Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики им. С.Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Агапов Сергей Вадимович

Интегрируемые гамильтоновы системы в римановой и субримановой геометрии

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

д. ф.–м. н., профессор РАН

А. Е. Миронов

Новосибирск — 2016

Содержание

Введение

В диссертации изучаются интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с натуральной механической системой и магнитным геодезическим потоком на двумерном торе, а также с субримановым распределением Гурса в $\mathbb{R}^n$.

При исследовании многих задач классической механики возникают системы дифференциальных уравнений, которые в подходящих координатах можно записать в следующем виде

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $H : T^*M_n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, определенная на кокасательном расслоении, которая называется функцией Гамильтона (гамильтонианом), M_n — гладкое многообразие, являющееся конфигурационным пространством рассматриваемой динамической системы, а $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона, которая в канонических координатах имеет следующий вид:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right).$$

Системы вида (1) называются **гамильтоновыми**. Функция $F : T^*M_n \to \mathbb{R}$ называется **первым интегралом** гамильтоновой системы (1), если выполнено $\dot{F} = \{F, H\} = 0$.

Гамильтонова система (1) называется **интегрируемой по Лиувиллю** (или **вполне интегрируемой**), если она обладает полным набором n первых интегралов $F_1 = H,\ F_2, \ldots, F_n$, функционально независимых почти всюду и находящихся попарно в инволюции, то есть $\{F_i, F_j\} = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Натуральным механическим системам отвечают гамильтоновы системы (1) с гамильтонианом вида

$$H = T(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) + V(x^1, \ldots, x^n),$$

где T — кинетическая энергия (квадратичная форма по импульсам), V — потенциал. Рассмотрим гамильтонову систему на двумерном торе

$$\dot{x} = \tfrac{\partial H}{\partial p_1},\ \dot{y} = \tfrac{\partial H}{\partial p_2},\ \dot{p_1} = -\tfrac{\partial H}{\partial x},\ \dot{p_2} = -\tfrac{\partial H}{\partial y},\ H = \tfrac{p_1^2+p_2^2}{2} + V(x, y), \qquad (2)$$

где V — периодическая функция на плоскости $\mathbb{R}^2$ с некоторой решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Известны следующие случаи наличия дополнительного интеграла (см., например, [1]):

1) Если $V(x, y) = V(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то существует полиномиальный интеграл вида $F_1 = \alpha p_2 - \beta p_1$.

2) Если $V(x, y) = V_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + V_2(\alpha_2 x + \beta_2 y)$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ — некоторые константы, согласованные с решеткой периодов Λ, то

существует полиномиальный интеграл вида $F_2 = (d_1+d_2)p_1^2+4p_1p_2-(d_1+d_2)p_2^2+2(d_1-d_2)(V_1+V_2)$, $d_i = \alpha_i/\beta_i$.

Следуя [2], полиномиальные интегралы минимальной степени, независимые от интеграла энергии, будем называть **неприводимыми**. Согласно известной гипотезе, высказанной В.В. Козловым (см. [3]), максимальная степень неприводимого интеграла гамильтоновой системы (2) не превосходит 2. В полном объеме эта гипотеза до сих пор не доказана.

М.Л. Бялый [4] доказал, что в случае решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^2$

$$V(x,y) = V(x+1,y) = V(x,y+1),$$

если у гамильтоновой системы (2) (с гладким V) существует дополнительный интеграл третьей степени по импульсам, то существует интеграл первой степени. В.В. Козлов и Н.В. Денисова [5] обобщили этот результат на произвольную решетку Λ.

В [5] также показано, что интеграл четвертой степени сводится к интегралам меньшей степени всегда за исключением, быть может, случая, когда потенциал V имеет вид

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(x+y) + V_3(y) + V_4(y-x). \qquad (3)$$

А именно, в [5] не было установлено, может ли гамильтонова система (2) с потенциалом (3) иметь неприводимый интеграл четвертой степени. Исследованию этого случая посвящена глава 1.

Разложим $V_k(z),\ k = 1, \ldots, 4$ в ряд Фурье

$$V_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_k^n e^{2\pi i n z},$$

здесь k, n — индексы (n — не степень) в v_k^n. Из вещественности V_k следует, что $v_k^n = \overline{v_k^{-n}}$.

Справедлива

Лемма 1 ([1*]). *Если гамильтонова система (2) с периодическим потенциалом (3) имеет полиномиальный по импульсам интеграл четвертой степени, то каждая из функций V_k содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье в своем разложении.*

Основной результат главы 1 заключается в следующем.

Теорема 1.1 ([1*]). *Пусть v_k^n быстро убывают с ростом $|n|$ (как коэффициенты Фурье достаточно гладкой функции). Тогда при условиях леммы 1 имеют место равенства $|v_1^n| = |v_3^n|,\ |v_2^n| = |v_4^n|$.*

Теорема 1.1 была получена совместно с Д.Н. Александровым.

Теорема 1.1 была независимо доказана Н.В. Денисовой, В.В. Козловым и Д.В. Трещевым в [6]. Более того, в [6] доказано, что если гамильтонова система (2) с периодическим потенциалом (3) обладает первым интегралом 4 степени, то существует интеграл 2 степени, независимый от интеграла энергии.

Вопрос о существовании неприводимого первого интеграла более высокой степени у системы (2) остается открытым. В [7] показано, что если гамильтонова система (2) имеет интеграл пятой степени и потенциал V аналитичен, то существует интеграл первой степени (этот результат доказан для произвольной решетки периодов за исключением одного специального типа).

Отметим, что В.В. Козлов и Д.В. Трещев ([8]) доказали, что если гамильтонова система интегрируема и потенциал V является тригонометрическим полиномом, то дополнительный интеграл высокой степени по импульсам сводится к интегралу первой или второй степени.

Глава 2 посвящена изучению магнитного геодезического потока на двумерном торе. Напомним сначала некоторые результаты, которые относятся к геодезическому потоку в отсутствии магнитного поля, а затем сопоставим их с результатами, касающимися геодезического потока в магнитном поле.

По сравнению с натуральными механическими системами, геодезический поток на поверхности является более общим (и намного более сложным) объектом. Геодезический поток задается системой уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \tag{4}$$

где g^{ij} — тензор, обратный к метрическому тензору g_{ij} на поверхности. Связь между натуральными механическими системами и геодезическими потоками дает хорошо известный принцип Мопертюи (см., например, [3]). Вопрос об интегрируемости геодезических потоков по Лиувиллю является очень интересным и сложным.

Напомним теорему В.В. Козлова, которая отражает топологические препятствия к полной интегрируемости.

