Торические и псевдоторические многообразия// Тезисы

Н. Тюрин

26 мая 2013 г.

Аннотация

1. Алгебраические многообразия. Главной нашей задачей является исследование алгебраических многообразий — однако, с немного нетрадиционной точки зрения. А именно, каждое алгебраическое многообразие может быть снабжено кэлеровой формой метрики ходжева типа, и эта кэлерову форму естественно рассмотреть как симплектическую форму на вещественном многообразии, подлежащем нашему алгебраическому многообразию. Конечно, таких симплектических форм может быть достаточно много, а кроме того возможны и другие симплектические структуры, но нас будут интересовать только те, которые приходят из главных поляризаций. После выбора симплектической формы можно поставить вопрос о лагранжевой геометрии нашего алгебраического многообразия, то есть исследовать — какие классы реализуются лагранжевыми относительно выбранной симплектической формы подмногообразиями, какова классификация этих лагранжевых подмногообразий по модулю лагранжевых деформаций или (более тонко) по модулю гамильтоновой изотопии.

2. Геометрическое квантование и зеркальная симметрия. Исследования лагранжевой геометрии алгебраических многообразий продиктованы необходимостью проверки гипотез, возникших на стыке алгебраической геометрии и симплектической геометрии и необходимых для некоторых новых подходов к проблемам квантования в математической физике. Согласно наиболее широкой концепции зеркальной симметрии, алгебраическая геометрия двойственна симплектической, и существуют многообразия - зеркальные партнеры, у которых некоторые специальные инварианты, вычисленные в рамках алгебраической геометрии, совпадают с вычисленными в рамках симплектической геометрии, и наоборот. Например, гомологическая зеркальная симметрия утверждает, что категория когерентных пучков (возникающая в рамках алгебарической геометрии) эквивалентна категории Фукаи - Флоера для зеркальных партнеров. С другой стороны, в геометрическом квантовании известны подходы, использующие как алгебраическую геометрию (стабильные расслоения), так и симплектическую (модули бор - зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий), и из универсальности квантования должна следовать эквивалентность разных подходов, то есть стабильное голоморфное расслоение есть объект, двойственный в некотором смысле лагранжевому подмногообразию. Изучению модулей стабильных расслоений над алгебраическими многообразиями посвящена большая часть алгебраической геометрии, и мы считаем, что не меньшим интересом должна пользоваться лагранжева геометрия алгебраических многообразий.

3. Что известно на сегодняшний день? На сегодняшний день лагранжева геометрия алгебраических многообразий состоит в большей степени из вопросов, чем ответов. Например, даже для "простейшего"и базового многообразия — проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ — остаются вопросы. Мы знаем, что в качестве ориентируемых лагранжевых подмногообразий реализуются торы (стандартные торы Клиффорда), и среди клиффордовых торов существует единственный с точностью до гамильтоновой изотопии бор - зоммерфельдов тор уровня 3. С другой стороны существует экзотический тор Чеканова того же уровня, который не изотопен стандартному. Однако неизвестно, существуют ли другие типы бор - зоммерфельдовых торов уровня 3, а также существуют ли бор - зоммерфельдовы лагранжевы торы уровня 1 или 2. Конечно, еще хуже обстоит дело с алгебраическими поверхностями, а при переходе к трифолдам ситуация ухудшается качественно, поскольку появляются нетривиальные средние гомологии, но именно здесь находится известнейшая проблема зеркальной симметрии — существование лагранжевых слоений на трифолдах Калаби - Яу.

4. Экзотические торы Чеканова — две конструкции. До 1996 года бытовало мнение, что единственным лагранжевым тором на проективной плоскости является стандартный тор Клиффорда. В 1996 году Ю. Чеканов предложил конструкцию экзотического тора, который теперь называется тором Чеканова. Конструкция очень простая — используется симпектоморфность внутренности шара в $\mathbb{C}^2$ и проективной плоскости без прямой; для петли $\gamma \subset \mathbb{C}^*$ так что $\mathrm{Re}\gamma > 0$ строится множество $(\gamma e^{i\phi}, \gamma e^{-i\phi}) \subset \mathbb{C}^2$, которое есть лагранжев тор. Чеканов показал, что такой тор не эквивалентен стандартному. Другая конструкция чекановского тора возникла после введения нового понятия - псевдоторической структуры, для представления котрого нам потребуется восстановить некоторые факты из кэлеровой геометрии проективного пространства.

