad (t, u) \mapsto \sigma(t, u) \in M. \quad (5.4.4)$$

Зафиксировав $u \in (-\delta, \delta)$, получим параметризованную кривую $\bar{\sigma}_u : [a, b] \rightarrow M$, $\bar{\sigma}_u(t) = \sigma(t, u)$. Совокупность кривых $\bar{\sigma}_u$ ($-\delta < u < \delta$)

можно рассматривать как гладкую деформацию кривой $\bar{\sigma}_0$. Поэтому параметризованную поверхность вида (5.4.4) часто также называют *однопараметрической вариацией* кривой $\bar{\sigma}_0$.

(Гладким) векторным полем вдоль параметризованной поверхности σ называется функция X , сопоставляющая каждой паре $(t, u) \in [a, b] \times (-\delta, \delta)$ вектор $X(t, u) \in T_{\sigma(t, u)}M$, причем эта функция должна быть гладкой в очевидном смысле (аналогично понятию векторного поля вдоль кривой, ср. с определением в §4.5). Обозначим через $\sigma^*\mathcal{V}$ множество всех гладких векторных полей вдоль σ . Вполне аналогично вектору скорости $\dot{\gamma}$ кривой γ определим два векторных поля $\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial u} \in \sigma^*\mathcal{V}$ равенствами

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, u) = (d_{(t, u)}\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, u) = (d_{(t, u)}\sigma)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Пусть теперь (M, g) — риманово многообразие. Для параметризованной поверхности (5.4.4) можно ввести два оператора

$$\frac{D}{\partial t}, \frac{D}{\partial u} : \sigma^*\mathcal{V} \rightarrow \sigma^*\mathcal{V}$$

вполне аналогично оператору $\frac{D}{dt}$ из предложения 4.5.1. Впрочем, определение этих операторов можно дать в терминах ранее введенных понятий следующим образом. При любом фиксированном u_0 ограничение векторного поля $X \in \sigma^*\mathcal{V}$ на кривую $t \mapsto \sigma(t, u_0)$ есть векторное поле вдоль этой кривой. Его абсолютная производная по t есть, по определению, $\frac{DX}{\partial t}(t, u_0)$. Тем самым векторное поле $\frac{DX}{\partial t}$ определено вдоль всей поверхности σ . Векторное поле $\frac{DX}{\partial u}$ определяется аналогично путем фиксации аргумента t .

Лемма 5.4.1. Пусть $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — параметризованная поверхность в римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (5.4.5)$$

Для любого векторного поля $X(t, u)$ вдоль σ

$$\frac{D}{\partial t} \frac{DX}{\partial u} - \frac{D}{\partial u} \frac{DX}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)X. \quad (5.4.6)$$

Доказательство. Поскольку оба утверждения локальны, достаточно рассмотреть случай, когда образ σ лежит в области определения локальной системы координат. Пусть $\sigma(t, u) = (\sigma^1(t, u), \dots, \sigma^n(t, u))$ в координатах. Тогда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \partial_i, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\partial \sigma^i}{\partial u} \partial_i.$$

Абсолютные производные $\frac{D}{\partial t}$ и $\frac{D}{\partial u}$ обладают свойствами, аналогичными перечисленным в предложении 4.5.1 свойствам оператора $\frac{D}{dt}$. Используя эти свойства, получаем для векторного поля $X(t, u) = X^j(t, u) \partial_j$ вдоль σ

$$\frac{DX}{\partial t} = \frac{\partial X^j}{\partial t} \partial_j + X^j \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \nabla_{\partial_i} \partial_j, \quad (5.4.7)$$

Полагая здесь $X^j = \frac{\partial \sigma^j}{\partial u}$, имеем

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial t \partial u} \partial_j + \frac{\partial \sigma^j}{\partial u} \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \nabla_{\partial_i} \partial_j.$$

Переменные t и u в этой формуле равноправны. Переставляя их, получаем

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial u \partial t} \partial_j + \frac{\partial \sigma^j}{\partial t} \frac{\partial \sigma^i}{\partial u} \nabla_{\partial_i} \partial_j.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, замечаем, что результат может быть записан в виде

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\partial \sigma^j}{\partial u} \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} (\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i).$$

Правая часть этой формулы равна нулю в силу симметричности связности. Это доказывает (5.4.5).

Применяя оператор $\frac{D}{\partial u}$ к формуле (5.4.7) и используя те же свойства, находим после несложных вычислений

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial u} \frac{DX}{\partial t} &= X^j \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \frac{\partial \sigma^k}{\partial u} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &+ \frac{\partial X^j}{\partial t} \frac{\partial \sigma^k}{\partial u} \nabla_{\partial_k} \partial_j + \frac{\partial X^j}{\partial u} \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^j \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial u \partial t} \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial^2 X^j}{\partial u \partial t} \partial_j. \end{aligned}$$

Меняем местами переменные t и u в этом равенстве

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{DX}{du} &= X^j \frac{\partial \sigma^i}{\partial u} \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &+ \frac{\partial X^j}{\partial u} \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} \nabla_{\partial_k} \partial_j + \frac{\partial X^j}{\partial t} \frac{\partial \sigma^i}{\partial u} \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^j \frac{\partial^2 \sigma^i}{\partial t \partial u} \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial^2 X^j}{\partial t \partial u} \partial_j. \end{aligned}$$

Вычитая из последней формулы предыдущую, записываем результат в виде

$$\frac{D}{dt} \frac{DX}{du} - \frac{D}{du} \frac{DX}{dt} = X^j \frac{\partial \sigma^i}{\partial u} \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} (\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_k} \partial_j).$$

Правая часть этой формулы равна $R(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial u})X$ и мы приходим к (5.4.6). \square

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая. Параметризованная поверхность $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ называется *геодезической вариацией* геодезической γ , если $\sigma(t, 0) = \gamma(t)$ и для любого $u \in (-\delta, \delta)$ кривая $\bar{\sigma}_u : [a, b] \rightarrow M$, $\bar{\sigma}_u(t) = \sigma(t, u)$ также является геодезической.

Теорема 5.4.2. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая в римановом многообразии и $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — геодезическая вариация γ . Тогда

$$J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) \quad (5.4.8)$$

является полем Якоби вдоль γ . Обратно, любое поле Якоби вдоль γ может быть получено таким образом из некоторой геодезической вариации γ .

Таким образом, один из способов получить якобиевы поля — передвигать геодезические.

Доказательство. Если σ — геодезическая вариация, то $\frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ тождественно равно нулю. Отсюда с помощью (5.4.6) и (5.4.5) получаем

$$0 = \frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D^2}{dt^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u} + R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Полагая здесь $u = 0$ и учитывая, что $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$ и $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) = J(t)$, приходим к уравнению Якоби (5.4.1).

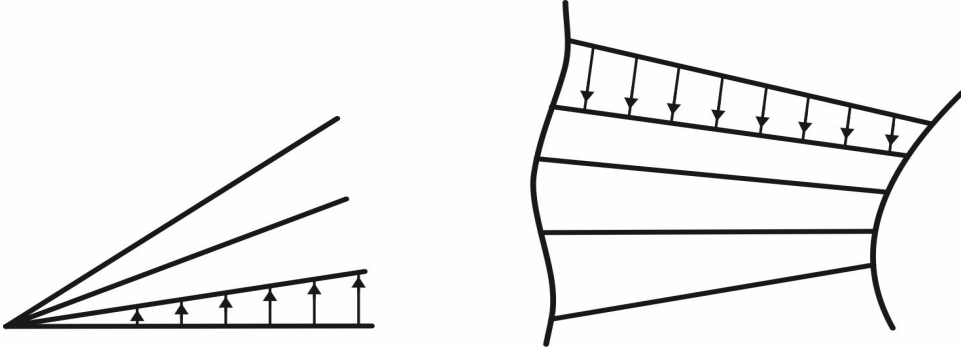


Рис. 5.2. Поля Якоби можно получать, передвигая геодезические

При доказательстве обратного утверждения будем считать, что геодезическая $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ параметризована длиной дуги, т. е. $\|\dot{\gamma}\| = 1$; это позволит упростить обозначения, не умаляя общности. Применяя теорему 5.3.3, найдем такую окрестность U точки $\gamma(0)$ и $\varepsilon' > 0$, что любые две точки из U соединяет единственная геодезическая длины меньше ε' , гладко зависящая от своих концов. Выберем затем положительное $\varepsilon < \varepsilon'/2$ так, что $\gamma(t) \in U$ при $t \leq \varepsilon$. Построим сначала яковиево поле $J(t)$ вдоль $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$, принимающее заданные значения $X \in T_{\gamma(0)}M$ и $Y \in T_{\gamma(\varepsilon)}M$ при $t = 0$ и $t = \varepsilon$ соответственно. Для этого выберем кривую $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$, такую, что $\lambda(0) = \gamma(0)$ и $\frac{d\lambda}{du}(0) = X$. Аналогично выберем кривую $\mu : (-\delta, \delta) \rightarrow U$, такую, что $\mu(0) = \gamma(\varepsilon)$ и $\frac{d\mu}{du}(0) = Y$. Построим теперь вариацию

$$\sigma : [0, \varepsilon] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M,$$

определив $\bar{\sigma}_u : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ как единственную геодезическую длины меньше ε' , соединяющую точки $\lambda(u)$ и $\mu(u)$. Тогда формула (5.4.8) даст яковиево поле $J(t)$ вдоль $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$, удовлетворяющее краевым условиям $J(0) = X$ и $J(\varepsilon) = Y$.

Любое яковиево поле вдоль $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$ можно построить таким способом: если $\mathcal{J}(\gamma)$ — векторное пространство всех яковиевых полей вдоль γ , то формула $J \mapsto (J(0), J(\varepsilon))$ определяет линейное отображение

$$\ell : \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\varepsilon)}M.$$

Мы показали, что отображение ℓ эпиморфно. Так как оба векторных пространства имеют одну и ту же размерность $2n$, то ℓ — изоморфизм,

т. е. поле Якоби определяется своими значениями в двух точках $\gamma(0)$ и $\gamma(\varepsilon)$. Итак, наше построение дает все якобиевы поля вдоль $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$.

Ограничение геодезической $\bar{\sigma}_u$ на интервал $[0, \varepsilon]$ несущественно. Если u достаточно мало, то $\bar{\sigma}_u$ продолжается до геодезической, определенной на $[0, a]$, и мы получаем геодезическую вариацию

$$\sigma : [0, a] \times (-\delta', \delta') \rightarrow M,$$

для которой $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ совпадает с заданным полем Якоби вдоль γ . \square

Замечание 5.4.3. Эти рассуждения показывают, что в любой такой окрестности U якобиево поле вдоль отрезка геодезической, лежащего в U , однозначно определяется своими значениями в концах этого отрезка.

Как мы знаем, дифференциал экспоненциального отображения

$$T_p M \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_p} M$$

в нуле является тождественным отображением. Гораздо сложнее устроен дифференциал

$$d_X \exp_p : T_p M \rightarrow T_{\exp_p(X)} M$$

в произвольной точке $X \in T_p M$. Нахождение этого дифференциала сводится к решению уравнения Якоби, как показывает следующая

Теорема 5.4.4. Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X \in T_p M$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Обозначим $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ ($t \in [0, 1]$). Тогда для любого вектора $Y \in T_p M$

$$(d_X \exp_p)(Y) = J(1), \quad (5.4.9)$$

где $J(t)$ — поле Якоби вдоль γ , удовлетворяющее начальным условиям

$$J(0) = 0, \quad \frac{DJ}{dt}(0) = Y. \quad (5.4.10)$$

Доказательство. При $t \in [0, 1]$ и достаточно малом u точка $\exp_p(tX + tuY)$ определена и отображение

$$\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M, \quad \sigma(t, u) = \exp_p(tX + tuY)$$

является геодезической вариацией геодезической γ . По теореме 5.4.2, векторное поле

$$J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$$

есть поле Якоби вдоль γ . Первое из начальных условий (5.4.10) выполнено, поскольку $\sigma(0, u) = p$ не зависит от u . Так как

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, u) = X + uY,$$

то

$$\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(0, 0) = \frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, 0) = \frac{D(X + uY)}{du}(0) = Y$$

и второе из начальных условий (5.4.10) тоже выполнено.

Остается убедиться в справедливости (5.4.9). Поскольку

$$\sigma(1, u) = \exp_p(X + uY),$$

то

$$J(1) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, 0) = \frac{d(\exp_p(X + uY))}{du}(0).$$

Определим отображение $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow T_p M$ равенством $\varphi(u) = X + uY$. Тогда $\varphi(0) = X$, $\frac{d\varphi}{du}(0) = Y$ и, следовательно,

$$(d_X \exp_p)(Y) = \frac{d(\exp_p \circ \varphi)}{du}(0) = \frac{d(\exp_p(X + uY))}{du}(0).$$

Вместе с предыдущей формулой это дает (5.4.9). \square

Эта теорема имеет важное следствие.

Следствие 5.4.5 (лемма Гаусса). Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X \in T_p M$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Обозначим $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ ($t \in [0, 1]$). Тогда для любого вектора $Y \in T_p M$

$$\langle (d_X \exp_p)(Y), \dot{\gamma}(1) \rangle = \langle X, Y \rangle. \quad (5.4.11)$$

Доказательство. Согласно теореме 5.4.4,

$$\langle (d_X \exp_p)(Y), \dot{\gamma}(1) \rangle = \langle J(1), \dot{\gamma}(1) \rangle, \quad (5.4.12)$$

где J — поле Якоби вдоль γ , удовлетворяющее начальным условиям (5.4.10). Как мы знаем, функция $\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ линейна по t . Поскольку эта функция обращается в нуль при $t = 0$,

$$\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \alpha t, \quad \alpha = \text{const.}$$

Постоянная α легко находится:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \frac{DJ}{dt}(0), \dot{\gamma}(0) \right\rangle + \left\langle J(0), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{DJ}{dt}(0), \dot{\gamma}(0) \right\rangle = \langle Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle Y, X \rangle t$. Вместе с (5.4.12) это дает (5.4.11). \square

В силу очевидного равенства $\dot{\gamma}(1) = (d_X \exp_p)(X)$, (5.4.11) можно переписать в виде

$$\langle (d_X \exp_p)(\alpha X), (d_X \exp_p)(Y) \rangle = \langle \alpha X, Y \rangle \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Вообще говоря, экспоненциальное отображение сильно искажает метрику. Но оно сохраняет скалярное произведение двух векторов, если один из них “радиален”. В этом состоит геометрический смысл леммы Гаусса.

Упражнения

1. Уравнение Якоби можно записать в виде системы, в которой абсолютная производная $\frac{D}{dt}$ заменена обычной производной $\frac{d}{dt}$. Для простоты ограничимся рассмотрением геодезической $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, параметризованной длиной дуги, т. е. $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Для некоторого t_0 выберем ортонормированный базис $(e_1(t_0) = \dot{\gamma}(t_0), e_2(t_0), \dots, e_n(t_0))$ пространства $T_{\gamma(t_0)}M$, а затем разнесем каждый вектор этого базиса параллельно вдоль γ . Получится ортонормированный базис

$$(e_1(t) = \dot{\gamma}(t), e_2(t), \dots, e_n(t))$$

пространства $T_{\gamma(t)}M$ при каждом $t \in [a, b]$, который иногда называют *базисом Ферми*. Докажите, что для векторного поля, представленного

в базисе Ферми в виде $J(t) = J^i(t)e_i(t)$, уравнение Якоби эквивалентно системе

$$\frac{d^2 J^i}{dt^2} + R^i_{1j1} J^j = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

2. В двумерном случае уравнение Якоби сводится к одному скалярному уравнению второго порядка. Действительно, пусть $(e_1(t) = \dot{\gamma}(t), e_2(t))$ — базис Ферми. Если поле Якоби представлено в виде

$$J(t) = x(t)e_1(t) + y(t)e_2(t),$$

то, согласно (5.4.3), первый коэффициент линеен по t , а второй удовлетворяет уравнению (докажите)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K(t)y = 0,$$

где $K(t)$ — значение гауссовой кривизны в точке $\gamma(t)$.