Теорема 1.2 ([9]). *Предположим, что на замкнутой ориентируемой поверхности M задана вещественно-аналитическая метрика. Если род поверхности M отличен от 0 или 1 (то есть M не гомеоморфна ни сфере $\mathbb{S}^2$, ни тору $\mathbb{T}^2$), то система (4) не имеет первого интеграла, аналитического на T^*M и независимого от интеграла энергии.*

На двумерном торе существуют два вида римановых метрик, для которых геодезический поток интегрируем. Если метрика имеет вид

$$ds^2 = \Lambda(x)(dx^2 + dy^2)$$

или

$$ds^2 = (\Lambda_1(x) + \Lambda_2(y))(dx^2 + dy^2),$$

то существует полиномиальный по импульсам первый интеграл степени 1 или 2 (см., например, [3]).

Неизвестно, существуют ли метрики с неприводимыми полиномиальными интегралами более высоких степеней. Этот вопрос изучался в [2], [8], [10]. Поиск полиномиального первого интеграла геодезического потока на двумерном торе сводится к вопросу о существовании периодических решений некоторой квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных на метрику и коэффициенты этого интеграла вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0. \tag{5}$$

Оказывается, системы такого вида, отвечающие интегрируемым геодезическим потокам, обладают замечательными свойствами, в частности, они являются полугамильтоновыми (см. [11] - [17]). Полугамильтонову систему можно записать в виде законов сохранения, то есть существует такая замена переменных $U^T \to (G_1(U), \dots, G_n(U))$, что для некоторых $F_1(U), \dots, F_n(U)$ верны следующие соотношения

$$(G_j(U))_x + (F_j(U))_y = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Более того, в гиперболической области, где все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $A^{-1}B$ или $B^{-1}A$ (в областях, где хотя бы одна из матриц A, B невырождена) вещественны и попарно различны, полугамильтонова система обладает инвариантами Римана, то есть существует такая замена переменных

$$U^T \to (r_1(U), \dots, r_n(U)),$$

что систему можно записать в виде

$$(r_j)_x + \lambda_j(r)(r_j)_y = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Перейдем теперь к магнитному геодезическому потоку на двумерном торе, который задается гамильтоновой системой

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}_{mg}, \qquad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{mg}, \qquad j = 1, 2$$

в магнитном поле с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ и скобкой Пуассона следующего вида:

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Если $\{F, H\}_{mg} = 0$, то функция F является первым интегралом магнитного геодезического потока. Магнитные геодезические потоки (или, эквивалентно, системы с гироскопическими силами) изучались, например, в [18] – [21].

Магнитный геодезический поток на двумерном торе, вероятно, вообще не допускает неприводимого первого интеграла степени выше 1 на всех уровнях энергии. Пример интегрируемого геодезического потока с дополнительным интегралом первой степени по импульсам можно найти в [19].

Существование дополнительного первого интеграла магнитного геодезического потока на двумерном торе (в конформных координатах) на фиксированном уровне энергии эквивалентно существованию периодических решений квазилинейной системы дифференциальных уравнений вида (5), которая, как было доказано М. Бялым и А.Е. Мироновым ([22]), также является полугамильтоновой.

Напомним, что для полугамильтоновой системы выполняются следующие соотношения на собственные значения ([12], [13]):

$$\partial_{r_j} \frac{\partial_{r_i} \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \partial_{r_i} \frac{\partial_{r_j} \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}, \qquad i \neq j \neq k \neq i.$$

Это означает, что существует такая диагональная метрика

$$ds^2 = H_1^2(r)dr_1^2 + \ldots + H_n^2(r)dr_n^2,$$

что её символы Кристоффеля удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Gamma_{ki}^k = \frac{\partial_{r_i}\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}, \qquad i \neq k.$$

Диагональная метрика называется **егоровской**, если её коэффициенты вращения β_{kl} симметричны:

$$\beta_{kl} = \beta_{lk}, \qquad \beta_{kl} = \frac{\partial_{r_k} H_l}{H_k}, \qquad k \neq l,$$

или, эквивалентно, существует такая функция $a(r)$, что $\partial_{r_k} a(r) = H_k^2(r)$. Здесь H_i — коэффициенты Ламе этой метрики, $H_i^2 = g_{ii}$. Следуя [17], соответствующие полугамильтоновы системы мы будем называть егоровскими.

Основной результат главы 2 заключается в следующем. Предположим, что магнитный геодезический поток на двумерном торе имеет дополнительный первый интеграл произвольной степени N на фиксированном уровне энергии $H = \frac{1}{2}$. Это эквивалентно наличию периодических решений полугамильтоновой системы вида (5) с некоторыми матрицами A, B ([22], см. также главу 2). Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2.1 ([2*]). *Система (5) является егоровской для любого N.*

Глава 3 посвящена изучению субриманова геодезического потока для распределения Гурса в $\mathbb{R}^n$. Распределение Гурса двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [23]) задается векторными полями

$$f_1(q) = (1, 0, -x_2, \ldots, -x_{n-1}), \qquad f_2(q) = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$

где $q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. В силу теоремы Рашевского — Чоу ([24]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить кусочно-гладкой траекторией системы

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), u \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

при этом $|\dot{q}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

По теореме Филиппова ([24]) любые две точки $q_0,\ q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить траекторией системы (6) минимальной длины, то есть такой траекторией, на которой достигается минимум следующего функционала

$$l = \int_0^T |\dot{q}|\ dt, \tag{7}$$

где $q(0) = q_0,\ q(T) = q_1$. Такие траектории называются оптимальными. Легко показать, что задача минимизации функционала (7) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J = \int_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}\ dt. \tag{8}$$

Для исследования нормальных оптимальных траекторий в задаче (6), (8) удобно воспользоваться принципом максимума Понтрягина

([25]). Согласно этому принципу, оптимальные траектории системы (6) описываются гамильтоновой системой

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где гамильтониан

$$H(p, q, u) = \langle p, u_1 f_1 + u_2 f_2 \rangle - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \tag{10}$$

максимизирован по управлению:

$$H(p(t), q(t), u(t)) = \max_{\widetilde{u} \in \mathbb{R}^2} H(p(t), q(t), \widetilde{u}).$$

Принцип максимума Понтрягина не дает описания анормальных траекторий, но в данной работе мы не будем их исследовать.

Гамильтонова система (9) с гамильтонианом (10) задает субриманов геодезический поток для распределения Гурса. Известно, что он вполне интегрируем (см., например, [23]).