5. Проективное пространство как фазовое пространство вполне интегрируемой системы. Проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ может быть построено как результат кэлеровой редукции (которая в классической механике называется “система со связями первого рода”). А именно, рассмотрим $\mathbb{C}^{n+1}$ со стандартной эрмитовой структурой. Мнимая часть эрмитовой структуры задает на овеществлении $\mathbb{C}^{n+1}$ кососимметрическую форму — и это есть стандартная симплектическая структура на $\mathbb{C}^{n+1}$. Единичная сфера $<\psi, \psi>= 1$ факторизуется по фазовым поворотам, что дает расслоение Хопфа над $\mathbb{CP}^n$, и при этом порождает стандартную кэлерову структуру (комплексная структура + симплектическая форма) на проективном пространстве. При этом любой самосопряженный оператор A на $\mathbb{C}^{n+1}$ превращается в гладкую вещественную функцию f_A на $\mathbb{CP}^n$; при этом коммутирующие операторы переходят в коммутриуеющие функции. Максимальный набор коммутирующих операторов задает максимально возможный набор коммутирующих функций, что дает вполне интегрируемую систему на $\mathbb{CP}^n$; в этих терминах торы Клиффорда являются торами Лиувилля для этой системы.

6. Инвариантные подмногообразия. При фиксированных однородных координатах $[z_0 : ... : z_n]$ можно определить класс вещественных функций, приходящих из самосопряженных операторов, наборами чисел $\lambda_0, ..., \lambda_n$, который есть просто собственные числа диагонального оператора. Любые две такие функции коммутируют. Однородный многочлен $P_d(z) = 0$ задает гиперповерхность в $\mathbb{CP}^n$; она инвариантна относительно гамильтонова действия $f(\lambda_0, ..., \lambda_n)$ если выполнено следующее условие: для каждого монома $z_0^{r_0} ... z_n^{r_n}, r_0 + ... + r_n = d$, многочлена $P_d(z)$ сумма $\lambda_0 r_0 + ... + \lambda_n r_n$ есть одно и то же число. То есть для каждого полинома в подпространстве коммму-тирующих функций определено подпространство (возможно, тривиальное), которое состоит из функций, сохраняющих соответствующую гиперповерхность. Геометрически это означает, что гамильтоново векторное поле соответствующей функции касается в каждой точке этой гиперповерхности, то есть при ограничении функции на гиперповерхность не теряется никакой динамической информации. Если число функций, сохраняющих гиперповерхность, равно комплексной размерности гиперповерхности, то эта гиперповерхность с набором ограничений функций на нее сама является фазовым пространством вполне интегрируемой системы.

7. Инвариатные линейные системы. Пусть однородный многочлен $P_d(z)$ имеет ровно $k + 1$ мономов; тогда на множество всех функций у нас есть ровно k линейных условий на собственные числа λ_i, но при этом возникает важный эффект: если функция $f(\lambda_0, ..., \lambda_n)$ сохраняет $P_d(z) = 0$, то она же сохраняет любой полином, отличающийся от $P_d(z)$ коэффициентами при мономах. Всего получаем линейную систему $\mathbb{CP}^k$ гиперповерхностей, инвариантных относительно одного и того же поднабора коммутирующих функций. Такой поднабор имеет размерность $n - k$; такую же размерность имеет базисное множество любой линейной подсистемы $\mathbb{CP}^{k-1} \subset \mathbb{CP}^k$, и мы получаем семейство базисных множеств, параметризуемое двойственным $\mathbb{CP}^k$, каждое из которых является фазовым пространством вполне интегрируемой системы. Это семейство полностью покрывает все $\mathbb{CP}^n$, при этом имеется общее пересечение всех элементов семейства, которое есть базисное множество всего семейства. Это основной пример структуры, названной псевдоторической структурой.

8. Псевдоторическая структура: построение тора Чеканова. Реализуем программу из предыдущего пункта для $\mathbb{CP}^2$ и $P_2(z) = z_0^2 - z_1 z_2$. Тогда из двумерного пространства коммутирующих функций выделена одна $f(0, -1, 1)$, сохраняющее любую конику вида $\alpha_0 z_0^2 = \alpha_1 z_1 z_2$. Пучок параметризуется проективной прямой $\mathbb{CP}^1_\alpha$; проколотая в двух точках плоскость $\mathbb{CP}^2 \backslash \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ расслаивается над этой прямой, причем слоем является коника с функцией f. Имеется два особых слоя — над $[0 : 1]$ (пара прямых) и над $[1 : 0]$ (двойная прямая). Это простейший пример псевдоторической структуры — семейства торических многообразий, параметризуемое торической базой. Тор Чеканова для $\mathbb{CP}^2$ в этих терминах получается так: любая петля на $\mathbb{CP}^1_\alpha$, не проходящая через северный и южный полюса, и любое значение функции $f(0, -1, 1)$, не равное крайним критическим, задает лагранжев тор на $\mathbb{CP}^2$. При этом полагая $f = 0$ мы получаем тор Чеканова, если петля стягиваема, или тор типа Клиффорда в противном случае.