5.5. Геодезические и кратчайшие

Вспомним обиходное выражение: “Прямая есть кратчайшее расстояние между точками”. Точнее: длина прямолинейного отрезка в евклидовом пространстве равна расстоянию между его концами. Верно и обратное: если длина некоторой кривой равна расстоянию между ее концами, то эта кривая — прямолинейный отрезок.

Как обстоит дело с аналогичными утверждениями для римановых многообразий, где роль прямых выполняют геодезические? Приблизительный ответ на этот вопрос звучит так: локальная версия первого утверждения остается верной, т. е. длина любого достаточно короткого отрезка любой геодезической равна расстоянию между его концами. Но для длинных геодезических это утверждение становится скорее исключением, чем правилом. Действительно, бывают даже замкнутые геодезические с совпадающими концами, как мы убедились в §3, изучая геодезические на круглом цилиндре.

При попытке сформулировать риманов аналог второго утверждения из первого абзаца мы сталкиваемся со следующей трудностью. Согласно нашему определению, геодезическая всегда параметризована

пропорционально длине дуги. С другой стороны, длина произвольной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

не меняется при изменении параметризации. Напомним, что это такое. Выберем гладкую функцию $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$, удовлетворяющую $f(c) = a$, $f(d) = b$ и $f'(s) > 0$ ($s \in [c, d]$). Определим новую кривую $\delta : [c, d] \rightarrow M$, полагая $\delta(s) = \gamma(f(s))$. Тогда

$$L(\delta) = \int_c^d \left\| \frac{d\delta}{ds}(s) \right\| ds = L(\gamma),$$

в чем легко убедиться с помощью замены $t = f(s)$ переменной интегрирования. Чтобы избежать этой трудности, ограничимся рассмотрением кривых, параметризованных пропорционально длине дуги. Напомним, что такая параметризация возможна для любой кусочно гладкой кривой.

Теперь перейдем к систематическому изложению.

(Кусочно) гладкая кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ в римановом многообразии называется *кратчайшей*, если ее длина равна расстоянию между ее концами:

$$L(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Иными словами, длина γ не больше длины любой другой кривой, соединяющей точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. Легко доказывается утверждение: если $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — кратчайшая, то ее ограничение $\gamma|_{[c, d]}$ на любой отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ также является кратчайшей.

Теорема 5.5.1. *Достаточно короткий отрезок любой геодезической является кратчайшей. Более точно: для любой геодезической $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых $t_0, t_1 \in [a, b]$, $t_0 \leq t_1$, удовлетворяющих $t_1 - t_0 < \delta$, ограничение $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ — кратчайшая.*

Любая кратчайшая, параметризованная длиной дуги, есть геодезическая.

Основную роль в доказательстве этой теоремы играет следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

Предложение 5.5.2. Для точки p риманова многообразия M будем через $B_r = \{X \in T_p M \mid \|X\| < r\}$ обозначать открытый шар в $T_p M$ радиуса r с центром в нуле.

Пусть точка $p \in M$ и $r > 0$ таковы, что экспоненциальное отображение

$$\exp_p : B_r \rightarrow M \quad (5.5.1)$$

определено и является диффеоморфизмом на свой образ. Выберем $X_0 \in T_p M$, $\|X_0\| = 1$, зафиксируем $a \in (0, r)$ и положим $q = \exp_p(aX_0)$.

Пусть $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая p и q , т. е. $\gamma(0) = p$, $\gamma(a) = q$, и удовлетворяющая $\|\dot{\gamma}\| = \text{const}$. Тогда

$$L(\gamma) \geq a,$$

причем $L(\gamma) = a$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t) = \exp_p(tX_0)$.

Доказательство. Обозначим $U = \exp_p(B_r)$. Предположим сначала, что $\gamma : [0, a] \rightarrow U$. Можно считать, что $\gamma(t) \neq p$ при $t > 0$. Тогда

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)X(t)),$$

где $X(t) \in T_p M$, $\|X(t)\| = 1$, $X(a) = X_0$ и $0 \leq \rho(t) < r$, $\rho(0) = 0$, $\rho(a) = a$. Функции $\rho(t)$ и $X(t)$ кусочно гладкие. Для сокращения дальнейших формул запишем это в виде

$$\gamma = \exp_p(\rho X), \quad \rho = \rho(t), \quad X = X(t). \quad (5.5.2)$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\dot{\gamma} = (d_{\rho X} \exp_p)(\dot{\rho}X + \rho\dot{X}) = \dot{\rho}(d_{\rho X} \exp_p)(X) + \rho(d_{\rho X} \exp_p)(\dot{X}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= \dot{\rho}^2 \|(d_{\rho X} \exp_p)(X)\|^2 + \rho^2 \|(d_{\rho X} \exp_p)(\dot{X})\|^2 \\ &\quad + 2\dot{\rho} \langle (d_{\rho X} \exp_p)(\rho X), (d_{\rho X} \exp_p)(\dot{X}) \rangle. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

В силу леммы Гаусса

$$\langle (d_{\rho X} \exp_p)(\rho X), (d_{\rho X} \exp_p)(\dot{X}) \rangle = \rho \langle X, \dot{X} \rangle.$$

Правая часть этой формулы равна нулю, как следует из $\|X\|^2 = 1$. Следовательно, последнее слагаемое в правой части формулы (5.5.3) равно нулю. В силу той же леммы Гаусса

$$\|(d_{\rho X} \exp_p)(X)\|^2 = \frac{1}{\rho^2} \langle (d_{\rho X} \exp_p)(\rho X), (d_{\rho X} \exp_p)(\rho X) \rangle = \|X\|^2 = 1.$$

Таким образом, (5.5.3) приобретает вид

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \|(d_{\rho X} \exp_p)(\dot{X})\|^2, \quad (5.5.4)$$

откуда следует неравенство

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq |\dot{\rho}(t)|. \quad (5.5.5)$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$L(\gamma) = \int_0^a \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \int_0^a |\dot{\rho}(t)| dt \geq \int_0^a \dot{\rho}(t) dt = a. \quad (5.5.6)$$

Это доказывает первое утверждение.

Если $L(\gamma) = a$, то второе слагаемое в правой части формулы (5.5.4) должно быть тождественно равным нулю. Поскольку $\rho(t) > 0$ при $t > 0$, это влечет $\dot{X}(t) = 0$, т. е. $X(t) = \text{const} = X_0$. Теперь (5.5.2) приобретает вид

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)X_0). \quad (5.5.7)$$

В случае равенства $L(\gamma) = a$ неравенства в (5.5.5) и (5.5.6) также превращаются в равенства, т. е. $\dot{\rho}(t) = |\dot{\rho}(t)| = \|\dot{\gamma}(t)\|$. Поскольку мы предположили, что $\|\dot{\gamma}\| = \text{const}$, отсюда следует, что $\dot{\rho}(t) = c = \text{const}$, т. е. $\rho(t) = ct$. А поскольку $\rho(a) = a$, то $\rho(t) = t$. Теперь (5.5.7) приобретает вид $\gamma(t) = \exp_p(tX_0)$.

Итак, предложение 5.5.2 доказано при дополнительном предположении, что кривая γ лежит полностью в области $U = \exp_p(B_r)$. Если же γ выходит за пределы этой области, то длина той части кривой γ , которая лежит в U , не меньше, чем $r > a$, и следовательно, $L(\gamma) > a$. \square

Следствие 5.5.3. Пусть точка $p \in M$ и $r > 0$ таковы, что экспоненциальное отображение \exp_p определено на шаре $B_r \subset T_p M$ и

отображает этот шар диффеоморфно на его образ. Тогда любая геодезическая длины меньше r , выходящая из точки p , является кратчайшей. Обратно, любая кратчайшая длины меньше r , выходящая из p и параметризованная длиной дуги, является геодезической.

Следствие 5.5.4. Для каждого компактного множества $K \subset M$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две точки из K , расстояние между которыми меньше δ , соединяются единственной геодезической длины меньше δ . Эта геодезическая является кратчайшей и гладко зависит от своих концов.

Доказательство. Применяя теорему 5.3.3, найдем для каждой точки $p \in K$ такую окрестность W_p и число $\varepsilon_p > 0$, что 1) любые две точки из W_p соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше ε_p , гладко зависящая от своих концов, и 2) для любой точки $q \in W_p$ отображение \exp_q отображает шар $B_{\varepsilon_p} = \{X \in T_q M \mid \|X\| < \varepsilon_p\}$ диффеоморфно на его образ. Из открытого покрытия $\{W_p\}_{p \in K}$ компактного множества K выберем конечное подпокрытие $\{W_{p_i}\}_{i=1}^k$ и положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$. Наконец, выберем $0 < \delta < \varepsilon$ настолько малым, чтобы любые две точки $p, q \in K$, расстояние между которыми меньше δ , лежали в общем множестве W_{p_i} . Для такой пары точек отображение \exp_p переводит шар $B_\delta = \{X \in T_p M \mid \|X\| < \delta\}$ диффеоморфно на некоторую окрестность точки p , содержащую q . Согласно следствию 5.5.3, геодезическая длины меньше δ , соединяющая p и q , является кратчайшей. \square

Доказательство теоремы 5.5.1. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая. Для компактного множества $K = \gamma([a, b])$ выберем $\delta > 0$ как в следствии 5.5.4. Тогда любой отрезок геодезической γ , длина которого меньше δ , есть кратчайшая.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — кратчайшая, параметризованная длиной дуги. Тогда $\gamma|_{[t, t+r/2]}$ — также кратчайшая. Если r выбрано так, что $\exp_{\gamma(t)}$ определено на шаре $B_r \subset T_{\gamma(t)} M$ и отображает этот шар диффеоморфно на его образ, то $\gamma|_{[t, t+r/2]}$ есть геодезическая, согласно следствию 5.5.3. Так как это справедливо для любого t , а геодезические определяются дифференциальным уравнением, то γ — геодезическая. \square

В заключение параграфа найдем геодезические на сфере $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, снабженной римановой метрикой, индуцированной

евклидовой метрикой пространства \mathbb{R}^{n+1} посредством тождественного вложения (это так называемая *стандартная* метрика на сфере). Я утверждаю, что геодезическими на сфере являются большие круги, т. е. линии пересечения \mathbb{S}^n с двумерными плоскостями, проходящими через центр сферы, и только они.

Для доказательства заметим, что для любой такой плоскости P симметрия относительно этой плоскости $S_P : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ есть изометрия сферы, причем большой круг $C = \mathbb{S}^n \cap P$ есть множество неподвижных точек этой изометрии. Пусть p и q — две близкие точки из C , соединенные единственной кратчайшей геодезической γ . Так как S_P — изометрия, кривая $S_P(\gamma)$ есть геодезическая той же длины, соединяющая точки $S_P(p) = p$ и $S_P(q) = q$. Следовательно, $\gamma \subset C$.

Остается заметить, что других геодезических нет, поскольку через каждую точку сферы в любом направлении проходит большой круг.

Упражнения

1. Расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ в модели Пуанкаре \mathbb{H}^2 плоскости Лобачевского (см. упражнение 5 из §5.3) выражается формулой

$$\cosh(\rho(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1 y_2},$$

что может быть также записано в виде

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 + |z_1 - \bar{z}_2|/|z_1 - z_2|}{-1 + |z_1 - \bar{z}_2|/|z_1 - z_2|} \right).$$

Докажите эту формулу. (Указание. Сначала проверьте, что правая часть формулы инвариантна относительно изометрий плоскости Лобачевского. В силу аксиомы подвижности достаточно установить справедливость формулы при $x_1 = x_2$. В этом случае формула проверяется непосредственным интегрированием.)

2. Докажите, что, как и для евклидова пространства, для плоскости Лобачевского справедливы следующие утверждения. Длина любого отрезка прямой Лобачевского равна расстоянию между его концами. Обратно, если длина некоторой кривой совпадает с расстоянием между ее концами, то эта кривая есть отрезок прямой Лобачевского.

3. Пусть $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ и $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ — две непересекающиеся прямые Лобачевского, параметризованные длиной дуги. Положим

$\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) = \inf\{\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) \mid t' \in \mathbb{R}\}$. Докажите, что имеет место один и только один из следующих трех случаев:

- а) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае прямые γ_1 и γ_2 называются *расходящимися*;
- б) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае говорят, что γ_1 *параллельна слева* прямой γ_2 ;
- в) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае говорят, что γ_1 *параллельна справа* прямой γ_2 .

5.6. Полные римановы многообразия

Риманово многообразие (M, g) называется *геодезически полным*, если для любой точки $p \in M$ и любого вектора $X \in T_p M$ решение задачи Коши $\gamma(t)$ для уравнения геодезических с начальными условиями $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$ существует при всех $t \in \mathbb{R}$. Иными словами, экспоненциальное отображение \exp_p определено на всем $T_p M$ для любой точки $p \in M$.

В этом параграфе мы будем считать многообразие M связным (как топологическое пространство). Напомним, что ранее было определено расстояние ρ между точками риманова многообразия так, что (M, ρ) является метрическим пространством.

Напомним одно понятие из “Анализа”: метрическое пространство (M, ρ) называется *метрически полным*, если любая последовательность Коши в этом пространстве имеет предел (последовательность p_k ($k = 1, 2, \dots$) точек метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $\lim \rho(p_k, p_\ell) = 0$ при $k, \ell \rightarrow \infty$).

Обратите внимание, насколько, на первый взгляд, далеки друг от друга понятия геодезической полноты и метрической полноты: в то время как первое понятие связано с решением дифференциального уравнения, второе выражается лишь в терминах расстояния, не имеющего отношения к уравнениям. Тем не менее эти понятия эквивалентны: риманово многообразие геодезически полно тогда и только тогда, когда оно метрически полно. В этом состоит основное содержание теоремы Ринова – Хопфа, которой посвящен этот параграф. В связи с этим термин “полное риманово многообразие” используется обычно без эпитетов. Основную роль в доказательстве этой теоремы играет следующая

Лемма 5.6.1. *Если риманово многообразие M геодезически полно, то любые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $\rho(p, q)$.*

Доказательство. Выберем две различные точки $p, q \in M$ и обозначим $r = \rho(p, q) > 0$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что экспоненциальное отображение \exp_p переводит шар $B_\varepsilon = \{X \in T_p M \mid \|X\| < \varepsilon\}$ диффеоморфно на некоторую окрестность точки p . Зафиксируем некоторое $\delta \in (0, \varepsilon)$ и обозначим через $S \subset M$ образ сферы $\{X \in T_p M \mid \|X\| = \delta\}$ при отображении \exp_p . Множество S компактно как образ компакта при непрерывном отображении. Фактически S является сферой радиуса δ с центром в точке p , т. е. $\rho(s, p) = \delta$ для $s \in S$; это вытекает из следствия 5.5.3.