Теорема 3.1 ([3*])**.** *Гамильтонова система (9), отвечающая задаче (6), (8), обладает следующими первыми интегралами:*

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - \ldots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2),$$

$$F_2 = p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \ldots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$F_3 = p_3 - F_4 x_1 - F_5 \frac{x_1^2}{2!} - \ldots - F_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!},$$

$$\ldots$$

$$F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1} x_1 - F_n \frac{x_1^2}{2!}, \qquad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \qquad F_n = p_n.$$

Интегралы F_i, $i = 1, ..., n$, почти всюду функционально независимы и находятся в инволюции:

$$\{F_k, F_s\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Следующая теорема дает представление о том, как устроены поверхности уровня первых интегралов, приведенных в теореме 3.1. Введем отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x, p) = (F_1(x, p), ..., F_n(x, p)).$$

Теорема 3.2 ([3*]). *Если $C \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение отображения φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо двум экземплярам $\mathbb{R}^n$, либо s_1 непересекающимся цилиндрам $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $0 \leq s_1 \leq n - 2$.*

Если C — критическое значение φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо $\mathbb{R}^n$, либо объединению $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k$, $k \leq n-2$. Здесь Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$, либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — окружность или замкнутая кривая с s самопересечениями.

Основной результат главы 3 заключается в следующем.

Теорема 3.3 ([3*]). *Среди решений системы (9) найдутся такие, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые кривые, симметричные относительно оси Ox_1.*

В [26] показано, что решения системы (9) (экстремальные траектории) при $n = 4$ (случай распределения Энгеля) находятся в терминах эллиптических функций. Кроме того, в [26] показано, что существуют такие экстремальные траектории, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 являются замкнутыми кривыми либо без самопересечений, либо с одним самопересечением. В [23] показано, что в общем случае экстремальные траектории распределения Гурса выражаются через гиперэллиптические интегралы.

Диссертация состоит из трех глав.

Глава 1 устроена следующим образом.

В параграфе 1.1 показано, что наличие первого интеграла четвертой степени у гамильтоновой системы (2) с потенциалом (3) эквивалентно существованию решений некоторого дискретного уравнения на коэффициенты разложения потенциала в ряд Фурье.

В параграфе 1.2 доказана теорема 1.1.

Глава 2 устроена следующим образом.

В параграфе 2.1 изложены результаты, относящиеся к геодезическому потоку на двумерном торе в отсутствии магнитного поля. Приведены понятия полугамильтоновой системы и метрики егоровского типа.

Параграф 2.2. посвящен интегрируемому магнитному геодезическому потоку на двумерном торе на фиксированном уровне энергии. Доказана теорема 2.1 о егоровости соответствующей полугамильтоновой системы.

Глава 3 устроена следующим образом.

В параграфе 3.1 формулируется задача оптимального управления на группе Гурса. Доказана теорема 3.1, в которой приведены первые интегралы субриманова геодезического потока для распределения Гурса.

В параграфе 3.2 доказана теорема 3.2 о строении поверхностей уровня первых интегралов.

В параграфе 3.3 доказана теорема 3.3 о существовании экстремальных траекторий специального вида.

Полученные результаты опубликованы в 6 научных изданиях [1*] — [6*], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1*] — [3*], 3 — в тезисах докладов и материалах конференций [4*] — [6*]. Все сформулированные результаты являются новыми и получены при личном участии автора. Результаты глав 2, 3 получены автором самостоятельно. Результаты главы 1 были получены совместно с Д.Н. Александровым. Вклад авторов в совместную работу равноправен и неделим.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Е. Миронову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку, а также д.ф.–м.н. А.А. Аграчеву за постановку задачи о субримановом геодезическом потоке для распределения Гурса (глава 3), интерес к работе и полезные обсуждения.

Глава 1

Натуральная механическая система на двумерном торе

1.1 Уравнение на коэффициенты разложения в ряд Фурье потенциала

Рассмотрим гамильтонову систему на двумерном торе

$$\dot{x} = \tfrac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot{y} = \tfrac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \dot{p_1} = -\tfrac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{p_2} = -\tfrac{\partial H}{\partial y} \tag{11}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x,y),$$

и потенциалом

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(x+y) + V_3(y) + V_4(y-x). \tag{12}$$

Разложим $V_k(z),\ k = 1, \ldots, 4$ в ряд Фурье

$$V_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_k^n e^{2\pi i n z},$$

здесь k, n — индексы (n — не степень) в v_k^n. Из вещественности V_k следует, что $v_k^n = \overline{v_k^{-n}}$.

Имеет место

Лемма 2 ([1*]). *Если существует полиномиальный интеграл четвертой степени по импульсам и при этом не существует интегралов меньшей степени, то коэффициенты v_i^k удовлетворяют уравнению*

$$(m+n)(mv_2^n v_3^{m-n} - nv_1^{-m+n} v_2^m) -$$
$$(m-n)(nv_1^{m+n} v_4^m + mv_3^{m+n} v_4^{-n}) = 0, \tag{13}$$

где $m, n \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, вопрос о существовании полиномиального интеграла четвертой степени по импульсам сводится к существованию решений дискретного уравнения (13).

Докажем лемму 2. В [5] доказано, если V имеет вид (12), то интеграл четвертой степени, не зависящий от H, приводится к виду

$$\tilde{F} = \frac{p_1^4 + p_2^4}{4} + F_2 + F_0,$$

где F_0 и F_2 — полиномы нулевой и второй степеней соответственно. Мы будем работать с дополнительным интегралом в более удобном для нас виде

$$F = H^2 - \tilde{F} = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + f_0 p_1^2 + f_1 p_1 p_2 + f_2 p_2^2 + f.$$

Условие $\{H, F\} = 0$ эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
f_{0_x} = 0, & (14) \\
f_{0_y} + f_{1_x} = V_y = V_2'(x+y) + V_3'(y) + V_4'(y-x), & (15) \\
f_{1_y} + f_{2_x} = V_x = V_1'(x) + V_2'(x+y) - V_4'(y-x), & (16) \\
f_{2_y} = 0, & (17) \\
-f_x + 2f_0 V_x + f_1 V_y = 0, \\
-f_y + f_1 V_x + 2f_2 V_y = 0.
\end{cases}
$$

Из уравнений (14) и (17) следует, что $f_0 = f_0(y)$ и $f_2 = f_2(x)$ соответственно. Из уравнений (15) и (16) получаем

$$
\begin{aligned}
&f_0 = V_3(y) + d_0, \\
&f_1 = V_2(x+y) - V_4(y-x) + d_1, \\
&f_2 = V_1(x) + d_2,
\end{aligned}
$$