9. Псевдоторическая структура: общее определение. Пусть на симплектическом многообразии (X, ω_X) имеется неполный набор первых интегралов $(f_1, ..., f_k)$, где $2k < \mathrm{dimX}$, и симплектическое отображение ψ :

$X\backslash B \to Y$ в торическое многообразие (Y, ω_Y), такое что компактификация общего слоя

$$\overline{\psi^{-1}(y)} = \psi^{-1}(y) \cup B$$

есть симплектическое подмногообразие размерности $2(n-k)$, гладкое вне B, инвариантное относительно гамильтонова действия каждой f_i, а кроме того выполнено следующее условие согласования симплектических форм: для любой функции h на Y имеется тождество

$$X_{\psi^* h} \wedge \nabla_\psi X_h \equiv 0$$

на $X\backslash B$. Здесь X_* — гамильтоново векторное поле функции (*), определенное относительно ω_X, ω_Y соответственно тому, где определена функция (*), а ∇_ψ — связность, определенная в слоях ψ как отображения с симплектическими слоями. Это сложное условие выполнено автоматически, если $k = n-1$ и слои комплексны, поэтому мы его не проверяли (и даже не упоминали!) в предыдущем пункте. С другой стороны, в известных нам примерах это условие выполнено в связи с тем, что обе формы ω_X, ω_Y являются ограничениями одной и той же симплектической формы на большом проективном пространстве, куда мы вкладываем все ингредиенты. Таким образом устанавливается существование псевдоторической структуры на косплексной квадрике любой размерности.

10. Торическая и псевдоторическая геометрии. Вполне интегрируемые системы с компактными фазовыми пространствами известны в математике как торические многообразия. Каждое торическое многообразие однозначно задается выпуклым многогранником $P_X \subset \mathbb{R}^n$ где n — размерность X. Отображение $X \to P_X$ задается набором вещественных функций, и слоями над внутренними точками P_X являются лагранжевы торы. По выпуклому многограннику восстанавливается и симплектическая структура, и комплексная структура, так что алгебраическая и симплектическая геометрии плотно сходятся в торическом случае. Для торических многообразий доказано существование многих “двойственностей”, установлены равенства многих достаточно экзотических инвариантов, — то есть грубо говоря торическая геометрия есть тот “фонарь”, под которым возможно и удобно искать разнообразные “ключи”. Но торических многообразий мало — они составляют дискретное множество, — а хотелось бы продолжить методы, работающие в торическом случае, на более широкий класс многообразий. Псведоторическая структура близка торической — она предполагает, что многообразие “покрыто” семейством торических многообразий, параметризуемых торическим многообразием. Тривиальный пример — прямое произведение двух торических многообразий — соответствует тривиальным векторным расслоениям, представляющимся прямыми произведениями базы на слой. Нетривиальных псевдоторических структур очень много — каждое торическое многообразие обладает целой иерархией псевдоторических структур, а кроме того существует класс псевдоторических многообразий, не являющихся торическими. Поэтому псевдоторическая геометрия является расширением торической геометрии. Важнейший вопрос на сегодняшний день — как описать все псевдоторические многообразия.

11. Пседоторические структуры и лагранжевы торы. Как было установлено, экзотический тор Чеканова имеет хорошее описание в терминх псевдоторической структуры. Отсюда возникает идея строить нестандартные лагранжевы торы с помощью псевдоторических структур. Установлено, что каждое компактное торическое многообразие обладает псевдторической структурой, базой которого является проективное пространство. Тогда на базе выделен дивизор, подлежащий особым слоям, и любой лагранжев тор с базы, не пересекающийся с этим дивизором особенностей, может быть поднят до лагранжева тора всего торического многообразия. При этом типы поднятых торов различаются компонентами множества торов на базе, не пересекающимися с дивизором особенностей. В торическом случае дивизор особенностей всегда есть объединение координатных гиперплоскостей, поэтому компоненты могут быть описаны группой $H_k(\mathbb{CP}^k \backslash \{\bigcup_{i=0}^k \{z_i = 0\}\}, \mathbb{Z})$. Например, в разобранном выше случае $\mathbb{CP}^2$ в группе есть тривиальный и нетривиальный примитивный элементы, которые соответствуют тору Чеканова и тору Клиффорда соответственно. Наша главная гипотеза заключается в том, что каждому стандартному тору Клиффорда соответствует столько нестандартных торов Чеканова, каков ранг ядра отображения

$$\pi : H_k(\mathbb{CP}^k \backslash \{\bigcup_{i=0}^k \{z_i = 0\}\}, \mathbb{Z}) \to H_k(\mathbb{CP}^k, \mathbb{Z}).$$

Кроме того, для разных псевдоторических структур на одном и том же X построенные с их помощью экзотические торы могут быть эквивалентными. То есть мы получаем некоторую комбинаторную структуру, описывающую типы лагранжевых торов торических алгебраических многообразий, что является некоторым малым продвижением в задаче, поставленной в первом пункте.