Непрерывная функция

$$S \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \rho(s, q)$$

достигает минимума в некоторой точке $p_0 \in S$. Представим эту точку в виде

$$p_0 = \exp_p(\delta X), \quad X \in T_p M, \quad \|X\| = 1$$

и рассмотрим геодезическую $\gamma(t) = \exp_p(tX)$, определенную при всех $t \in \mathbb{R}$. Она параметризована длиной дуги, поскольку $\|X\| = 1$. Мы покажем, что

$$\gamma(r) = q.$$

Отсюда вытекает, что отрезок $\gamma|_{[0, r]}$ является геодезической длины $r = \rho(p, q)$, соединяющей точки p и q .

Для доказательства мы покажем, что точка, движущаяся вдоль геодезической γ , должна подходить к q все ближе и ближе. А именно мы покажем, что при любом $t \in [\delta, r]$

$$\rho(\gamma(t), q) = r - t. \quad (5.6.1_t)$$

Это равенство при $t = r$ доказывает лемму.

Докажем сначала равенство (5.6.1 _{δ}). Так как каждая кривая, идущая из p в q , должна пересекать сферу S , имеем

$$\rho(p, q) = \min_{s \in S} (\rho(p, s) + \rho(s, q)) = \delta + \rho(p_0, q).$$

Следовательно, $\rho(p_0, q) = r - \delta$. Так как $p_0 = \gamma(\delta)$, это доказывает (5.6.1 _{δ}).

Пусть $t_0 \in [\delta, r]$ — точная верхняя грань тех чисел t , для которых (5.6.1 _{t}) справедливо при всех $t' < t$. Тогда по непрерывности справедливо (5.6.1 _{t_0}). Если $t_0 < r$, то мы приходим к противоречию. Пусть S' — маленькая сфера радиуса $\delta' > 0$ с центром в точке $\gamma(t_0)$, и пусть $p'_0 \in S'$ — точка на S' , ближайшая к q (рис. 5.3). Тогда

$$\rho(\gamma(t_0), q) = \min_{s \in S'} (\rho(\gamma(t_0), s) + \rho(s, q)) = \delta' + \rho(p'_0, q).$$

Следовательно,

$$\rho(p'_0, q) = (r - t_0) - \delta'. \quad (5.6.2)$$

Мы утверждаем, что p'_0 есть $\gamma(t_0 + \delta')$. Действительно, неравенство треугольника и (5.6.2) дают

$$\rho(p, p'_0) \geq \rho(p, q) - \rho(p'_0, q) = t_0 + \delta'.$$

Но путь длины в точности $t_0 + \delta'$ из p в p'_0 получится, если идти по γ от p до $\gamma(t_0)$ и затем по кратчайшей геодезической из $\gamma(t_0)$ в p'_0 . Так как этот кусочно-геодезический путь имеет наименьшую длину, он, согласно теореме 5.5.1, представляет собой целую геодезическую, а поэтому совпадает с $\gamma|_{[0, t_0 + \delta']}$.

Итак, $\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$. Равенство (5.6.2) принимает вид

$$\rho(\gamma(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'),$$

что совпадает с (5.6.1 _{$t_0 + \delta'$}). Полученное противоречие с определением t_0 завершает доказательство. \square

Теорема 5.6.2 (Ринова – Хопфа). *Для риманова многообразия следующие условия эквивалентны:*

- 1) M метрически полно;
- 2) M геодезически полно;
- 3) для любой точки $p \in M$ экспоненциальное отображение \exp_p определено на всем $T_p M$;
- 4) любое ограниченное множество в M имеет компактное замыкание.

Каждое из этих условий влечет следующее:

- 5) любые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $\rho(p, q)$.

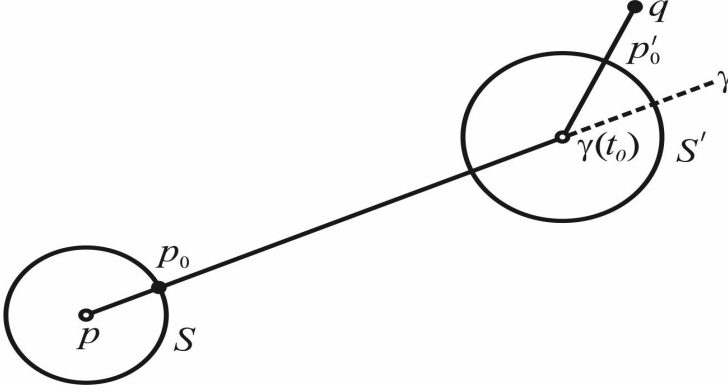


Рис. 5.3. К доказательству теоремы Ринова – Хопфа

Доказательство. Из 4) следует 1). Действительно, последовательность Коши ограничена и содержится в замкнутом ограниченном подмножестве многообразия M , которое по предположению компактно; в компактном множестве каждая последовательность Коши сходится.

Эквивалентность 2) и 3) очевидна.

Из 2) следует 5). Это составляет содержание леммы 5.6.1.

Из 3) и 5) следует 4). Действительно, любое замкнутое ограниченное множество $A \subset M$ содержится в замкнутом шаре, т. е.

$$A \subset \mathbb{D}_R(p) = \{q \in M \mid \rho(p, q) \leq R\}$$

для некоторой точки $p \in M$ и некоторого $R < \infty$. Согласно 5), каждая точка $q \in A$ соединяется с p геодезической длины $\rho(p, q) \leq R$, т. е. A содержится в компактном множестве

$$\exp_p(\{X \in T_p M \mid \|X\| \leq R\}).$$

Будучи замкнутым подмножеством компакта, A само есть компакт.

Докажем, наконец, что из 1) следует 3). Достаточно показать, что при $X \in T_p M$, $\|X\| = 1$ экспонента $\exp_p(tX)$ определена для всех $0 < t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$t_0 = \sup\{t' \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = \exp_p(tX) \text{ определена при } 0 \leq t < t'\}.$$

Нам надо доказать, что $t_0 = \infty$. Предположив конечность t_0 , придем к противоречию.

Выберем последовательность $t_i \in (0, t_0)$ ($i = 1, 2, \dots$), сходящуюся к t_0 при $i \rightarrow \infty$, и рассмотрим последовательность точек $p_i = \gamma(t_i)$. Это — последовательность Коши. В силу метрической полноты последовательность p_i сходится к некоторой точке p_0 . Доопределим $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$, положив $\gamma(t_0) = p_0$. Тогда γ непрерывна на $[0, t_0]$ и $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ для $t \in [0, t_0]$. Следовательно, $L(\gamma|_{[t, t_0]}) = t_0 - t$ для всех $t \in [0, t_0]$.

Согласно следствию 5.5.4, для компактного множества $\gamma([0, t_0])$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две точки из $\gamma([0, t_0])$, расстояние между которыми меньше δ , соединяет единственная геодезическая длины меньше δ , и эта геодезическая является кратчайшей.

Пусть $0 < \varepsilon < \delta$ и $t_0 - \varepsilon < t < t_0$. Отрезок $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t]}$ является геодезической длины $t - t_0 + \varepsilon < \delta$. Следовательно, он кратчайший, т. е.

$$\rho(\gamma(t_0 - \varepsilon), \gamma(t)) = t - (t_0 - \varepsilon) \quad \text{для} \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0].$$

Переходя здесь к пределу по $t \rightarrow t_0$, имеем

$$\rho(\gamma(t_0 - \varepsilon), \gamma(t_0)) = \varepsilon.$$

Таким образом, $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0]}$ имеет длину ε и является кратчайшим путем из $\gamma(t_0 - \varepsilon)$ в $p_0 = \gamma(t_0)$. Согласно теореме 5.5.1, $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0]}$ — геодезическая и $\gamma|_{[0, t_0]}$ — геодезическая. Поэтому для достаточно малых $\tau > 0$

$$\gamma(t_0 - \tau) = \exp_{p_0}(\tau X_0) \quad \text{для некоторого} \quad X_0 \in T_{p_0}M, \quad \|X_0\| = 1.$$

Эта формула имеет смысл и при отрицательных τ , если $|\tau|$ мало. Таким образом, геодезическая $\gamma(t)$ продолжается на интервал $[0, t_0 + \varepsilon')$, $\varepsilon' > 0$, что противоречит определению t_0 . \square

Упражнения

1. Пример неполного многообразия. Выбросим из \mathbb{R}^n одну точку, оставив метрику евклидовой. Покажите, что $(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, e)$ не является полным римановым многообразием.

2. Докажите, что любое компактное риманово многообразие является полным.

3. Докажите, что плоскость Лобачевского (см. упражнение 5 из §3) есть полное риманово многообразие.

Литература, рекомендуемая к этой главе: [7, 13, 15, 23].

Глава 6

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Обратите внимание, что пока глава 3 (теория Морса) стоит особняком в нашем курсе, главы 4 и 5 независимы от нее. В настоящей главе мы привлечем основные идеи теории Морса к изучению пространства путей риманова многообразия.

6.1. Пространство путей гладкого многообразия

Пусть M — гладкое многообразие и p, q — две его точки (не обязательно различные). *Кусочно-гладким путем* из p в q будем называть отображение $\omega : [0, 1] \rightarrow M$, такое, что

1) существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$, для которого ограничение $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ есть гладкое отображение для каждого $1 \leq i \leq k$;

2) $\omega(0) = p$ и $\omega(1) = q$.

Подчеркнем, что из 1) следует непрерывность отображения ω . Обозначим через $\Omega(M; p, q)$ множество всех кусочно-гладких путей из p в q . Впрочем, это обозначение будет обычно сокращаться до $\Omega(p, q)$ или даже до Ω . Позднее мы снабдим Ω топологией, но пока этого не нужно. Мы рассматриваем Ω как нечто вроде “бесконечномерного многообразия”. Чтобы реализовать эту аналогию, начнем со следующего

определения.

Касательным пространством к Ω в точке $\omega \in \Omega$ назовем пространство всех кусочно-гладких векторных полей $W(t)$ вдоль пути ω , удовлетворяющих $W(0) = 0$ и $W(1) = 0$. Это (бесконечномерное) векторное пространство будет обозначаться через $T_\omega\Omega$.

Рассмотрим действительную функцию $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Следуя традициям вариационного исчисления, будем впредь такие функции именовать (*нелинейными*) *функционалами*, подчеркивая тем самым, что область определения F сама состоит из функций (в нашем случае из путей). Естественно попытаться определить дифференциал

$$d_\omega F : T_\omega\Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.1.1)$$

этого функционала в точке $\omega \in \Omega$. Для этого воспользуемся следующей аналогией.

Если $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на гладком многообразии M , то дифференциал $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ может быть определен следующим образом. Для $X \in T_p M$ рассмотрим такую гладкую кривую $u \mapsto \sigma(u)$ ($-\delta < u < \delta$), что $\sigma(0) = p$ и $\frac{d\sigma}{du}(0) = X$. Тогда $(d_p f)(X) = \left. \frac{df(\sigma(u))}{du} \right|_{u=0}$.

Чтобы провести аналогичное построение для $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, введем следующее

Определение 6.1.1. (*Однопараметрической*) *вариацией пути* $\omega \in \Omega$ (*с неподвижными концами*) называется отображение

$$\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega,$$

определенное для некоторого $\delta > 0$ и такое, что

- 1) $\bar{\sigma}(0) = \omega$;
- 2) существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$, для которого отображение

$$\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M, \quad \sigma(t, u) = \bar{\sigma}(u)(t)$$

является гладким на каждом прямоугольнике $[t_{i-1}, t_i] \times (-\delta, \delta)$ ($1 \leq i \leq k$).

Заметим, что так как каждый путь $\bar{\sigma}(u)$ принадлежит $\Omega(M; p, q)$, то

- 3) $\sigma(0, u) = p$, $\sigma(1, u) = q$ для всех $u \in (-\delta, \delta)$.

Под *вариацией* в дальнейшем мы будем понимать либо σ , либо $\bar{\sigma}$.

Это определение во многом повторяет введенное в §5.4 понятие параметризованной поверхности за исключением двух существенных деталей: а) вместо гладкости отображения σ мы теперь предполагаем лишь кусочную гладкость и б) мы требуем, чтобы начало и конец пути ω оставались неподвижными при вариации. Впрочем, в дальнейшем нам придется иногда отказываться от этого требования, рассматривая вариации “со свободными концами”. Кроме того, в дальнейшем мы встретимся с “двупараметрическими вариациями”, в которых участвуют два параметра (u_1, u_2) .

Если $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ — вариация пути ω , то *векторным полем вариации* называется векторное поле $W \in T_\omega \Omega$, определяемое равенством

$$W(t) = \left(\frac{d\bar{\sigma}}{du}(0) \right)(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0).$$

Если $\bar{\sigma}(u)$ интерпретируется как “гладкая кривая” в Ω , то W есть “вектор скорости” этой кривой в точке $\omega = \bar{\sigma}(0)$. Заметим, что для любого $W \in T_\omega \Omega$ существует вариация $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$, удовлетворяющая $\bar{\sigma}(0) = \omega$ и $\frac{d\bar{\sigma}}{du}(0) = W$. Действительно, можно положить

$$\bar{\sigma}(u)(t) = \exp_{\omega(t)}(uW(t)).$$

Пусть $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал. Попытаемся определить дифференциал (6.1.1) следующим образом, действуя по аналогии с приведенным после (6.1.1) абзацем. Для $W \in T_\omega \Omega$ выберем такую вариацию $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$, что

$$\bar{\sigma}(0) = \omega, \quad \frac{d\bar{\sigma}}{du}(0) = W,$$

и положим

$$(d_\omega F)(W) = \left. \frac{dF(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0}.$$

Конечно, без дополнительных предположений о функционале F нельзя ручаться, что эта производная существует и что она не зависит от выбора вариации $\bar{\sigma}$. Мы не станем сейчас исследовать условия, гарантирующие существование этой производной. Последняя формула приведена лишь для того, чтобы мотивировать следующее определение.

Определение 6.1.2. Путь $\omega \in \Omega(M; p, q)$ называется критической точкой (или экстремалью) функционала $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, если производная $\left. \frac{dF(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0}$ существует и равна нулю для любой вариации пути ω .

Сравните это с приведенным в §3.1 определением критической точки функции. Например, если F достигает минимума на пути ω_0 и все производные $\frac{d(F(\bar{\sigma}(u)))}{du}$ определены, то ω_0 — критический путь.

6.2. Функционал длины и функционал энергии

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Напомним, что для пути $\omega \in \Omega$ и $0 \leq a \leq b \leq 1$ длина отрезка $\omega|_{[a,b]}$ этого пути определяется равенством

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\omega(t)) \frac{d\omega^i(t)}{dt} \frac{d\omega^j(t)}{dt}} dt. \quad (6.2.1)$$

Присутствие квадратного корня в подынтегральном выражении значительно затрудняет изучение этого функционала. С аналитической точки зрения более простым является функционал энергии

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt = \int_a^b g_{ij}(\omega(t)) \frac{d\omega^i(t)}{dt} \frac{d\omega^j(t)}{dt} dt. \quad (6.2.2)$$

Название “функционал энергии” является общепринятым в геометрии и мы будем им пользоваться, хотя с физической точки зрения более правильным является термин “функционал действия”.

Сравним функционалы (6.2.1) и (6.2.2). Согласно неравенству Коши – Буняковского

$$\left(\int_a^b f g dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 dt \right) \left(\int_a^b g^2 dt \right),$$

примененного к $f(t) = 1$ и $g(t) = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$, имеем

$$(L_a^b)^2 \leq (b - a) E_a^b,$$

причем равенство достигается только для постоянной функции g , т. е. тогда и только тогда, когда параметр t пропорционален длине дуги.