где $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $\tilde{V_1} = V_1 + d_2, \tilde{V_2} = V_2 + d, \tilde{V_3} = V_3 + d_0, \tilde{V_4} = V_4 + d - d_1$. Тогда

$$f_0 = \tilde{V_3}(y), f_1 = \tilde{V_2}(x+y) - \tilde{V_4}(y-x), f_2 = \tilde{V_1}(x),$$

$$V = \tilde{V_1} + \tilde{V_2} + \tilde{V_3} + \tilde{V_4}.$$

При этом система $\{H, F\}$ будет иметь тот же вид, что и прежде, с заменой $\tilde{V_i}$ на V_i. Таким образом, чтобы не вводить новых обозначений, мы можем считать, что

$$
\begin{aligned}
f_0 &= V_3(y),\\
f_1 &= V_2(x+y) - V_4(y-x),\\
f_2 &= V_1(x).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{cases}
-f_x + 2V_3(y)(V_1'(x) + V_2'(x+y) - V_4'(y-x)) \\
\qquad + (V_2(x+y) - V_4(y-x))(V_2'(x+y) + V_3'(y) + V_4'(y-x)) = 0 & (18)\\
-f_y + 2V_1(x)(V_2'(x+y) + V_3'(y) + V_4'(y-x)) \\
\qquad + (V_2(x+y) - V_4(y-x))(V_1'(x) + V_2'(x+y) - V_4'(y-x)) = 0. & (19)
\end{cases}
$$

Из уравнений (18) и (19) получаем

$$
-f + 2V_3(y)(V_1(x) + V_2(x+y) + V_4(y-x)) + \tfrac{1}{2}(V_2(x+y) - V_4(y-x))^2
$$
$$
+ \textstyle\int (V_2(x+y) - V_4(y-x))V_3'(y)dx + F(y) = 0,
$$

$$
-f + 2V_1(x)(V_2(x+y) + V_3(y) + V_4(y-x)) + \tfrac{1}{2}(V_2(x+y) - V_4(y-x))^2
$$
$$
+ \textstyle\int (V_2(x+y) - V_4(y-x))V_1'(x)dy + G(x) = 0,
$$

где $F(y)$ и $G(x)$ — некоторые функции. Следовательно,

$$
2(V_3(y) - V_1(x))(V_2(x+y) + V_4(y-x)) + V_3'(y)\int (V_2(x+y) - V_4(y-x))dx
$$
$$
-V_1'(x)\int (V_2(x+y) - V_4(y-x))dy + F(y) - G(x) = 0. \qquad (20)
$$

Найдем коэффициент при $e^{2\pi i(nx+my)}$ в равенстве (20) для $n \neq 0, m \neq 0$:

$$
2v_3^{m-n}e^{2\pi i(m-n)y}v_2^n e^{2\pi in(x+y)} + 2v_3^{m+n}e^{2\pi i(m+n)y}v_4^{-n}e^{-2\pi in(y-x)}
$$

$$-2v_1^{-m+n}e^{2\pi i(-m+n)x}v_2^m e^{2\pi im(x+y)} - 2v_1^{m+n}e^{2\pi i(m+n)x}v_4^m e^{2\pi im(y-x)}$$

$$+2\pi i(m-n)v_3^{m-n}e^{2\pi i(m-n)y}\int v_2^n e^{2\pi in(x+y)}dx$$

$$-2\pi i(m+n)v_3^{m+n}e^{2\pi i(m+n)y}\int v_4^{-n}e^{-2\pi in(y-x)}dx$$

$$-2\pi i(-m+n)v_1^{-m+n}e^{2\pi i(-m+n)x}\int v_2^m e^{2\pi im(x+y)}dy$$

$$+2\pi i(m+n)v_1^{m+n}e^{2\pi i(m+n)x}\int v_4^m e^{2\pi im(y-x)}dy =$$

$$= [2v_3^{m-n}v_2^n + 2v_3^{m+n}v_4^{-n} - 2v_1^{-m+n}v_2^m - 2v_1^{m+n}v_4^m$$

$$+2\pi i(m-n)v_3^{m-n}\frac{1}{2\pi in}v_2^n - 2\pi i(m+n)v_3^{m+n}\frac{1}{2\pi in}v_4^{-n}$$

$$-2\pi i(-m+n)v_1^{-m+n}\frac{1}{2\pi im}v_2^m + 2\pi i(m+n)v_1^{m+n}\frac{1}{2\pi im}v_4^m]e^{2\pi i(nx+my)} =$$

$$2mn(v_2^n v_3^{m-n} + v_3^{m+n}v_4^{-n} - v_1^{-m+n}v_4^m) + (m-n)(mv_2^n v_3^{m-n} + nv_1^{-m+n}v_2^m)$$

$$+(m+n)(nv_1^{m+n}v_4^m - mv_3^{m+n}v_4^{-n}) = 0$$

Таким образом, мы получаем уравнение

$$(m+n)(mv_2^n v_3^{m-n} - nv_1^{-m+n}v_2^m) - (m-n)(nv_1^{m+n}v_4^m + mv_3^{m+n}v_4^{-n}) = 0.$$

Покажем, что при $n = 0$ или $m = 0$ последнее равенство также выполняется. В этих случаях оно переходит в $v_2^0 = v_4^0$. Если $n \neq 0$, а $m = 0$, то из (18) следует

$$(v_2^0 - v_4^0) \cdot 2\pi inv_3^n = 0.$$

Если $m \neq 0$, а $n = 0$, то из (19) следует

$$(v_2^0 - v_4^0) \cdot 2\pi inv_1^n = 0.$$

Отсюда следует, что либо $V_1 = 0$ и $V_3 = 0$ (в этом случае существует интеграл второй степени), либо $V_1 \neq 0$, $V_3 \neq 0$ и $v_2^0 = v_4^0$.

Итак, уравнение (13) выполнено для любых целых m и n. Лемма 2 доказана.