12. Откуда берутся псевдоторические многообразия? Исходя из общего определения псевдоторической структуры, псевдоторические многообразия надо искать среди фазовых пространств интегрируемыХ. но не вполне интегрируемых систем. В самом деле, набор коммутирующих функций $(f_1, ..., f_k)$ есть (неполный) набор первых интегралов, и для существования второго данного из определения — отображения ψ — необходимо найти "торические листы" для этого набора функций. Геометрические многообразия с неполным набором первых интегралов могут быть связаны с торическими многообразиями, а именно если рассмотреть многообразие модулей каких-нибудь объектов над торическим многообразием, то действие тора с базы можно поднять до действия тора на многообразии модулей, что может и приводить к существованию неполного набора первых интегралов. В качестве примера можно рассмотреть грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4)$ прямых в $\mathbb{CP}^3$ с тремя коммутриующими функциями, индуцированными тремя интегралами на $\mathbb{CP}^3$. Тогда псевдоторическая структура на $\mathrm{Gr}(2,4)$ может быть построена из геометрических соображений.

Известные нам примеры неторических псевдоторических многообразий (комплексная квадрика, многообразие флагов и др.) обладают одним общим свойством — эти алгебраические многообразия обладают торическими вырождениями. Таким образом, первый способ нахождения псевдоторических многообразий таков — рассматривать алгебраические многообразия, обладающие малыми торическими вырождениями. При этом базой псевдоторической структуры всегда будет проективное пространство соотвествующей размерности. С другой стороны, возможно использовать аппарат бирациональной геометрии в связи с тем, что псевдоторическое многообразие "бирационально"симплектоморфно прямому произведению слоя на базу, где под "бирациональным" симплектоморфизмом мы имеем в виду симплектоморфизм дополнений к некоторым подходящим симплектическим дивизорам. То есть можно брать всевозможные прямые произведения торических многообразий и исследовать, что получается из них под действием таких бирациональных симплектоморфизмов. На этом пути возможно существенное продвижение в задаче — до сих пор мы не имеем примеров где база не являлась бы проективным пространством. Оба этих подхода возможно синтезировать, если одновременно рассматривать неторические деформации прямых произведений торических и действовать на них "бирациональными" симплектоморфизмами. В любом случае, задача конструктивного описания псевдоторических многообразий еще только ждет своего решения.

Литература.

[1] M. Audin, *"Torus action on symplectic manifolds"*, (Progr. in Math., Vol. 93), Birkhauser, Basel, 2004;

[2] D. Auroux, *"Mirror symmetry and T - duality in the complement of an anticanonical divisor"*, J. Gokova Geom. Topol. 1 (2007), 51 - 91;

[3] Yu. Chekanov, "Lagrangian tori in a symplectic vector space and global symplectomorphism", Math. Zeit., 223 (1996), pp. 547 - 559;

[4] Yu. Chekanov, F. Schlenk, *"Notes on monotone lagrangian tori"*, arXiv:1003.5960v1 [mathSG];

[5] N. Tyurin, *"Geometric quantization and algebraic lagrangian geometry"*, in: Surveys in Geometry and Number theory: Reports on Contemporary Russian Mathematics (N. Young, ed.) (London Math. Soc. Lect. Notes, Vol. 338), Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007), pp. 279 - 318;

[6] Н. Тюрин, *"Псевдоторические лагранжевы слоения торических и неторических многообразий Фано"*, Теоретическая и Математическая Физика, 162:3 (2010), стр. 307–333;

[7] Н. Тюрин, *"Специальные лагранжевы слоения многообразия флагов F3"*, Теоретическая и Математическая Физика, 167:2 (2011), стр. 193–205;

[8] Н. Тюрин, *"Нестандартные лагранжевы торы и псевдоторические структуры"*, Теоретическая и Математическая Физика, 171:2 (2012), стр. 321–325;

[9] С. Белёв, Н. Тюрин, *"Псевдоторические структуры на торических симплектических многообразиях"*, Теоретическая и Математическая Физика, принято к печати в 2013 году.