Предположим теперь, что существует кратчайшая геодезическая $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, соединяющая $p = \omega(0)$ с $q = \omega(1)$. Тогда

$$E(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\omega) \leq E(\omega).$$

Здесь равенство $L^2(\gamma) = L^2(\omega)$ возможно, только если ω — также кратчайшая геодезическая, быть может, иначе параметризованная. С другой стороны, равенство $L^2(\omega) = E(\omega)$ возможно, только если параметр t пропорционален длине дуги ω . Итак, $E(\gamma) < E(\omega)$, кроме случая, когда ω — тоже кратчайшая геодезическая. Тем самым доказано

Предложение 6.2.1. Пусть M — полное риманово многообразие, и пусть расстояние между точками $p, q \in M$ равно d . Тогда функционал энергии

$$E : \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

достигает минимума d^2 в точности на кратчайших геодезических, соединяющих p и q .

6.3. Формула первой вариации

Пусть p, q — две точки риманова многообразия M . Рассмотрим вариацию $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ пути $\omega \in \Omega(M; p, q)$ и вычислим производную $\left. \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0}$. Дифференцируя равенство

$$E(\bar{\sigma}(u)) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\|^2 dt$$

и пользуясь правилом дифференцирования скалярного произведения, имеем

$$\frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} = 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Согласно лемме 5.4.1, $\frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ и формула приобретает вид

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} = \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \quad (6.3.1)$$

Далее мы собираемся преобразовать интеграл из (6.3.1) путем интегрирования по частям. При этом необходима некоторая осторожность, так как функция σ лишь кусочно-гладкая и подынтегральное выражение имеет разрывы в некоторых точках. Поэтому поступим следующим образом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ для которого ограничение вариации σ на каждый прямоугольник $[t_{i-1}, t_i] \times (-\delta, \delta)$ ($1 \leq i \leq k$) гладко. Перепишем (6.3.1) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \quad (6.3.2)$$

Теперь мы можем преобразовать каждый из интегралов в (6.3.2) путем интегрирования по частям. Для этого сначала преобразуем подынтегральное выражение, выделяя производную по t :

$$\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-0}} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}+0} \\ &\quad - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt, \end{aligned}$$

где $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-0}}$ — значение функции $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle$ в правом конце отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, не совпадающее со значением $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i+0}$ этой функции в левом конце отрезка $[t_i, t_{i+1}]$. Подставляя последнюю формулу в (6.3.2), записываем результат в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} &= \sum_{i=1}^k \left(\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}+0} \right) \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Перегруппируем слагаемые суммы в (6.3.3), объединив $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i+0}$ и $\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left(\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}+0} \right) \\ &= - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_0+0} + \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_k-0} \\ & \quad - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i+0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} \right). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Первые два слагаемых в правой части равны нулю, поскольку σ — вариация с неподвижными концами. Заметим также, что функция $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ непрерывна и, следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i+0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u} \Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle,$$

где $\Delta_{t_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{t=t_i+0} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{t=t_i-0}$ — скачок функции $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ в точке t_i . Таким образом, (6.3.4) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^k \left(\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_i-0} - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}+0} \right) = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u} \Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle.$$

Подставим это значение в (6.3.3):

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} = - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u} \Big|_{t=t_i}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \quad (6.3.5)$$

Теперь полагаем $u = 0$ в (6.3.5). Вспоминаем, что $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, 0) = \dot{\omega}(t)$ есть вектор скорости пути ω и $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) = W(t)$ есть векторное поле вариации σ . Таким образом,

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_{i=1}^{k-1} \langle W(t_i), \Delta_{t_i} \dot{\omega} \rangle - \int_0^1 \left\langle W(t), \frac{D \dot{\omega}}{dt}(t) \right\rangle dt.$$

Тем самым доказана

Теорема 6.3.1 (формула первой вариации). Пусть p, q — две точки риманова многообразия M и $\omega \in \Omega(M; p, q)$. Для любой вариации $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ пути ω справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_t \langle W(t), \Delta_t \dot{\omega} \rangle - \int_0^1 \left\langle W(t), \frac{D\dot{\omega}}{dt}(t) \right\rangle dt, \quad (6.3.6)$$

где $W(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ — векторное поле вариации σ и $\Delta_t \dot{\omega} = \dot{\omega}(t+0) - \dot{\omega}(t-0)$ — скачок вектора скорости в точке t . Сумма в правой части равенства (6.3.6) содержит конечное число слагаемых, соответствующих точкам излома пути ω .

Формула (6.3.6) имеет наглядный смысл. Сумма в правой части говорит о том, что изменение пути ω в направлении излома уменьшает энергию пути (рис. 6.1). Интеграл в правой части формулы означает, что изменение пути ω в направлении вектора ускорения $\frac{D\dot{\omega}}{dt}$ также уменьшает энергию пути.

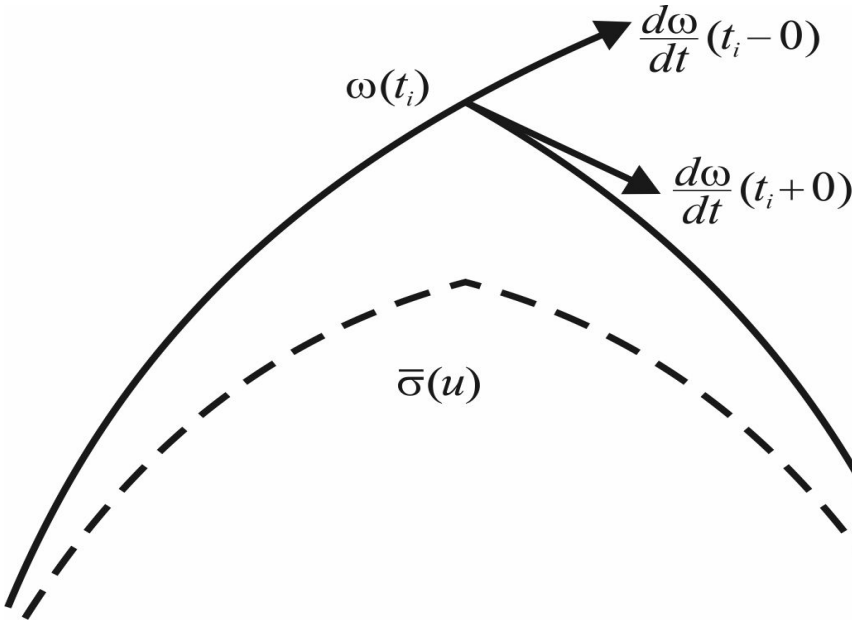


Рис. 6.1. Деформация пути в направлении излома уменьшает энергию

Напомним, что в конце §6.1 мы оставили без рассмотрения вопрос о существовании производной $\left. \frac{d(F(\bar{\sigma}(u)))}{du} \right|_{u=0}$ для произвольного функционала $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Формула (6.3.6) дает положительный ответ на этот вопрос для функционала энергии: производная $\left. \frac{d(E(\bar{\sigma}(u)))}{du} \right|_{u=0}$ определена для любой вариации пути ω и зависит лишь от векторного поля W вариации, причем эта зависимость — линейная. Тем самым корректно определен линейный оператор

$$d_\omega E : T_\omega \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (d_\omega E)(W) = \left. \frac{d E(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0} \quad \text{для} \quad W(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0), \quad (6.3.7)$$

который называется *дифференциалом функционала энергии* в точке $\omega \in \Omega$.

Теорема 6.3.2. *Экстремальными функционала энергии $E : \Omega(M; , p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ являются параметризованные отрезком $[0, 1]$ геодезические, идущие из p в q , и только они. Другими словами, дифференциал (6.3.7) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда путь ω есть геодезическая.*

Доказательство. Для геодезической правая часть формулы (6.3.6) равна нулю, поскольку вектор ускорения равен нулю и геодезическая не имеет изломов.

Обратно, пусть $\omega \in \Omega$ — экстремаль, т. е. $\left. \frac{d E(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0} = 0$ для любой вариации пути ω . Напомним, что любое векторное поле $W \in T_\omega \Omega$ является векторным полем некоторой вариации. Выберем сначала это векторное поле в виде

$$W(t) = f(t) \frac{D\dot{\omega}}{dt}(t),$$

где $f(t)$ — некоторая гладкая функция на $[0, 1]$, обращающаяся в нуль в точках излома пути ω и в концах отрезка $[0, 1]$, и положительная во всех остальных точках. Тогда $\langle W(t), \Delta_t \dot{\omega} \rangle = 0$ при всех t и формула (6.3.6) дает

$$0 = \frac{1}{2} \left. \frac{d E(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0} = - \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D\dot{\omega}}{dt}(t) \right\|^2 dt.$$

В силу положительности f отсюда следует, что вектор ускорения $\frac{D\dot{\omega}}{dt}$ тождественно равен нулю, т. е. ω есть ломаная геодезическая.

Выберем теперь вариацию так, что $W(t_i) = \Delta_{t_i}\dot{\omega}$ во всех точках излома пути ω . Тогда

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_i \|\Delta_{t_i}\dot{\omega}\|^2.$$

Следовательно, все $\Delta_{t_i}\dot{\omega}$ равны нулю и ω принадлежит классу C^1 даже в точках t_i . Теперь из теоремы о единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений вытекает, что ω принадлежит классу C^∞ и является геодезической. \square

Замечание. Внимательный читатель может заметить аналогию между приведенным доказательством теорем 6.3.1–6.3.2 и выводом уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей произвольного функционала $F(\omega) = \int_0^1 L(\omega, \dot{\omega}, t) dt$, как он обычно приводится в курсе теоретической механики. Единственное отличие состоит в том, что традиционно уравнение Эйлера — Лагранжа рассматривается лишь для гладких вариаций, а мы рассмотрели более общий случай кусочно-гладких вариаций.

Упражнения

1. Докажите следующее обобщение формулы первой вариации. Для пути $\omega \in \Omega(M; p, q)$ пусть $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — вариация со свободными концами пути ω (т. е. не требуется, чтобы $\sigma(0, u) = p$ и $\sigma(1, u) = q$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \Big|_{u=0} &= \langle W(1), \dot{\omega}(1) \rangle - \langle W(0), \dot{\omega}(0) \rangle - \sum_t \langle W(t), \Delta_t \dot{\omega} \rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle W(t), \frac{D\dot{\omega}}{dt}(t) \right\rangle dt, \end{aligned}$$

где $W(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$.

2. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая и $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — геодезическая вариация со свободными концами пути γ (см. определение в §5.4). Тогда (докажите)

$$\frac{dL(\bar{\sigma}(u))}{du} \Big|_{u=0} = \left\langle J(1), \frac{\dot{\gamma}(1)}{\|\dot{\gamma}(1)\|} \right\rangle - \left\langle J(0), \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|} \right\rangle,$$

где $J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ — поле Якоби вдоль γ .

6.4. Формула второй вариации

Вспомним ход наших рассуждений в §3.2. Для критической точки p гладкой функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ мы определили гессиан

$$H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

как симметричную билинейную форму, матрица которой в локальных координатах совпадает с матрицей вторых частных производных функции f в точке p . Легко видеть, что для $X_1, X_2 \in T_p M$ значение гессиана $(H_p f)(X_1, X_2)$ может быть найдено следующим образом. Выберем гладкое отображение $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$, удовлетворяющее

$$\bar{\sigma}(0, 0) = p, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1}(0, 0) = X_1, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_2}(0, 0) = X_2.$$

Тогда $(H_p f)(X_1, X_2) = \left. \frac{\partial^2 f(\bar{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)}.$

Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая в римановом многообразии и $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. Согласно теореме 6.3.2, γ есть критическая точка (экстремаль) функционала энергии $E : \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$. Действуя по аналогии с предыдущим абзацем, определим *гессиан функционала энергии в критической точке γ*

$$H_\gamma E : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.4.1)$$

следующим образом. Для заданных векторных полей $W_1, W_2 \in T_\gamma \Omega$ строим двухпараметрическую вариацию $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$, удовлетворяющую

$$\bar{\sigma}(0, 0) = \gamma, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1}(t; 0, 0) = W_1(t), \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_2}(t; 0, 0) = W_2(t),$$

и полагаем

$$(H_\gamma E)(W_1, W_2) = \left. \frac{\partial^2 E(\bar{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)}. \quad (6.4.2)$$

Мы должны доказать, во-первых, корректность этого определения, т. е. что производная (6.4.2) зависит лишь от W_1, W_2 , но не от выбора вариации σ ; и во-вторых, что (6.4.1) есть симметричная билинейная форма. Все эти утверждения вытекают из следующей теоремы.

Теорема 6.4.1 (формула второй вариации). Пусть

$$\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$$

— *двупараметрическая вариация геодезической* $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, *которой соответствуют векторные поля вариации*

$$W_i(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u_i}(t; 0, 0) \in T_\gamma \Omega \quad (i = 1, 2).$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\bar{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0} &= - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(W_1, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \right\rangle dt, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

где

$$\Delta_t \frac{DW_1}{dt} = \frac{DW_1}{dt}(t+0) - \frac{DW_1}{dt}(t-0)$$

— *скачок производной* $\frac{DW_1}{dt}$ *в одной из конечного числа ее точек разрыва в открытом интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Согласно формуле (6.3.5) предыдущего параграфа,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E(\bar{\sigma})}{\partial u_2} = - \sum_t \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Дифференцируем это равенство по u_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\bar{\sigma})}{\partial u_1 \partial u_2} &= - \sum_t \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}, \Delta_t \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle - \sum_t \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \Delta_t \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}, \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Полагаем здесь $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Первое и третье слагаемые в правой части обратятся в нуль, поскольку $\gamma = \bar{\sigma}(0, 0)$ — *целая геодезическая*.

Операторы $\frac{D}{\partial u_1}$ и Δ_t во втором слагаемом, очевидно, перестановочны. Таким образом, мы получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\bar{\sigma})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum_t \left\langle W_2, \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \Big|_{u_1=u_2=0} dt, \quad (6.4.4)$$

Чтобы переставить операторы $\frac{D}{\partial u_1}$ и $\frac{D}{\partial t}$ в подынтегральном выражении, воспользуемся леммой 5.4.1, согласно которой

$$\frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Полагая здесь $(u_1, u_2) = (0, 0)$ и используя равенство

$$\frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{u_1=u_2=0} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} \Big|_{u_1=u_2=0} = \frac{DW_1}{dt},$$

получаем

$$\frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{u_1=u_2=0} = \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(W_1, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}. \quad (6.4.5)$$

Подставляя это выражение в (6.4.4), приходим к (6.4.3). \square

Правая часть формулы (6.4.3) зависит лишь от W_1 и W_2 , но не от вариации σ ; причем зависимость от каждого из полей W_i ($i = 1, 2$) — линейная. Тем самым мы убедились, что формула (6.4.2) корректно определяет билинейную форму (6.4.1). Свойство симметричности

$$(H_\gamma E)(W_1, W_2) = (H_\gamma E)(W_2, W_1)$$

вовсе не очевидно, если исходить из формулы второй вариации; но оно немедленно следует из симметричности $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$.

Продолжая аналогию с главой 3, вводим следующее

Определение 6.4.2. Индексом геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ называется индекс ее гессиана, т. е. максимальная из размерностей подпространств $V \subset T_\gamma \Omega$, на которых гессиан отрицательно определен. Последнее означает, что

$$(H_\gamma E)(W, W) < 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq W \in V.$$

Мы убедимся позднее, что индекс геодезической всегда конечен.