1.2 Основные результаты

Верна

Лемма 1 ([1*]). *Если гамильтонова система (11) с периодическим потенциалом (12) имеет полиномиальный по импульсам интеграл четвертой степени, то каждая из функций V_i содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье в своем разложении.*

Пусть $m \neq n$, $m \neq -n$, $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Иначе уравнение (13) вырождается, и эти случаи были разобраны в доказательстве предыдущей леммы. Поделим уравнение (13) на $mn(m-n)(m+n)$. Получим

$$\left(\frac{v_2^n}{n}\right)\left(\frac{v_3^{m-n}}{m-n}\right) + \left(\frac{v_1^{-m+n}}{-m+n}\right)\left(\frac{v_2^m}{m}\right) -$$
$$\left(\frac{v_1^{m+n}}{m+n}\right)\left(\frac{v_4^m}{m}\right) + \left(\frac{v_3^{m+n}}{m+n}\right)\left(\frac{v_4^{-n}}{-n}\right) = 0.$$

Пусть $u_i^k = \frac{v_i^k}{k}$, тогда уравнение (13) примет вид

$$u_2^n u_3^{m-n} + u_1^{-m+n} u_2^m - u_1^{m+n} u_4^m + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что

$$\overline{u_i^m} = \frac{\overline{v_i^m}}{m} = \frac{v_i^{-m}}{m} = -u_i^{-m},$$

т.е.

$$u_i^m = -\overline{u_i^{-m}}.$$

Для доказательства леммы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Если функция V_1 тождественно равна нулю, то интеграл F сводится к интегралам меньшей степени.*

Докажем лемму 3. Предположим, что $V_1 \equiv 0$. Тогда (21) принимает вид

$$u_2^n u_3^{m-n} + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0.$$

Отметим, что V_2, V_3, V_4 не могут быть константами, так как в противном случае интеграл F сводится к интегралам меньшей степени.

Рассмотрим сначала случай, когда V_3 содержит бесконечное число ненулевых слагаемых в разложении Фурье. Фиксируем $n > 0$ такое, что $u_2^n \neq 0$, тогда

$$u_3^{m-n} = -u_3^{m+n} \frac{u_4^{-n}}{u_2^n}.$$

В силу того, что V_3 содержит бесконечное число слагаемых в разложении Фурье, существует m такое, что $u_3^{m-n} \neq 0$. Если $|\frac{u_4^{-n}}{u_2^n}| > 1$, то при $m < 0$ среди коэффициентов $|u_3^m|$ содержится расходящаяся геометрическая прогрессия, следовательно, ряд для V_3 расходится. Аналогично, если $|\frac{u_4^{-n}}{u_2^n}| < 1$, то при $m > 0$ среди коэффициентов $|u_3^m|$ содержится расходящаяся геометрическая прогрессия. Если $|\frac{u_4^{-n}}{u_2^n}| = 1$, то ряд для V_3 также расходится.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$V_3(z) = \sum_{n=-k}^{k} v_3^n e^{2\pi i n z}. \tag{22}$$

Покажем, что и V_2, и V_4 должны содержать бесконечно много ненулевых слагаемых в разложениях. Отметим, что V_2 и V_4 не могут одновременно содержать конечное число слагаемых в разложениях, иначе по теореме Козлова–Трещева [8] интеграл F сводится к интегралу меньшей степени. Если $V_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_4^n e^{2\pi i n z}$, а $V_2(z) = \sum_{n=-l}^{l} v_2^n e^{2\pi i n z}$, то существует достаточно большое n такое, что $u_2^n = 0$, а $u_4^n \neq 0$, откуда следует, что $v_3^{m+n} = 0$ для всех m, то есть $V_3 \equiv 0$, что невозможно. Второй случай, когда $V_4(z) = \sum_{n=-l}^{l} v_4^n e^{2\pi i n z}$, а $V_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_2^n e^{2\pi i n z}$, рассматривается аналогично. Таким образом предположим, что V_2 и V_4 содержат бесконечное число ненулевых слагаемых в разложениях Фурье. Фиксируем $m - n = s$ так, чтобы $u_3^s \neq 0$. Тогда в силу того, что V_3 содержит конечное число слагаемых в разложении (22), существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ $u_3^{m+n} = 0$. Следовательно, $u_2^n = 0$ при всех $n > n_0$. Получаем противоречие.

Лемма 3 доказана.

Таким образом, мы можем считать, что V_1 не равняется тождественно нулю.

Докажем лемму 1. Предположим, что V_2 имеет конечное число слагаемых в разложении в ряд Фурье, т.е.

$$V_2(z) = \sum_{n=-k}^{k} v_2^n e^{2\pi inz}.$$

Случай, когда V_4 имеет конечное число слагаемых, аналогичен этому; случай, когда либо V_1, либо V_3 имеют конечное число слагаемых, также сводится к этому случаю, если в плоскости x, y сделать поворот на угол $\frac{\pi}{4}$.

Пусть для начала V_4 содержит бесконечно много ненулевых слагаемых в разложении в ряд Фурье. Случай конечного их числа разобран ниже.

Зафиксируем $m+n > 0$ так, чтобы $u_1^{m+n} \neq 0$. В силу того, что V_2 содержит конечное число ненулевых слагаемых в разложении Фурье, а V_4 — бесконечное, существует достаточно большое m такое, что $u_4^m \neq 0$, а $u_2^m = u_2^n = 0$. Тогда (22) принимает вид

$$u_4^m = u_4^{-n} \frac{u_3^{m+n}}{u_1^{m+n}}.$$

Среди коэффициентов u_4^s содержится расходящаяся геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{u_3^{m+n}}{u_1^{m+n}}$.

Если $|\frac{u_3^{m+n}}{u_1^{m+n}}| < 1$, то при положительных n ряд $V_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_4^n e^{2\pi inz}$ сходится, а при отрицательных расходится. Наоборот, если $|\frac{u_1^{m+n}}{u_3^{m+n}}| < 1$, то при положительных n ряд расходится, а при отрицательных сходится.

Следовательно, V_4 может содержать только конечное число слагаемых

$$V_4(z) = \sum_{n=-l}^{l} v_4^n e^{2\pi i n z}.$$

По теореме Козлова-Трещёва либо V_1, либо V_3, либо и V_1, и V_3 содержат бесконечно много ненулевых слагаемых в разложении.

Рассмотрим случай, когда V_3 содержит бесконечное число слагаемых

$$V_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_3^n e^{2\pi i n z}.$$

Случай, когда V_1 содержит бесконечное число слагаемых, аналогичен этому. Выберем такое n, что $u_4^{-n} \neq 0$. Далее, возьмем достаточно большое m такое, что $u_3^{m+n} \neq 0$, $u_2^m = u_4^m = 0$. Тогда (21) эквивалентно

$$u_3^{m+n} = -u_3^{m-n} \frac{u_2^n}{u_4^{-n}}.$$

Мы получили, что среди коэффициентов u_3^{m+n} имеется геометрическая прогрессия, что невозможно (см. выше).

Лемма 1 доказана.

Перейдем к основному утверждению главы 1. Справедлива следующая

Теорема 1.1 ([1*]). *Пусть v_i^n быстро убывают с ростом $|n|$ (как коэффициенты Фурье достаточно гладкой функции). Тогда при условиях леммы 1 имеют место равенства $|v_1^n| = |v_3^n|$, $|v_2^n| = |v_4^n|$.*

Докажем теорему 1.1.

Случаи, когда $n = \pm m$, а также когда одно из этих двух чисел равно нулю, как уже было показано выше, ведут к следующим равенствам:

$$v_1^0 = u_3^0, v_2^0 = u_4^0,$$

которые, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 1.1.

Вновь рассмотрим уравнение (21). Подставим в него вместо (m, n) следующие значения:

$$(m, n), (-m, n), (n, m), (-n, m).$$

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} u_2^n u_3^{m-n} + u_1^{-m+n} u_2^m - u_1^{m+n} u_4^m + u_3^{m+n} u_4^{-n} = 0, \\ u_2^n u_3^{-(m+n)} + u_1^{m+n} u_2^{-m} - u_1^{-m+n} u_4^{-m} + u_3^{-m+n} u_4^{-n} = 0, \\ u_2^m u_3^{-m+n} + u_1^{m-n} u_2^n - u_1^{m+n} u_4^n + u_3^{m+n} u_4^{-m} = 0, \\ u_2^m u_3^{-(m+n)} + u_1^{m+n} u_2^{-n} - u_1^{m-n} u_4^{-n} + u_3^{m-n} u_4^{-m} = 0. \end{cases}$$

Далее положим

$$u_k^j = a_k^j + i b_k^j,$$

где a_k^j, b_k^j — вещественные числа, и перейдем к рассмотрению вещественной системы уравнений на a_k^j и b_k^j. Тогда из $u_i^m = -\overline{u_i^{-m}}$ следует, что

$$a_k^{-j} = -a_k^j, b_k^{-j} = b_k^j.$$

Имеем

$$
\begin{cases}
a_2^n a_3^{m-n} - b_2^n b_3^{m-n} - a_1^{m-n} a_2^m - b_1^{m-n} b_2^m - \\
\qquad - a_1^{m+n} a_4^m + b_1^{m+n} b_4^m - a_3^{m+n} a_4^n - b_3^{m+n} b_4^n = 0, \\
a_2^n b_3^{m-n} + a_3^{m-n} b_2^n - a_1^{m-n} b_2^m + a_2^m b_1^{m-n} - \\
\qquad - a_1^{m+n} b_4^m - a_4^m b_1^{m+n} + a_3^{m+n} b_4^n - a_4^n b_3^{m+n} = 0, \\
-a_2^n a_3^{m+n} - b_2^n b_3^{m+n} - a_1^{m+n} a_2^m - b_1^{m+n} b_2^m - \\
\qquad - a_1^{m-n} a_4^m + b_1^{m-n} b_4^m + a_3^{m-n} a_4^n - b_3^{m-n} b_4^n = 0, \\
a_2^n b_3^{m+n} - a_3^{m+n} b_2^n + a_1^{m+n} b_2^m - a_2^m b_1^{m+n} + \\
\qquad + a_1^{m-n} b_4^m + a_4^m b_1^{m-n} - a_3^{m-n} b_4^n - a_4^n b_3^{m-n} = 0, \\
-a_2^m a_3^{m-n} - b_2^m b_3^{m-n} + a_1^{m-n} a_2^n - b_1^{m-n} b_2^n - \\
\qquad - a_1^{m+n} a_4^n + b_1^{m+n} b_4^n - a_3^{m+n} a_4^m - b_3^{m+n} b_4^m = 0, \\
a_2^m b_3^{m-n} - a_3^{m-n} b_2^m + a_1^{m-n} b_2^n + a_2^n b_1^{m-n} - \\
\qquad - a_1^{m+n} b_4^n - a_4^n b_1^{m+n} + a_3^{m+n} b_4^m - a_4^m b_3^{m+n} = 0, \\
-a_2^m a_3^{m+n} - b_2^m b_3^{m+n} - a_1^{m+n} a_2^n - b_1^{m+n} b_2^n + \\
\qquad + a_1^{m-n} a_4^n + b_1^{m-n} b_4^n - a_3^{m-n} a_4^m - b_3^{m-n} b_4^m = 0, \\
a_2^m b_3^{m+n} - a_3^{m+n} b_2^m + a_1^{m+n} b_2^n - a_2^n b_1^{m+n} - \\
\qquad - a_1^{m-n} b_4^n + a_4^n b_1^{m-n} + a_3^{m-n} b_4^m - a_4^m b_3^{m-n} = 0.
\end{cases} \tag{23}
$$

Эту систему запишем в виде

$$
A_1 q_1(m, n) = 0,
$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_4^m & b_4^m & -a_2^m & -b_2^m & -a_4^n & -b_4^n & a_2^n & -b_2^n \\ -b_4^m & -a_4^m & -b_2^m & a_2^m & b_4^n & -a_4^n & b_2^n & a_2^n \\ -a_2^m & -b_2^m & -a_4^m & b_4^m & -a_2^n & -b_2^n & a_4^n & -b_4^n \\ b_2^m & -a_2^m & b_4^m & a_4^m & -b_2^n & a_2^n & -b_4^n & -a_4^n \\ -a_4^n & b_4^n & a_2^n & -b_2^n & -a_4^m & -b_4^m & -a_2^m & -b_2^m \\ -b_4^n & -a_4^n & b_2^n & a_2^n & b_4^m & -a_4^m & -b_2^m & a_2^m \\ -a_2^n & -b_2^n & a_4^n & b_4^n & -a_2^m & -b_2^m & -a_4^m & -b_4^m \\ b_2^n & -a_2^n & -b_4^n & a_4^n & -b_2^m & a_2^m & b_4^m & -a_4^m \end{pmatrix},$$

$$q_1(m,n) = (a_1^{m+n}, b_1^{m+n}, a_1^{m-n}, b_1^{m-n}, a_3^{m+n}, b_3^{m+n}, a_3^{m-n}, b_3^{m-n})^\top.$$

Рассмотрим $q_1 \neq 0$. Тогда эта система имеет ненулевое решение, если

$$\det A_1 = 0.$$

Вычислив определитель и упростив его, получим

$$((a_2^m)^2 + (b_2^m)^2 - (a_4^m)^2 - (b_4^m)^2 - (a_2^n)^2 - (b_2^n)^2 + (a_4^n)^2 + (b_4^n)^2)^4 = 0,$$