Квадратичную форму, соответствующую гессуану $H_\gamma E$, можно описать в терминах однопараметрической вариации. Действительно,

$$(H_\gamma E)(W, W) = \left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_{u=0},$$

где $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ — вариация γ , для которой векторное поле вариации равно W . Чтобы убедиться в этом, нужно лишь ввести двухпараметрическую вариацию

$$\bar{\tau}(u_1, u_2) = \bar{\sigma}(u_1 + u_2)$$

и заметить, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \quad \left. \frac{\partial^2 E(\bar{\tau}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=u_2=0} = \left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_{u=0}.$$

В качестве применения этого замечания докажем следующее

Предложение 6.4.3. *Если $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — кратчайшая геодезическая, соединяющая точки p и q , то квадратичная форма $H_\gamma E$ неотрицательна и, следовательно, индекс геодезической γ равен нулю.*

Доказательство. Из неравенства $E(\bar{\sigma}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\sigma}(0))$ вытекает, что

$$\left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_{u=0} \geq 0$$

и, следовательно, $(H_\gamma E)(W, W) \geq 0$ для всех W . \square

Упражнения

1. Докажите, что формула второй вариации может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E(\bar{\sigma}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u_1=u_2=0} = \int_0^1 \left(\left\langle \frac{DW_1}{dt}, \frac{DW_2}{dt} \right\rangle - \langle R(W_1, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W_2 \rangle \right) dt.$$

Указание: преобразуйте интеграл из правой части формулы (6.4.3) путем интегрирования по частям подобно тому, как мы поступили при выводе формулы первой вариации в предыдущем параграфе.

2. Докажите следующее обобщение формулы второй вариации. Для пути $\omega \in \Omega(M; p, q)$ пусть $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — вариация со свободными концами пути ω (т. е. не требуется, чтобы $\sigma(0, u) = p$ и $\sigma(1, u) = q$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \Big|_{u=0} &= \langle V_1, \dot{\omega}(1) \rangle - \langle V_0, \dot{\omega}(0) \rangle \\ &+ \int_0^1 \left(\left\| \frac{DW}{dt} \right\|^2 - \langle R(W, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, W \rangle \right) dt, \end{aligned}$$

где $W(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ и $V_0 = \frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(0, 0)$, $V_1 = \frac{D}{du} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(1, 0)$.

3. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая и $\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ — геодезическая вариация со свободными концами пути γ (см. определение в §5.4). Тогда (докажите)

$$\begin{aligned} c \frac{d^2 L(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \Big|_{u=0} &= \langle V_1, \dot{\gamma}(1) \rangle - \langle V_0, \dot{\gamma}(0) \rangle \\ &+ \left\langle J(1), \frac{DJ}{dt}(1) \right\rangle - \left\langle J(0), \frac{DJ}{dt}(0) \right\rangle - \frac{\alpha^2}{c^2}, \end{aligned}$$

где векторы V_0 и V_1 те же, что в предыдущем упражнении, $J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ — поле Якоби вдоль γ , а постоянные c и α определяются равенствами $c = \|\dot{\gamma}\|$ и $\langle \dot{\gamma}, \frac{DJ}{dt} \rangle = \alpha \|\dot{\gamma}\|^2$.

6.5. Нулевое пространство гессиана. Сопряженные точки

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая в римановом многообразии. Точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ ($t_0, t_1 \in [a, b]$, $t_0 \neq t_1$) называются *сопряженными* вдоль γ , если существует ненулевое поле Якоби $J(t)$ вдоль γ , обращающееся в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$:

$$J(t_0) = 0, \quad J(t_1) = 0. \quad (6.5.1)$$

Размерность пространства таких полей Якоби называется *кратностью* сопряженных точек $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$.

Напомним, что размерность пространства всех полей Якоби вдоль γ равна $2n = 2 \dim M$. Первое из уравнений (6.5.1) выделяет n -мерное подпространство в пространстве всех полей Якоби. Тем самым кратность сопряженных точек не может превышать n . На самом деле эта кратность всегда не больше, чем $n - 1$. Действительно, поле Якоби $J(t) = (t - t_0)\dot{\gamma}(t)$ обращается в нуль при $t = t_0$ и отлично от нуля при остальных t .

Сопряженные точки тесно связаны с критическими точками экспоненциального отображения. Непосредственно из теоремы 5.4.4 вытекает

Теорема 6.5.1. *Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X \in T_p M$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Вектор X является критической точкой отображения \exp_p тогда и только тогда, когда точки $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_p(tX)$.*

Предположим для простоты, что риманово многообразие M полно, так что экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M$$

определено на всем $T_p M$. Согласно теореме Сарда, множество критических значений этого отображения имеет меру нуль. Теорема 6.5.1 говорит, что точка q является критическим значением этого отображения тогда и только тогда, когда она сопряжена с p вдоль некоторой геодезической, соединяющей p и q . Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 6.5.2. *Пусть M — полное риманово многообразие и $p \in M$. Для почти всех точек $q \in M$ (т. е. для всех точек за исключением множества меры нуль) p и q не сопряжены ни вдоль какой соединяющей их геодезической.*

Возвращаемся к изучению функционала энергии $E : \Omega(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ по аналогии с теорией Морса. Напомним, что в главе 3, определив гессиан

$$H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

в критической точке p функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, мы затем определили нулевое пространство гессиана как множество векторов $X \in T_p M$, для которых $(H_p f)(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_p M$. Вполне аналогично вводим следующее определение.

Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая. Нулевое пространство гессиана

$$H_\gamma E : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

состоит из тех векторных полей $W_1 \in T_\gamma \Omega$, для которых $(H_\gamma E)(W_1, W_2) = 0$ при всех $W_2 \in T_\gamma \Omega$. Размерность нулевого пространства называется степенью вырождения гессиана.

Теорема 6.5.3. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая. Векторное поле $J \in T_\gamma \Omega$ принадлежит нулевому пространству гессиана $H_\gamma E$ тогда и только тогда, когда J есть поле Якоби вдоль γ . Гессиан $H_\gamma E$ вырожден тогда и только тогда, когда точки $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль γ . Степень вырождения гессиана равна кратности сопряженных точек p и q . В частности, степень вырождения гессиана всегда конечна.

Доказательство. (Ср. с доказательством теоремы 6.3.2). Согласно формуле второй вариации,

$$-\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J, W) = \sum_t \left\langle W(t), \Delta_t \frac{DJ}{dt} \right\rangle + \int_0^1 \left\langle W, \frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \right\rangle dt. \quad (6.5.2)$$

Если $J(t)$ — поле Якоби, то правая часть этой формулы равна нулю для любого W . Следовательно, любое поле Якоби, удовлетворяющее $J(0) = 0$ и $J(1) = 0$, принадлежит нулевому пространству гессиана.

Обратно, пусть векторное поле $J \in T_\gamma \Omega$ принадлежит нулевому пространству гессиана, т. е. правая часть формулы (6.5.2) равна нулю для любого $W \in T_\gamma \Omega$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ — такое разбиение отрезка $[0, 1]$, что ограничение $J|_{[t_{i-1}, t_i]}$ гладко при каждом $1 \leq i \leq k$. Выберем гладкую функцию $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, обращающуюся в нуль в всех точках t_i и положительную между этими точками, и положим

$$W(t) = f(t) \left(\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \right).$$

Подставив это выражение в (6.5.2), получим

$$0 = -\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J, W) = \sum_t 0 + \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \right\|^2 dt.$$

В силу положительности f отсюда следует, что $J|_{[t_{i-1}, t_i]}$ — поле Якоби при каждом $1 \leq i \leq k$.

Выберем теперь такое $W \in T_\gamma \Omega$, что $W(t_i) = \Delta_{t_i} \frac{DJ}{dt}$ при каждом $1 \leq i \leq k-1$. Тогда

$$0 = -\frac{1}{2}(H_\gamma E)(J, W) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \Delta_{t_i} \frac{DJ}{dt} \right\|^2.$$

Отсюда следует, что $\frac{DJ}{dt}$ не имеет скачков, т. е. поле $J(t)$ принадлежит классу C^1 . А поскольку оно удовлетворяет уравнению Якоби на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, то оно принадлежит классу C^∞ и является полем Якоби на всем $[0, 1]$.

Заметим, наконец, что условия $J(0) = 0$ и $J(1) = 0$ следуют из предположения $J \in T_\gamma \Omega$, поскольку $T_\gamma \Omega$ состоит из векторных полей, обращающихся в нуль в концах γ . Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Оно очевидным образом влечет остальные утверждения. \square

В заключение параграфа рассмотрим два примера.

Пример 1. Риманово многообразие называется *плоским*, если его тензор кривизны тождественно равен нулю. Примерами плоских многообразий является \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой и круглый цилиндр, рассмотренный в §5.3. Для плоского многообразия уравнение Якоби приобретает вид $\frac{D^2 J}{dt^2} = 0$. Если $J = J^i e_i$, где $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ — параллельный вдоль геодезической $\gamma(t)$ базис пространства $T_{\gamma(t)}M$, то $\frac{d^2 J^i}{dt^2} = 0$. Очевидно, поле Якоби вдоль γ не может иметь более одного нуля. Следовательно, сопряженных точек нет и гессиан $H_\gamma E$ невырожден для любой геодезической γ .

Пример 2. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ единичного радиуса со стандартной метрикой, индуцированной евклидовой метрикой пространства \mathbb{R}^{n+1} (см. конец §5.5). Пусть p и q — две диаметрально противоположные точки сферы \mathbb{S}^n и γ — соединяющая их дуга большого

круга. Мы увидим, что p и q — сопряженные точки кратности $n - 1$ вдоль γ . Следовательно, степень вырождения гессиана принимает в данном случае максимально возможное значение. Предварительно обсудим одну конструкцию, справедливую в общем случае.

Пусть M — риманово многообразие и $\varphi_u : M \rightarrow M$ — семейство его изометрий, гладко зависящее от параметра $u \in (-\delta, \delta)$ и такое, что φ_0 есть тождественное отображение. Для геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ кривая $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma_u(t) = \varphi_u(\gamma(t))$ также является геодезической, поскольку изометрия переводит геодезические в геодезические. Следовательно, отображение

$$\sigma : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M, \quad \sigma(t, u) = \varphi_u(\gamma(t))$$

есть геодезическая вариация геодезической γ . Согласно теореме 5.4.2, векторное поле

$$J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) = \left. \frac{\partial \varphi_u(\gamma(t))}{\partial u} \right|_{u=0}$$

является полем Якоби вдоль γ . Эта конструкция позволяет находить многие интересные решения уравнения Якоби в случае риманова многообразия с достаточно богатой группой изометрий. Если, в частности, мы ищем поле Якоби вдоль γ , обращающееся в нуль в концевых точках $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$, то надо рассматривать те семейства изометрий φ_u , для которых p и q являются неподвижными точками, т. е. $\varphi_u(p) = p$ и $\varphi_u(q) = q$ при всех u .

Возвращаемся к нашему примеру. Пусть p и q — две диаметрально противоположные точки сферы \mathbb{S}^n и γ — соединяющая их дуга большого круга. Легко видеть, что существуют $n - 1$ линейно независимых вращений сферы, оставляющих p и q неподвижными. Применяя приведенную конструкцию, получаем $n - 1$ линейно независимых полей Якоби вдоль γ , обращающихся в нуль в точках p и q (рис. 6.2). Следовательно, p и q сопряжены вдоль γ с кратностью $n - 1$.

Сопряженность диаметрально противоположных точек сферы тесно связана со следующим обстоятельством. Для любой точки $p \in \mathbb{S}^n$ экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_p \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$$

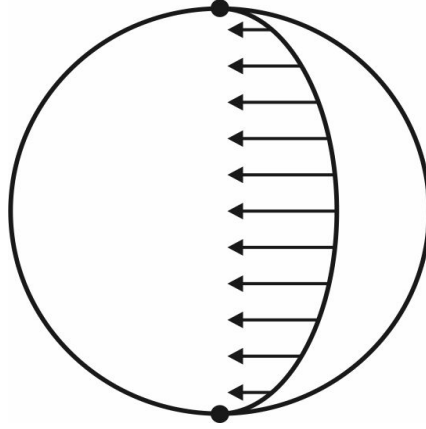


Рис. 6.2. Поле Якоби можно получить, вращая сферу

отображает шар $B_\pi = \{X \in T_p \mathbb{S}^n \mid \|X\| < \pi\}$ диффеоморфно на $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$, где q — диаметрально противоположная для p точка. Что же касается граничной сферы $\{X \in T_p \mathbb{S}^n \mid \|X\| = \pi\}$ этого шара, \exp_p отображает эту сферу целиком в точку q .

Упражнения

1. Докажите, что точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ ($t_0, t_1 \in [a, b]$, $t_0 \neq t_1$) не сопряжены вдоль геодезической $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ тогда и только тогда, когда краевая задача для уравнения Якоби

$$J(t_0) = J_0, \quad J(t_1) = J_1$$

имеет единственное решение для любых $J_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ и $J_1 \in T_{\gamma(t_1)}M$.

2. Пусть p и q — две точки (не обязательно различные) полного риманова многообразия M . Согласно теореме 6.5.1, точки p и q сопряжены вдоль некоторой соединяющей их геодезической тогда и только тогда, когда q есть критическое значение экспоненциального отображения $\exp_p : T_p M \rightarrow M$. Докажите, что если $X \in T_p M$ — критическая точка этого отображения, то размерность нулевого пространства дифференциала

$$d_X \exp_p : T_p M \rightarrow T_{\exp_p(X)} M$$

равна кратности, с которой точки p и $q = \exp_p(X)$ сопряжены вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ ($0 \leq t \leq 1$).

3. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ — геодезическая длины $k\pi$ на сфере единичного радиуса, где k — положительное целое число. Обратим внимание, что γ замкнута при четном k . Докажите, что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ сопряжены вдоль γ с кратностью $n - 1$.

4. Докажите, что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ не сопряжены вдоль геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$, если длина γ не равна $k\pi$ для целого положительного k .

6.6. Теорема об индексе

Напомним, что для геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ мы определили индекс гессиана

$$H_\gamma E : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

как максимальную из размерностей подпространств в $T_\gamma \Omega$, на которых гессиан отрицательно определен. Его часто называют также индексом геодезической γ . Следующая важная теорема принадлежит Морсу.

Теорема 6.6.1. *Для геодезической $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ индекс λ гессиана $H_\gamma E$ равен числу точек $\gamma(t)$, где $0 < t < 1$, таких, что $\gamma(t)$ сопряжена с $\gamma(0)$ вдоль γ , если считать каждую сопряженную точку столько раз, какова ее кратность. Индекс λ всегда конечен.*

Отсюда немедленно вытекает

Следствие 6.6.2. *Геодезическая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ может содержать лишь конечное число точек, сопряженных с $\gamma(a)$ вдоль γ .*

Для доказательства теоремы 6.6.1 мы сначала оценим λ , разложив векторное пространство $T_\gamma \Omega$ в ортогональную сумму двух подпространств, на одном из которых гессиан положительно определен, а второе конечномерно.

Каждая точка $\gamma(t)$ имеет такую окрестность U , что любые две точки из U соединяет единственная кратчайшая геодезическая, гладко зависящая от своих концов (см. следствие 5.5.4). Выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ настолько мелким, чтобы каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ лежал в таком множестве U ; тогда каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ($1 \leq i \leq k$) является кратчайшей.

Обозначим через $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k) \subset T_\gamma\Omega$ подпространство, состоящее из всех векторных полей $W(t)$ вдоль γ , таких, что

- 1) $W|_{[t_{i-1}, t_i]}$ — поле Якоби вдоль $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ для всех $1 \leq i \leq k$;
- 2) $W(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ и $t = 1$.