что эквивалентно

$$|u_2^m|^2 - |u_4^m|^2 = |u_2^n|^2 - |u_4^n|^2.$$

Таким образом:

$$\frac{|v_2^m|^2 - |v_4^m|^2}{m^2} = \frac{|v_2^n|^2 - |v_4^n|^2}{n^2}.$$

Фиксируем m. Тогда по лемме 1 найдется последовательность $n_1, n_2, ..., n_s, ...$ такая, что $q_1(m, n_s) \neq 0$. Левая часть последнего равенства остается постоянной, а правая стремится к нулю при $s \to +\infty$, так как $|v_2^{n_s}|$ и $|v_4^{n_s}|$ стремятся к нулю. Следовательно,

$$|v_2^m| = |v_4^m|$$

для всех m. Аналогично систему (23) можно записать в виде

$$A_2 q_2(m, n) = 0,$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_3^{m-n} & -b_3^{m-n} & -a_1^{m-n} & -b_1^{m-n} & -a_3^{m+n} & -b_3^{m+n} & -a_1^{m+n} & b_1^{m+n} \\ b_3^{m-n} & a_3^{m-n} & b_1^{m-n} & -a_1^{m-n} & -b_3^{m+n} & a_3^{m+n} & -b_1^{m+n} & -a_1^{m+n} \\ -a_3^{m+n} & -b_3^{m+n} & -a_1^{m+n} & -b_1^{m+n} & a_3^{m-n} & -b_3^{m-n} & -a_1^{m-n} & b_1^{m-n} \\ b_3^{m+n} & -a_3^{m+n} & -b_1^{m+n} & a_1^{m+n} & -b_3^{m-n} & -a_3^{m-n} & b_1^{m-n} & a_1^{m-n} \\ a_1^{m-n} & -b_1^{m-n} & -a_3^{m-n} & -b_3^{m-n} & -a_1^{m+n} & b_1^{m+n} & -a_3^{m+n} & -b_3^{m+n} \\ b_1^{m-n} & a_1^{m-n} & b_3^{m-n} & -a_3^{m-n} & -b_1^{m+n} & -a_1^{m+n} & -b_3^{m+n} & a_3^{m+n} \\ -a_1^{m+n} & -b_1^{m+n} & -a_3^{m+n} & -b_3^{m+n} & a_1^{m-n} & b_1^{m-n} & -a_3^{m-n} & -b_3^{m-n} \\ -b_1^{m+n} & a_1^{m+n} & b_3^{m+n} & -a_3^{m+n} & b_1^{m-n} & -a_1^{m-n} & -b_3^{m-n} & a_3^{m-n} \end{pmatrix},$$

$$q_2(m, n) = (a_2^n, b_2^n, a_2^m, b_2^m, a_4^n, b_4^n, a_4^m, b_4^m)^\top.$$

Аналогичными рассуждениями получаем равенство

$$|v_1^m| = |v_3^m|$$

для всех m. Теорема 1.1 доказана.

Отметим, что в сингулярном случае гамильтонова система (2) с потенциалом (3) может иметь несводимый интеграл четвертой степени. Пусть, например,

$$V = \frac{a + b\sin x}{\cos^2 x} + \cos(x+y) + \frac{c + d\sin y}{\cos^2 y} - \cos(y-x),$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, тогда существует дополнительный интеграл вида

$$F = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + \frac{c + d\sin y}{\cos^2 y} p_1^2 + (\cos(y+x) + \cos(y-x)) p_1 p_2 + \frac{a + b\sin x}{\cos^2 x} p_2^2 + f$$

(см. [27]). Другие примеры можно найти в [28].

Глава 2

Магнитный геодезический поток на двумерном торе

2.1 Геодезические потоки и полугамильтоновы системы

Если геодезический поток интегрируем по Лиувиллю, то на торе можно ввести глобальные полугеодезические координаты (t, x) ([11]), такие, что

$$ds^2 = g^2(t,x)dt^2 + dx^2, \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{g^2} + p_2^2\right).$$

Первый интеграл имеет вид

$$F = \frac{a_0}{g^n}p_1^n + \frac{a_1}{g^{n-1}}p_1^{n-1}p_2 + \ldots \\ + \frac{a_{n-2}}{g^2}p_1^2p_2^{n-2} + \frac{a_{n-1}}{g}p_1p_2^{n-1} + a_np_2^n,\ a_k = a_k(t,x).$$

Условие $\dot{F} = \{F, H\} = 0$ эквивалентно квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$U_t + A(U)U_x = 0 \tag{24}$$

на коэффициенты F с некоторой матрицей A. Здесь $U = (a_0, \ldots, a_{n-1})^T$, $a_{n-1} = g,\ a_n = 1$. Система (24) является полугамильтоновой (см. [11]).

В [15] изучался вопрос существования дополнительного первого интеграла геодезического потока на двумерном торе, полиномиального по импульсам, произвольной степени в изотермических координатах, $ds^2 = \Lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$. Существование первого интеграла вида

$$F = a_0 p_1^n + a_1 p_1^{n-1} p_2 + \ldots + a_n p_2^n, \qquad a_k = a_k(x,y),$$

с учетом теоремы Колокольцова (см. [10])

$$a_n = c_1 + a_{n-2} - a_{n-4} + \ldots, \qquad a_{n-1} = c_2 + a_{n-3} - a_{n-5} + \ldots,$$

(здесь c_1, c_2 — некоторые константы), ведет к квазилинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0, \tag{25}$$

где $U = (a_0, \ldots, a_{n-2}, \Lambda)^T$. Система (25) также является полугамильтоновой (в тех областях, где A или B невырождена) (см. [15]).

Согласно теореме М.В. Павлова и С.П. Царева (см. [17]), если система нераспадающаяся ($\partial_{r_i}\lambda_k \neq 0,\ i \neq k$), то её егоровость эквивалентна наличию у нее двух законов сохранения специального вида:

$$F_x + G_y = 0, \qquad F_y + H_x = 0.$$

В [15] эти законы найдены в явном виде для системы (25).

2.2 Геодезический поток в магнитном поле

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}_{mg}, \qquad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{mg}, \qquad j = 1, 2 \tag{26}$$

на двумерном торе в магнитном поле с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ и скобкой Пуассона следующего вида:

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Известен лишь один пример магнитного геодезического потока на двумерном торе, интегрируемого на всех уровнях энергии с ненулевым магнитным полем (см., например, [19]).