Итак, $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ — конечномерное векторное пространство, состоящее из ломаных полей Якоби вдоль γ . Пусть $T' \subset T_\gamma\Omega$ — подпространство, состоящее из всех векторных полей $W \in T_\gamma\Omega$, удовлетворяющих $W(t_i) = 0$ при всех $1 \leq i \leq k$.

Лемма 6.6.3. *Векторное пространство $T_\gamma\Omega$ разлагается в прямую сумму*

$$T_\gamma\Omega = T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k) \oplus T'.$$

Эти два подпространства взаимно ортогональны относительно билинейной формы $H_\gamma E$. Кроме того, ограничение $H_\gamma E$ на T' положительно определено.

Доказательство. Пусть дано векторное поле $W \in T_\gamma\Omega$. Обозначим через W_1 то единственное “ломаное якобиево поле” из $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$, для которого $W_1(t_i) = W(t_i)$ при всех $0 \leq i \leq k$. Из замечания 5.4.3 следует, что W_1 существует и единственно. Очевидно, $W - W_1$ принадлежит T' . Итак, два подпространства $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ и T' порождают $T_\gamma\Omega$ и имеют нулевое пересечение.

Если $W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ и $W_2 \in T'$, то формула второй вариации дает

$$\frac{1}{2}(H_\gamma E)(W_1, W_2) = - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle - \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0.$$

Итак, наши подпространства взаимно ортогональны относительно гессиана.

При любом $W \in T_\gamma\Omega$ гессиан $(H_\gamma E)(W, W)$ можно интерпретировать как вторую производную $\left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_0$, где $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ — вариация геодезической γ с векторным полем вариации, равным W (ср. с замечанием, приведенным после определения 6.4.2). Если W принадлежит T' , то мы можем считать, что $\bar{\sigma}$ оставляет каждую из точек $\gamma(t_i)$ неподвижной, т. е. $\sigma(t_i, u) = \gamma(t_i)$ ($0 \leq i \leq k$).

Докажем, что $(H_\gamma E)(W, W) \geq 0$ при $W \in T'$. Пусть вариация σ выбрана, как в предыдущем абзаце. Тогда $\bar{\sigma}(u)$ есть кусочно-гладкий путь из $\gamma(0)$ в $\gamma(t_1)$, затем из $\gamma(t_1)$ в $\gamma(t_2)$, ..., из $\gamma(t_{k-1})$ в $\gamma(1)$. Но каждый отрезок $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ является кратчайшим, и поэтому имеет меньшую энергию, чем любой другой путь с теми же концами. Это доказывает неравенство

$$E(\bar{\sigma}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\sigma}(0)).$$

Следовательно, $\left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_0 \geq 0$.

Докажем, что $(H_\gamma E)(W, W) > 0$ при $W \in T'$, $W \neq 0$. Предположим, что $(H_\gamma E)(W, W) = 0$ и убедимся, что W лежит в нулевом пространстве гессиана. В самом деле, мы уже видели, что $(H_\gamma E)(W_1, W) = 0$ для любого $W_1 \in T_\gamma \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$. При любом $W_2 \in T'$ из неравенства

$$0 \leq (H_\gamma E)(W + cW_2, W + cW_2) = 2c(H_\gamma E)(W_2, W) + c^2(H_\gamma E)(W_2, W_2),$$

справедливого при всех c , вытекает, что $(H_\gamma E)(W_2, W) = 0$. Итак, W принадлежит нулевому пространству гессиана. Но нулевое пространство состоит из якобиевых полей. Так как T' не содержит якобиевых полей, отличных от нулевого, получаем, что $W = 0$. \square

Из леммы 6.6.3 немедленно следует

Лемма 6.6.4. *Индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E$ равен индексу (или степени вырождения) ограничения $H_\gamma E$ на подпространство $T_\gamma \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ломаных якобиевых полей. В частности, этот индекс всегда конечен (поскольку пространство $T_\gamma \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ конечномерно).*

Перейдем к доказательству теоремы 6.6.1, которое будет разбито на несколько вспомогательных утверждений. Для $\tau \in [0, 1]$ пусть γ_τ — ограничение геодезической γ на отрезок $[0, \tau]$. Обозначим через $\lambda(\tau)$ индекс гессиана $H_{\gamma_\tau} E$, связанного с этой геодезической. Тогда $\lambda(1)$ — индекс, который мы стараемся подсчитать.

Утверждение 1. $\lambda(\tau)$ — монотонная функция τ .

В самом деле, если $\tau < \tau'$, то существует $\lambda(\tau)$ -мерное пространство \mathcal{W} векторных полей вдоль γ_τ , обращающихся в нуль в $\gamma(0)$ и

$\gamma(\tau)$ и таких, что гессиан $H_{\gamma_\tau}E$ отрицательно определен на \mathcal{W} . Каждое векторное поле из \mathcal{W} продолжается до векторного поля вдоль $\gamma_{\tau'}$, тождественно равного нулю между $\gamma(\tau)$ и $\gamma(\tau')$. Итак, мы получили $\lambda(\tau)$ -мерное пространство полей вдоль $\gamma_{\tau'}$, на котором гессиан $H_{\gamma_{\tau'}}E$ отрицательно определен. Поэтому $\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau')$.

Утверждение 2. $\lambda(\tau) = 0$ при малых τ .

В самом деле, если τ достаточно мало, то γ_τ — кратчайшая геодезическая, поэтому $\lambda(\tau) = 0$, согласно предложению 6.4.3.

Исследуем теперь разрывы функции $\lambda(\tau)$. Заметим сначала, что эта функция непрерывна слева.

Утверждение 3. При любом $\tau \in (0, 1]$ и при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$.

Доказательство. В соответствии с леммой 6.6.4, число $\lambda(1)$ можно рассматривать как индекс гессиана на конечномерном векторном пространстве $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$. Мы можем считать, что разбиение выбрано так, что $t_i < \tau < t_{i+1}$. Тогда индекс $\lambda(\tau)$ можно рассматривать как индекс соответствующей квадратичной формы H_τ на векторном пространстве ломаных якобиевых полей вдоль γ_τ , определенном посредством разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t'_{i+1} = \tau$ отрезка $[0, \tau]$. Так как такое ломаное поле Якоби однозначно определяется своими значениями в точках $\gamma(t_j)$ ($1 \leq j \leq i$), это пространство изоморфно прямой сумме

$$\Sigma = (T_{\gamma(t_1)}M) \oplus (T_{\gamma(t_2)}M) \oplus \dots \oplus (T_{\gamma(t_i)}M).$$

Заметим, что это векторное пространство Σ не зависит от τ . Очевидно, что квадратичная форма H_τ на Σ непрерывно зависит от τ .

Форма H_τ отрицательно определена на некотором $\lambda(\tau)$ -мерном подпространстве $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Следовательно, при всех τ' , достаточно близких к τ , форма $H_{\tau'}$ отрицательно определена на \mathcal{W} . Поэтому $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$. Но если $\tau' = \tau - \varepsilon < \tau$, то, согласно утверждению 1, имеем также $\lambda(\tau - \varepsilon) \leq \lambda(\tau)$. Итак, $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$. \square

Утверждение 4. Пусть ν — степень вырождения гессиана $H_{\gamma_\tau}E$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

Итак, целочисленная функция $\lambda(\tau)$ испытывает скачок ν , когда переменная τ проходит через сопряженную точку кратности ν , и непрерывна в остальных точках. Очевидно, отсюда следует утверждение теоремы 6.6.1.

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$. Пусть H_τ и Σ — те же, что и в доказательстве утверждения 3. Так как $\dim \Sigma = ni$, то H_τ положительно определена на некотором подпространстве $\mathcal{W}' \subset \Sigma$ размерности $ni - \lambda(\tau) - \nu$. При всех τ' , достаточно близких к τ , форма $H_{\tau'}$ положительно определена на \mathcal{W}' . Поэтому

$$\lambda(\tau') \leq \dim \Sigma - \dim \mathcal{W}' = \lambda(\tau) + \nu.$$

Теперь доказываем противоположное неравенство $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$. Выберем $\lambda(\tau)$ векторных полей $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}$ вдоль γ_τ , равных нулю в концевых точках и таких, что матрица

$$((H_{\gamma_\tau} E)(W_i, W_j))$$

отрицательно определена. Выберем также ν линейно независимых якобиевых полей J_1, \dots, J_ν вдоль γ_τ , также равных нулю в концевых точках. Заметим, что ν векторов

$$\frac{DJ_h}{dt}(\tau) \in T_{\gamma(\tau)} M \quad (1 \leq h \leq \nu)$$

линейно независимы. Поэтому можно выбрать ν векторных полей X_1, \dots, X_ν вдоль $\gamma_{\tau+\varepsilon}$ так, чтобы матрица

$$\left\langle \frac{DJ_h}{dt}(\tau), X_k(\tau) \right\rangle$$

равнялась единичной $\nu \times \nu$ -матрице. Продолжим векторные поля W_i и J_h на $\gamma_{\tau+\varepsilon}$, полагая их равными нулю при $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$.

С помощью формулы второй вариации мы легко убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} (H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E)(J_h, W_i) &= 0, \\ (H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}} E)(J_h, X_k) &= 2\delta_{hk} \quad (\delta_{hk} — символ Кронекера). \end{aligned}$$

Пусть теперь c — некоторое малое положительное число. Рассмотрим $\lambda(\tau) + \nu$ векторных полей

$$W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1}J_1 - cX_1, \dots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu$$

вдоль $\gamma_{\tau+\varepsilon}$. Покажем, что эти поля порождают векторное пространство размерности $\lambda(\tau) + \nu$, на котором квадратичная форма $H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}}E$ отрицательно определена. Действительно, матрица $H_{\gamma_{\tau+\varepsilon}}E$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} ((H_{\gamma_{\tau}}E)(W_i, W_j)) & cA \\ cA^t & -4I + c^2B \end{pmatrix},$$

где A и B — фиксированные матрицы. Если c достаточно мало, то эта составная матрица отрицательно определена. \square

Упражнение

После первой сопряженной точки геодезическая перестает быть кратчайшей. Точнее (докажите): если $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — геодезическая и для некоторого $t_0 \in (a, b)$ точки $\gamma(a)$ и $\gamma(t_0)$ сопряжены вдоль γ , то γ не является кратчайшей. Заметим, что обратное утверждение неверно, т. е. геодезическая без сопряженных точек может не быть кратчайшей. Примеры такого рода геодезических дает круглый цилиндр, рассмотренный в §3 предыдущей главы. Далеко не всякая геодезическая на этом цилиндре является кратчайшей. С другой стороны, сопряженные точки отсутствуют, поскольку тензор кривизны этого цилиндра тождественно равен нулю.

6.7. Конечномерная аппроксимация пространства путей

В этом параграфе предполагаем, что M — связное риманово многообразие. Напомним, что определено расстояние $\rho(p, q)$ между точками $p, q \in M$.

До сих пор множество $\Omega = \Omega(M; p, q)$ рассматривалось без топологии. Введем теперь *расстояние* $d(\omega, \omega')$ между двумя путями $\omega, \omega' \in \Omega$ с длинами дуг соответственно $s(t)$ и $s'(t)$ формулой

$$d(\omega, \omega') = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{1/2}.$$

Второе слагаемое добавлено для того, чтобы функционал энергии $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(\omega) = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dt$$

был непрерывным на Ω . Это расстояние определяет топологию на Ω .

Напомним, что при изучении теории Морса в главе 3 мы для функции $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ввели множество $M^a = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$ и следили за изменением топологии этого множества при возрастании a . Применим ту же стратегию к изучению функционала энергии.

Для положительного числа a обозначим через Ω^a замкнутое множество $E^{-1}([0, a]) \subset \Omega$ и через $\text{Int } \Omega^a$ — открытое множество $E^{-1}([0, a))$. В отличие от главы 3, Ω^a и $\text{Int } \Omega^a$ являются “бесконечномерными многообразиями”. Мы построим конечномерную аппроксимацию для них.

Зафиксируем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ подпространство в Ω , состоящее из таких путей $\omega : [0, 1] \rightarrow M$, что

- 1) $\omega(0) = p$ и $\omega(1) = q$;
- 2) $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ есть геодезическая при всех $1 \leq i \leq k$.

Итак, $\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ состоит из всех ломаных геодезических, идущих из p в q , с изломами в точках предписанного разбиения. Введем также следующие подмножества топологического пространства Ω :

$$\begin{aligned} \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k) &= \Omega^a \cap \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k), \\ \text{Int } \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k) &= (\text{Int } \Omega^a) \cap \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k). \end{aligned}$$

Лемма 6.7.1. Пусть M — полное риманово многообразие и a — положительное число, для которого $\Omega^a \neq \emptyset$. Тогда для любого достаточно мелкого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ пространство $\text{Int } \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$ можно естественным образом снабдить структурой гладкого конечномерного многообразия.

Доказательство. Замкнутый шар

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\sqrt{a}}(p) = \{x \in M \mid \rho(x, p) \leq \sqrt{a}\} \subset M$$

компактен, поскольку M полно. Каждый путь $\omega \in \Omega^a$ лежит в этом шаре, как видно из неравенств $L^2(\omega) \leq E(\omega) \leq a$. Согласно следствию

5.5.3, существует такое $\varepsilon > 0$, что если $x, y \in \mathbb{D}_{\sqrt{a}}(p)$ и $\rho(x, y) < \varepsilon$, то имеется лишь одна геодезическая из x в y длины меньше $\varepsilon > 0$ и эта геодезическая гладко зависит от x и y .

Пусть разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ удовлетворяет $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$ ($1 \leq i \leq k$). Тогда для любой ломаной геодезической $\omega \in \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$

$$(L_{t_{i-1}}^{t_i} \omega)^2 = (t_i - t_{i-1}) E_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega) \leq (t_i - t_{i-1}) E(\omega) \leq (t_i - t_{i-1}) a < \varepsilon^2.$$

Следовательно, каждое звено $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ломаной геодезической ω однозначно и дифференцируемо определяется своими концами.

Сама ломаная геодезическая ω однозначно и дифференцируемо определяется набором точек

$$(\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in \underbrace{M \times \dots \times M}_{k-1}.$$

Очевидно, что отображение $\omega \mapsto (\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1}))$ является гомеоморфизмом пространства $\text{Int } \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$ на некоторое открытое множество в $(k-1)$ -кратном произведении $M \times \dots \times M$. Перенося гладкую структуру с этого произведения, получаем утверждение леммы. \square

Зафиксируем разбиение (t_0, t_1, \dots, t_k) , для которого справедливо утверждение леммы 6.7.1, и для сокращения дальнейших формул обозначим через B многообразие $\text{Int } \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$. Пусть

$$E' : B \rightarrow \mathbb{R}$$

— ограничение функционала E на это многообразие.

Теорема 6.7.2. *Функция $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая. При каждом $b < a$ множество $B^b = E'^{-1}([0, b])$ компактно и является деформационным ретрактом множества Ω^b . Критические точки функции E' совпадают с критическими точками функционала E в $\text{Int } \Omega^a$; это целые геодезические из p в q длины, меньшей \sqrt{a} . Индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ в каждой такой критической точке γ равен индексу (или степени вырождения) гессиана $H_\gamma E$. Само B также является деформационным ретрактом множества $\text{Int } \Omega^a$.*

Итак, пара (B, E') является точной конечномерной моделью бесконечномерной пары $(\text{Int } \Omega^a, E)$.

Доказательство. Так как ломаная геодезическая $\omega \in B$ гладко зависит от набора $(\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in M \times \dots \times M$, то энергия $E'(\omega)$ также гладко зависит от этого набора. В действительности справедлива явная формула

$$E'(\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{\rho^2(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))}{t_i - t_{i-1}}.$$

При $b < a$ множество B^b гомеоморфно множеству всех наборов

$$(p_1, \dots, p_{k-1}) \in \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D},$$

таких, что

$$\sum_{i=1}^k \frac{\rho^2(p_{i-1}, p_i)}{t_i - t_{i-1}} \leq b$$

(подразумевается, что $p_0 = p$, $p_k = q$). Как замкнутое подмножество компактного множества, B^b компактно.

Ретракцию

$$r : \text{Int } \Omega^a \rightarrow B$$

определим так. Пусть $r(\omega)$ — единственная ломаная геодезическая из B , такая, что каждое звено $r(\omega)|_{[t_{i-1}, t_i]}$ есть геодезическая длины меньше ε , идущая из $\omega(t_{i-1})$ в $\omega(t_i)$. Из неравенств

$$\rho^2(p, \omega(t)) \leq L^2(\omega) \leq E(\omega) < b$$

вытекает, что $\omega[0, 1] \subset \mathbb{D}$. Поэтому из неравенств

$$\rho^2(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i)) \leq (t_i - t_{i-1}) \left(E_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega) \right) < \frac{\varepsilon^2}{b} \cdot b = \varepsilon^2$$

следует, что $r(\omega)$ существует.

Очевидно, что $E(r(\omega)) \leq E(\omega) < a$. Ретракция r включается в однопараметрическое семейство отображений

$$r_u : \text{Int } \Omega^a \rightarrow \text{Int } \Omega^a \quad (0 \leq u \leq 1)$$

следующим образом. При $t_{i-1} \leq u \leq t_i$ пусть

$$\begin{cases} r_u(\omega)|_{[0, t_{i-1}]} = r(\omega)|_{[0, t_{i-1}]}; \\ r_u(\omega)|_{[t_{i-1}, u]} \text{ — кратчайшая геодезическая из } \omega(t_{i-1}) \text{ в } \omega(u); \\ r_u(\omega)|_{[u, 1]} = \omega|_{[u, 1]}. \end{cases}$$

Тогда r_0 — тождественное отображение и $r_1 = r$. Легко видеть, что $r_u(\omega)$ непрерывно зависит от (ω, u) . Это доказывает, что B есть деформационный ретракт множества $\text{Int } \Omega^a$.

(Построенная гомотопия r_u между тождественным отображением и r называется *деформацией Морса*, она часто используется в римановой геометрии. Деформация Морса имеет наглядный геометрический смысл: на части $[u, 1]$ отрезка $[0, 1]$ путь $r_u(\omega)$ совпадает с ω ; в то время как на части $[0, u]$ отрезка $[0, 1]$ путь $r_u(\omega)$ есть ломаная геодезическая с изломами в точках $t_1, \dots, t_{i-1} \leq u$.)

Так как $E(r_u(\omega)) \leq E(\omega)$, ясно, что каждое B^b есть деформационный ретракт множества Ω^b .

Каждая геодезическая является также и ломаной геодезической, поэтому ясно, что каждая критическая точка функционала энергии в $\text{Int } \Omega^a$ принадлежит многообразию B . Из формулы первой вариации следует, что критическими точками функции E' являются целые геодезические, и только они.

Рассмотрим касательное пространство $T_\gamma B$ к многообразию B в геодезической γ . Оно может быть отождествлено с пространством $T_\gamma \Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ломаных полей Якоби вдоль γ , введенному в предыдущем параграфе. Это отождествление устанавливается следующим образом. Пусть

$$\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow B$$

— вариация γ в ломаные геодезические. Тогда соответствующее векторное поле вариации $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0)$ есть ломаное поле Якоби вдоль γ (ср. с теоремой 5.4.1).

Теперь утверждение о том, что индекс (или степень вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ равен индексу (или степени вырождения) гессиана $H_\gamma E'$ немедленно следует из леммы 6.6.4. \square

6.8. Топология пространства путей

Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Выберем такое $a > 0$, что $\Omega^a \neq \emptyset$. Согласно теореме 6.7.2, множество $\text{Int } \Omega^a$ имеет тот же гомотопический тип, что и конечномерное многообразие $B = \text{Int } \Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$ для достаточно мелкого разбиения отрезка $[0, 1]$. Согласно той же теореме 6.7.2, $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, такая, что каждое множество $E'^{-1}[0, b]$ ($b < a$) компактно и критические точки индекса λ этой функции совпадают с целыми геодезическими $\gamma \in B$ индекса λ . Заметим также, что все критические точки функции E' невырождены, т. е. $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ есть функция Морса. Действительно, согласно теореме 6.5.1, геодезическая γ является вырожденной критической точкой тогда и только тогда, когда $p = \gamma(0)$ и $q = \gamma(1)$ сопряжены вдоль γ ; а мы предположили, что p и q не сопряжены ни вдоль какой геодезической.

Убедимся, наконец, что функция $E' : B \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное число критических точек, т. е. что имеется лишь конечное число геодезических $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, удовлетворяющих $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ и $E(\gamma) < a$. Длина такой геодезической не превосходит $c = \sqrt{a}$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 6.8.1. Пусть p и q — две точки полного риманова многообразия M , не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Для любого положительного числа c имеется лишь конечное множество геодезических из p в q длины, не превосходящей c .

Доказательство. Согласно теореме 6.5.1, точка q не является критическим значением отображения \exp_p , т. е. множество $(\exp_p)^{-1}(q)$ не содержит критических точек этого отображения. Согласно теореме об обратной функции, для любого $X \in (\exp_p)^{-1}(q)$ найдется окрестность $U \subset T_p M$, которую \exp_p отображает диффеоморфно на некоторую окрестность точки q . В частности, множество $(\exp_p)^{-1}(q) \subset T_p M$ дискретно (т. е. любая точка этого множества имеет окрестность, не содержащую других точек этого множества). Пересечение этого дискретного множества с компактным шаром $\{X \in T_p M \mid \|X\| \leq c\}$ конечно. \square

Вернемся к ситуации, рассмотренной перед леммой 6.8.1. Мы убедились, что функция E' на конечномерном многообразии B являет-

ся функцией Морса с конечным числом критических точек, причем $E' < a$ и множество $E'^{-1}[0, b]$ компактно для любого $b < a$. Применяя теорему 3.5.2, получаем

Теорема 6.8.2. Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Тогда для любого $a > 0$ множество

$$\Omega^a = \{\omega \in \Omega(M; p, q) \mid E(\omega) \leq a\}$$

имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса, в котором каждой геодезической γ , соединяющей p и q и удовлетворяющей $E(\gamma) \leq a$, соответствует одна клетка, размерность которой равна индексу гессиана $H_\gamma E$.

Мы собираемся из теоремы 6.8.2 вывести заключение о гомотопическом типе пространства $\Omega(M; p, q)$ всех путей. Для этого необходимо понятие бесконечного клеточного комплекса, поскольку во многих случаях две точки $p, q \in M$ соединяются бесконечным числом геодезических. Между тем в параграфах 8–9 главы 1 рассматривались лишь конечные клеточные комплексы. Поэтому мы сделаем небольшое отступление, чтобы ввести определение бесконечных клеточных комплексов и перечислить их основные гомотопические свойства. Подробное изложение этого предмета приведено в главе 3 книги [14].

Пусть имеется последовательность конечных клеточных комплексов, вложенных друг в друга

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \dots \quad (6.8.1)$$

Введем в объединении $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ топологию, объявив множество $U \subset K$ открытым, если для каждого n множество $U \cap K_n$ открыто в K_n . Это — так называемая *предельная* топология. Любое топологическое пространство K , которое можно получить таким образом, назовем (*бесконечным*) *полиэдром*, а саму последовательность (6.8.1) назовем (*бесконечным*) *клеточным комплексом*, реализующим полиэдр K . Все утверждения из параграфа 9 главы 1 переносятся на бесконечные клеточные комплексы. Единственным трудным местом в таком перенесении является следующее утверждение, известное как *теорема Уайтхеда*.

Пусть имеются две последовательности конечных клеточных комплексов, связанные цепочкой непрерывных отображений

$$\begin{array}{ccccccc} K_1 & \subset & K_2 & \subset & \dots & \subset & K_n & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ K'_1 & \subset & K'_2 & \subset & \dots & \subset & K'_n & \subset & \dots \end{array}.$$

Если каждая из вертикальных стрелок является гомотопической эквивалентностью и каждый квадрат этой диаграммы коммутативен, то предельное отображение $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \rightarrow K' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n$ также есть гомотопическая эквивалентность.

Доказательство этой теоремы не приводится, поскольку оно требует привлечения аппарата гомотопической топологии, выходящего за пределы нашего курса; см. главу 3 книги [14].

Теорема 6.8.3 (основная теорема теории Морса). Пусть M — полное риманово многообразие и $p, q \in M$ — две точки, не сопряженные ни вдоль какой соединяющей их геодезической. Тогда $\Omega(M; p, q)$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса, в котором каждой геодезической из p в q индекса λ соответствует одна клетка размерности λ .

Доказательство. Выберем последовательность $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ действительных чисел, которые не являются критическими значениями функционала энергии E , так что каждый интервал (a_{i-1}, a_i) содержит в точности одно критическое значение. Рассмотрим последовательность

$$\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots, \quad (6.8.2)$$

где мы можем считать, что Ω^{a_0} пусто. Из теоремы 6.8.2 и леммы 1.9.5 следует, что каждое Ω^{a_i} имеет гомотопический тип $\Omega^{a_{i-1}}$ с конечным числом приклеенных клеток, по одной клетке размерности λ на каждую геодезическую индекса λ из $E^{-1}(a_{i-1}, a_i)$ (см. также замечание в конце §3.4). Теперь, как в доказательстве теоремы 3.5.2, строим последовательность $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ конечных клеточных комплексов, клетки которых описаны выше, и последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^{a_0} & \subset & \Omega^{a_1} & \subset & \Omega^{a_2} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \subset & K_1 & \subset & K_2 & \subset & \dots \end{array}$$

гомотопических эквивалентностей. Согласно лемме 1.9.5, мы можем считать, что каждая гомотопическая эквивалентность, представленная на диаграмме вертикальной стрелкой, является продолжением отображения, представленного предыдущей вертикальной стрелкой; т. е. что диаграмма коммутативна. Обозначим через Ω^* множество $\Omega = \Omega(M; p, q)$, снабженное предельной топологией последовательности (6.8.2). Эта предельная топология не совпадает с введенной в §6.7 топологией на пространстве путей Ω . Однако можно доказать, что тождественное отображение $\Omega \rightarrow \Omega^*$ есть гомотопическая эквивалентность; мы не приводим здесь это доказательство. Согласно теореме Уайтхеда, $\Omega(M; p, q) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega^{a_i}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса

$$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i.$$

□

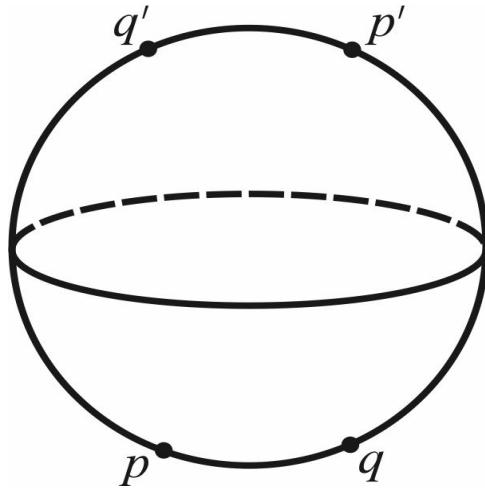


Рис. 6.3. Пара точек сферы соединяется счетным числом геодезических

Пример. *Пространство путей сферы \mathbb{S}^n .* Выберем точки $p, q \in \mathbb{S}^n$, как указано на рис. 6.3, и обозначим через p' и q' диаметрально противоположные точки. Тогда имеется счетное число $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ геодезических, соединяющих p с q . А именно, γ_0 — кратчайшая дуга pq большого круга; γ_1 — дуга $pq'p'q$ большого круга; γ_2 — дуга $pqr'q'pq$ и

т. д. Номер k указывает, сколько раз p или p' встречается внутри геодезической γ_k . Индекс геодезической γ_k равен $k(n-1)$, так как каждая внутренняя точка p или p' сопряжена с начальной точкой p с кратностью $n-1$. Таким образом, получается

Следствие 6.8.4. *Пространство путей $\Omega(\mathbb{S}^n; p, q)$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса с одной клеткой каждой из размерностей $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \dots$*

6.9. Некоторые соотношения между топологией и кривизной

Напомним, что в §5.2 мы ввели понятие секционной кривизны риманова многообразия в данной точке и в данном двумерном направлении.

Лемма 6.9.1. *Предположим, что секционная кривизна риманова многообразия M неположительна в любой точке и в любом двумерном направлении. Тогда никакие две точки M не сопряжены ни вдоль какой геодезической.*

Доказательство. Неположительность секционной кривизны означает, что

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle \leq 0$$

для любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_p M$.

Пусть J — поле Якоби вдоль геодезической $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Мы должны показать, что если J обращается в нуль в двух различных точках отрезка $[a, b]$, то J тождественно равно нулю. Из уравнения Якоби

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

находим

$$\left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle = -\langle R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J \rangle \geq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle J, J \rangle = 2 \frac{d}{dt} \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D^2 J}{dt^2}, J \right\rangle + 2 \left\| \frac{DJ}{dt} \right\|^2 \geq 0.$$

Итак, функция $\|J(t)\|^2$ — выпуклая. Если выпуклая неотрицательная функция обращается в нуль в двух различных точках, то она тождественно равна нулю на отрезке, концами которого являются эти точки.

Итак, если J обращается в нуль в двух различных точках, то J тождественно равно нулю на отрезке с концами в этих точках. А поскольку J удовлетворяет дифференциальному уравнению, то оно тождественно равно нулю на всем отрезке $[a, b]$. \square

Теорема 6.9.2 (теорема Адамара — Картана). Пусть M — полное односвязное риманово многообразие размерности n , секционная кривизна которого неположительна в любой точке и в любом двумерном направлении. Тогда 1) M диффеоморфно \mathbb{R}^n и 2) любые две точки из M соединены единственной геодезической.

Доказательство. Поскольку сопряженных точек нет, из теоремы об индексе вытекает, что каждая геодезическая из p в q имеет равный нулю индекс. Применяя теорему 6.8.3, получаем, что $\Omega(M; p, q)$ имеет гомотопический тип нульмерного клеточного комплекса с одной нульмерной клеткой для каждой геодезической из p в q .

Односвязность M эквивалентна связности $\Omega(M; p, q)$. Так как связный нульмерный клеточный комплекс состоит из одной клетки, существует ровно одна геодезическая, соединяющая p и q .

Итак, экспоненциальное отображение

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M$$

биективно. Согласно теореме 6.5.1, это отображение не имеет критических точек, т. е. является локальным диффеоморфизмом. Поскольку мы убедились в его биективности, то оно является диффеоморфизмом. \square

Полные односвязные римановы многообразия неположительной секционной кривизны обычно называются *многообразиями Адамара*. Несмотря на топологическую тривиальность (диффеоморфность \mathbb{R}^n), геометрия геодезических такого многообразия может быть весьма разнообразной. Модельными примерами, представляющими два “крайних противоположных случая”, здесь являются \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой и гиперболическое пространство (или пространство Лобачевского) \mathbb{H}^n с метрикой постоянной отрицательной секционной кривизны. Мы уже имели

возможность познакомиться с плоскостью Лобачевского в упражнении 5 из §3 главы 5. Геометрия произвольного многообразия Адамара может варьироваться “от Евклида до Лобачевского”.

Если же мы откажемся от условия односвязности, сохранив требования полноты и неположительности секционной кривизны, то попадем в большой раздел римановой геометрии, называемой *геометрией римановых пространств неположительной кривизны*, который интенсивно развивается вплоть до настоящего времени. Здесь получено много глубоких результатов, но еще больше поставлено вопросов, ждущих своего решения. Из последних упомянем лишь наиболее известную *проблему классификации трехмерных пространственных форм*: описать все компактные трехмерные римановы многообразия постоянной отрицательной секционной кривизны. Для читателей, интересующихся геометрией римановых пространств неположительной кривизны, рекомендую книгу [24], основанную на лекциях Михаила Громова, внесшего значительный вклад в этот раздел римановой геометрии.

Второй пример, который мы подробно рассмотрим в этом параграфе, относится к разделу *геометрия римановых многообразий положительной кривизны*, который в определенном смысле противоположен предыдущему. Напомним, что в §5.2 мы определили тензор Риччи $Ric_{ij} = R^p_{ipj}$. Для единичного вектора $X \in T_p M$ число

$$Ric(X, X) = Ric_{ij} X^i X^j$$

называется *кривизной Риччи* риманова многообразия M в точке p и направлении X . Кривизну Риччи можно интерпретировать в терминах секционной кривизны, как показывает следующая

Лемма 6.9.3. Пусть (X_1, \dots, X_n) — ортонормированный базис пространства $T_p M$. Тогда

$$Ric(X_n, X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} K(X_i, X_n),$$

где $K(X, Y)$ — секционная кривизна в двумерном направлении, определяемом векторами X и Y .

Доказательство. По определению $Ric(X_n, X_n)$ равно следу матрицы $\langle R(X_i, X_n)X_n, X_j \rangle$. Так как n -й диагональный член этой матрицы ра-

вен нулю, получаем

$$Ric(X_n, X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X_i, X_n)X_n, X_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(X_i, X_n).$$

□

Лемма 6.9.4. *Предположим, что кривизна Риччи n -мерного риманова многообразия M в любой точке $p \in M$ и для любого единичного вектора $X \in T_p M$ удовлетворяет неравенству*

$$Ric(X, X) \geq \frac{n-1}{r^2}, \quad (6.9.1)$$

где r — некоторое положительное число. Тогда каждая геодезическая в M длины больше πr содержит сопряженные точки и поэтому не является кратчайшей.

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — геодезическая длины L . Дополним вектор $X_n(0) = \dot{\gamma}(0)/L$ до ортонормированного базиса $(X_1(0), \dots, X_n(0))$ пространства $T_{\gamma(0)}M$, а затем разнесем каждый из этих векторов параллельно вдоль γ . Тогда получится ортонормированный базис $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ пространства $T_{\gamma(t)}M$ для каждого t , такой, что

$$\dot{\gamma} = LX_n, \quad \frac{DX_i}{dt} = 0.$$

Пусть

$$W_i(t) = (\sin \pi t)X_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1). \quad (6.9.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(H_\gamma E)(W_i, W_i) &= - \int_0^1 \left\langle W_i, \frac{D^2 W_i}{dt^2} + R(W_i, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 (\pi^2 - L^2 \langle R(X_i, X_n)X_i, X_n \rangle) dt. \end{aligned}$$

Суммируя по $i = 1, \dots, n-1$ и используя лемму 6.9.3, получим

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (H_\gamma E)(W_i, W_i) = \int_0^1 (\sin \pi t)^2 ((n-1)\pi^2 - L^2 Ric(X_n, X_n)) dt.$$

Если $Ric(X_n, X_n) \geq (n-1)/r^2$ и $L > \pi r$, то правая часть этой формулы отрицательна. Поэтому $(H_\gamma E)(W_i, W_i) < 0$ хотя бы для одного i . Отсюда следует положительность индекса γ . Следовательно, по теореме об индексе γ содержит сопряженные точки.

Отсюда следует также, что γ не является кратчайшей. Действительно, если $\bar{\sigma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega$ — вариация кривой γ , для которой W_i есть векторное поле вариации, то

$$\left. \frac{dE(\bar{\sigma}(u))}{du} \right|_{u=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 E(\bar{\sigma}(u))}{du^2} \right|_{u=0} = (H_\gamma E)(W_i, W_i) < 0.$$

Поэтому $E(\bar{\sigma}(u)) < E(\gamma)$ при малых $u \neq 0$. □

Замечание. Легко понять происхождение векторных полей (6.9.2). В случае сферы W_i — поля Якоби вдоль геодезической γ , соединяющей диаметрально противоположные точки сферы, которые порождаются вращениями сферы, оставляющими неподвижными концы γ . Мы обсуждали эти вращения в конце §5, когда доказывали сопряженность диаметральных точек сферы.

Диаметр риманова многообразия определяется формулой

$$\text{diam } M = \sup_{p, q \in M} \rho(p, q).$$

Теорема 6.9.5 (теорема Мейерса). Пусть M — полное n -мерное риманово многообразие, кривизна Риччи которого удовлетворяет (6.9.1) в любой точке $p \in M$ и для любого единичного вектора $X \in T_p M$, где r — положительная постоянная. Тогда M компактно и его диаметр не превосходит πr .

Доказательство. Пусть $p, q \in M$ и γ — кратчайшая геодезическая, соединяющая p и q . Согласно лемме 6.9.4, длина γ не больше, чем πr . Итак, все точки M попарно удалены друг от друга не более чем на πr . Поскольку замкнутое ограниченное множество в полном многообразии компактно, отсюда следует, что само M компактно. □

Хорошим дополнением к теореме Мейерса является следующая теорема, доказанная В. А. Топоноговым.

Теорема 6.9.6. Если, в условиях теоремы Мейерса, $\text{diam } M = \pi r$, то M изометрично сфере S_r^n радиуса r со стандартной метрикой.

Доказательство этой теоремы не приводим, поскольку оно значительно сложнее, чем доказательство теоремы Мейерса.

Рекомендую книгу [6] для знакомства с *римановой геометрией в целом*, изучающей связи между кривизной и геометрией римановых многообразий.

Литература, рекомендуемая к этой главе: [5, 6, 10].

Литература

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
2. Александров П. С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. 3-е изд. М.: Наука, 1971.
3. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию “в целом”. М.: Наука, 1973.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
5. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
6. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
8. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968.
9. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
10. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
11. Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. М.: Мир, 1969.
12. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.

13. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
14. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
15. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
16. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
17. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М.: ГИФМЛ, 1958.
18. Тёрстон У. Трёхмерная геометрия и топология. М.: МЦНМО, 2001.
19. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
20. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука; ГРФМЛ, 1989.
21. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. М.: Мир, 1966.
22. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
23. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Иностран. лит., 1948.
24. Ballmann W., Gromov M., Schroeder V. Manifolds of nonpositive curvature. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser, 1985.

Предметный указатель

- Адамара — Картана теорема, 270
- Бетти числа, 137, 144
- Бианки тождество, 189
- Брауэра теорема о неподвижной точке, 104
- Вейерштрасса теорема, 30
- Гаусса лемма, 222
- Грассмана многообразие, 53
- Кристоффеля символы, 180
- Ли
- алгебра, 73
 - скобка, 73
- Лобачевского
- плоскость, 214
 - прямая, 214
- Мёбиуса лента, 20
- Мейерса теорема, 273
- Морса
- деформация, 264
 - лемма, 121
 - неравенства, 138
 - основная теорема теории, 267
 - равенство, 137
 - теорема, 134
- функция, 133
- Пуанкаре
- гипотеза, 160
 - модель плоскости Лобачевского, 214
- Риба теорема, 156
- Ринова — Хопфа теорема, 232
- Риччи
- кривизна, 271
 - тензор, 203
- Сарда теорема, 86
- Смейла теорема, 160
- Тихонова теорема, 29
- Уайхеда теорема, 266
- Уитни теорема
- сильная, 97
 - слабая, 94
- Урысона
- большая лемма, 27
 - первая метризациянная теорема, 32
- Ферми базис, 223
- Фубини теорема, 87
- Якоби

- матрица, 69
- поле, 215
- тождество, 73
- уравнение, 215
- аксиома счетности
 - вторая, 32
 - первая, 16
- алгебра
 - биградуированная, 166
 - тензорная, 166
- атлас, 48
- атласы эквивалентные, 48
- база топологии, 17
- бутылка Клейна, 21
- вариация
 - геодезическая, 219
 - однопараметрическая, 217
 - пути, 236
- вложение, 79
- внутренность множества, 14
- геодезическая, 207
- гессиан
 - функции, 119
 - функционала энергии, 245
- гильбертов кирпич, 31
- гомеоморфизм, 14
- гомологии
 - клеточные, 149
 - симплициальные, 139
 - сингулярные, 155
- гомотопическая эквивалентность, 34
- гомотопический класс, 33
- гомотопия, 33
- градиент функции, 112
- граница клетки, 149
- граница множества, 15
- граница симплекса, 140
- группа гомологий
 - многообразия, 143
 - цепного комплекса, 142
- группа границ, 142
- группа циклов, 142
- двойственный базис, 167
- дивергенция, 186
- дизъюнктное объединение, 35
- диск, 18
- диффеоморфизм, 50
- дифференциал, 175
 - отображения, 68
 - функционала энергии, 243
- дифференцирование
 - алгебры, 72
 - в точке, 63
- дифференцируемая структура, 49
- длина
 - дуги, 207
 - кривой, 206
- замкнутое множество, 14
- замыкание, 15
- значение
 - критическое, 80
 - регулярное, 80
- изометрия римановых многообразий, 197
- индекс
 - геодезической, 247
 - квадратичной формы, 118
 - критической точки, 120
- каноническое спаривание, 163
- карта, 47

- нормальная, 78
- касательное пространство, 63
- касательное расслоение, 70
- касательный вектор, 63, 68
- клетка, 35
- клеточный комплекс
 - бесконечный, 266
 - конечный, 36
- ковектор, 165
- когомологии де Рама, 156
- координаты
 - вектора, 66
 - векторного поля, 73
 - нормальные, 213
- коразмерность, 78
- коэффициенты инцидентности, 141, 149
- край многообразия, 100
- кратчайшая, 225
- крендель, 39
- кривая
 - интегральная, 74
 - параметризованная, 74
- кривизна
 - секционная, 204
 - скалярная, 203
- куб, 85
- лемма о локализации, 63, 179
- линейный дифференциальный оператор, 73
- локальная система координат, 66
- локальный поток, 74
- метрика, 17
- метрическое пространство, 17
- многообразие
 - вещественно аналитическое, 49
 - гладкое, 49
 - дифференцируемое, 49
 - комплексно аналитическое, 50
 - произведение, 53
 - риманово, 111, 193
 - геодезически полное, 230
 - плоское, 252
 - с краем, 98
 - топологическое, 47
- множество
 - компактное, 28
 - меры нуль, 85, 86
 - ограниченное, 17
 - плотное, 26
 - связное, 24
- модуль над кольцом, 71
- носитель
 - векторного поля, 75
 - функции, 56
- нулевое пространство
 - билинейной формы, 118
 - гессиана, 251
- однопараметрическая группа преобразований, 74
- окрестность, 14
- ориентация
 - векторного пространства, 105
 - многообразия, 106
- открытое множество, 14
- открытый шар, 17
- отображение
 - гладкое, 50
 - гладкое в окрестности точки, 50, 98
 - непрерывное, 15

- трансверсальное к подмногообразию, 83
 - экспоненциальное, 209
- параллельный перенос, 191
- поверхность
 - неориентируемая рода g , 110
 - ориентируемая рода g , 109
 - параметризованная, 216
- погружение, 79
- подмногообразие, 78
 - правильное, 101
- подпокрытие, 28
- покрытие
 - вписанное, 58
 - локально конечное, 59
 - открытое, 28
- поле
 - векторное, 71
 - вариации, 237
 - вдоль кривой, 189
 - вдоль поверхности, 217
 - полное, 75
 - ковекторное, 175
 - тензорное, 171
 - координаты, 176
- полиэдр, 36, 137
- преобразование координат, 67
- приклеивание, 35
- проективное пространство, 20, 53
 - комплексное, 20
- производная
 - абсолютная, 190
 - ковариантная, 179, 182
- пространство
 - метрическое
 - метрически полное, 230
- путь кусочно-гладкий, 235
- разбиение единицы, 56
- ранг абелевой группы, 144
- расстояние, 207
- ретракт, 34
 - деформационный, 34
- риманова метрика, 111, 193
 - индуцированная, 196
- свёртка, 166
- свободная абелева группа, 144
- связная компонента, 25
- связность, 179
 - Леви-Чивиты, 198
 - симметричная, 187
 - совместная с метрикой, 197
- сечение расслоения, 72
- симплекс, 140
- скалярное произведение, 111
- след линейного оператора, 166
- согласованные карты, 48
- сопряжённое векторное пространство, 162
- степень вырождения
 - билинейной формы, 118
 - гессиана, 251
- сфера, 18
- тензор, 164, 170
 - ковариантный, 164
 - контравариантный, 164
 - координаты, 168
 - координаты в локальной системе координат, 171
 - кривизны, 188, 201
 - кручения, 187
 - метрический, 193
 - ранг, 170
- тензорное произведение, 172

- теорема о неявной функции
 - большая, 83
 - для многообразий с краем, 102
 - классическая, 76
 - малая, 81
- теорема об индексе, 255
- теорема об обратной функции
 - для многообразий, 77
 - классическая, 77
- топологическое пространство, 13
 - вполне несвязное, 25
 - гомеоморфные, 14
 - компактное, 28
 - локально компактное, 59
 - метризуемое, 18
 - нормальное, 27
 - односвязное, 33
 - паракомпактное, 59
 - подпространство, 18
 - произведение, 18
 - связное, 24
 - стягиваемое, 34
 - фактор, 19
 - хаусдорфово, 26
- топология, 13
 - дискретная, 17
 - индуцированная, 18
 - слабейшая, 16
 - тихоновская, 19
- тор, 20
- точка
 - внутренняя, 14
 - граничная, 15
 - краевая, 99
 - критическая, 80, 238
 - критическая невырожденная, 119
 - предельная, 15
 - прикосновения, 15
 - регулярная, 80
 - седловая, 116
 - фокальная, 136
- точки
 - сопряженные, 249
 - кратность, 249
- триангуляция, 141
- форма
 - билинейная симметричная, 118
 - квадратичная, 118
- формула второй вариации, 246
- формула первой вариации, 242
- функционал
 - длины, 238
 - линейный, 162
 - нелинейный, 236
 - энергии, 238
- цепное правило, 69
- цепной комплекс, 142
- цепь, 141
- шар
 - замкнутый, 18
 - открытый, 18
- эйлерова характеристика, 38
- экзотическая сфера, 55
- экспонента вектора, 209
- экстремаль, 238

Учебное издание

Шарафутдинов Владимир Альтафович

**ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ
ТОПОЛОГИЮ И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ**

Учебное пособие

Редактор

С. В. Исакова

Оригинал-макет В. А. Шарафутдинова

Рисунки И. Н. Петрова

Обложка Е. В. Неклюдовой

Подписано в печать 21. 12. 2017 г.

Формат 70х100 1/16.

Усл. печ. л. 22,7. Уч.-изд. л. 17,6.

Тираж 200 экз. Заказ № 275

Издательско-полиграфический центр НГУ.

630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.