Пример. *Пусть метрика имеет вид*

$$ds^2 = \Lambda(y)(dx^2 + dy^2),$$

магнитное поле

$$w = -u'(y) dx \wedge dy.$$

Тогда существует линейный по импульсам первый интеграл

$$F = p_1 + u(y).$$

Перейдем к исследованию вопроса об интегрируемости геодезического потока в магнитном поле на фиксированном уровне энергии. Выберем конформные координаты (x, y), в которых $ds^2 = \Lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$, $H = \frac{p_1^2+p_2^2}{2\Lambda}$. Зафиксируем уровень энергии $H = \frac{1}{2}$. Тогда можно параметризовать импульсы следующим образом:

$$p_1 = \sqrt{\Lambda}\cos\varphi, \qquad p_2 = \sqrt{\Lambda}\sin\varphi.$$

Уравнения (26) примут вид

$$\dot{x} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\Lambda}}, \qquad \dot{y} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\Lambda}}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\Lambda_y}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}\cos\varphi - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda\sqrt{\Lambda}}\sin\varphi - \frac{\Omega}{\Lambda}.$$

Следуя [22], будем искать первый интеграл F в виде

$$F(x,y,\varphi) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(x,y)e^{ik\varphi}. \tag{27}$$

Здесь $a_k = u_k + iv_k, a_{-k} = \bar{a}_k$. Условие $\dot{F} = 0$ эквивалентно следующему уравнению

$$F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi + F_\varphi\left(\frac{\Lambda_y}{2\Lambda}\cos\varphi - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}\sin\varphi - \frac{\Omega}{\sqrt{\Lambda}}\right) = 0. \tag{28}$$

Подставим (27) в (28) и приравняем к нулю коэффициенты при $e^{ik\varphi}$. Мы получим

$$\frac{\Lambda_y}{2\Lambda}\frac{i(k-1)a_{k-1} + i(k+1)a_{k+1}}{2} - \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}\frac{i(k-1)a_{k-1} - i(k+1)a_{k+1}}{2i} +$$

$$+\frac{(a_{k-1})_x + (a_{k+1})_x}{2} + \frac{(a_{k-1})_y - (a_{k+1})_y}{2i} - \frac{ik\Omega a_k}{\sqrt{\Lambda}} = 0, \tag{29}$$

где $k = 0, \ldots, N+1,\ a_k = 0$ при $k > N$.

После исключения магнитного поля Ω (см. ниже) получаем квазилинейную систему дифференциальных уравнений на a_j вида

$$A(U)U_x + B(U)U_y = 0, \tag{30}$$

где $U = (\Lambda, u_0, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1})^T$. Мы не будем её выписывать явно ввиду громоздкости. В [22] показано, что она является полугамильтоновой для любого N. Там же доказано, что в случае $N = 2, 3$ система (30) является егоровской. Мы обобщили этот результат на случай произвольного N. Справедлива

Теорема 2.1 ([2*]). *Система (30) является егоровской для любого N.*

Докажем теорему 2.1. Полагая $k = N + 1$ в (29), получаем соотношение

$$(a_N \Lambda^{-\frac{N}{2}})_x - i(a_N \Lambda^{-\frac{N}{2}})_y = 0,$$

из которого следует, что можно положить $a_N = \Lambda^{\frac{N}{2}}$ (см. [22]).

Положим $k = N$ в (29) и рассмотрим действительную и мнимую части полученного уравнения. Отсюда найдем выражение для магнитного поля

$$\Omega = \frac{(N-1)(\Lambda_y u_{N-1} - \Lambda_x v_{N-1}) + 2\Lambda((v_{N-1})_x - (u_{N-1})_y)}{4N\Lambda^{\frac{N+1}{2}}}, \tag{31}$$

а также следующее соотношение:

$$2\Lambda((u_{N-1})_x + (v_{N-1})_y) = (N-1)(v_{N-1}\Lambda_y + u_{N-1}\Lambda_x). \tag{32}$$

Сделаем замены следующего вида:

$$f_k = u_k \Lambda^{-\frac{k}{2}}, \qquad g_k = v_k \Lambda^{-\frac{k}{2}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Тогда соотношения на коэффициенты a_k заметно упростятся. Из (31), (32) следует

$$\Omega = \frac{(g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y}{2N},$$

$$(f_{N-1})_x + (g_{N-1})_y = 0. \tag{33}$$

Полагая $k = N-1$ в (29), получаем уравнения:

$$(N-1) f_{N-1}((g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y) + N((f_{N-2})_y - (g_{N-2})_x - N\Lambda_y) = 0,$$

$$(N-1) g_{N-1}((g_{N-1})_x - (f_{N-1})_y) + N((f_{N-2})_x + (g_{N-2})_y + N\Lambda_x) = 0,$$

которым, с учетом (33), можно придать следующий вид:

$$R_x + \left(\frac{N-1}{2} (g_{N-1}^2 - f_{N-1}^2) - N^2 \Lambda + N f_{N-2} \right)_y = 0,$$

$$R_y + \left(\frac{N-1}{2} (f_{N-1}^2 - g_{N-1}^2) - N^2 \Lambda - N f_{N-2} \right)_x = 0,$$

где

$$R = (N-1) f_{N-1} g_{N-1} - N g_{N-2}.$$

Тем самым мы показали, что система (30) действительно является системой егоровского типа. Теорема 2.1 доказана.

Глава 3

Субриманов геодезический поток для распределения Гурса

3.1 Задача оптимального управления на группе Гурса

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \qquad u \in \mathbb{R}^2, \tag{34}$$

где $f_1(q) = (1, 0, -x_2, \dots, -x_{n-1})$, $f_2(q) = (0, 1, 0, \dots, 0)$ — векторные поля, $q = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, с граничными условиями: $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$. Мы минимизируем функционал:

$$J = \int_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}\, dt. \tag{35}$$

Рассматриваемая задача оптимального управления (34), (35) играет важную роль в робототехнике — в частности, она описывает движение машины с прицепами на плоскости ([29]).

Векторные поля $f_1(q)$, $f_2(q)$ порождают n-мерную нильпотентную алгебру Ли со следующими коммутационными соотношениями:

$$[f_1, f_{k-1}] = f_k, \quad 3 \le k \le n, \quad [f_1, f_n] = [f_i, f_j] = 0, \quad 2 \le i, j \le n.$$

Эта алгебра Ли называется алгеброй Гурса, а отвечающая ей группа Ли на $\mathbb{R}^n$ называется группой Гурса. При этом $f_1(q), ..., f_n(q)$ являются левоинвариантными векторными полями.

В силу принципа максимума Понтрягина ([25]), нормальные оптимальные траектории в задаче (34), (35) описываются уравнениями Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{36}$$

с гамильтонианом

$$H(p, q, u) = \langle p, u_1 f_1 + u_2 f_2 \rangle - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}, \tag{37}$$

причем

$$H(p(t), q(t), u(t)) = \max_{\widetilde{u} \in \mathbb{R}^2} H(p(t), q(t), \widetilde{u}). \tag{38}$$

Анормальные траектории мы не исследуем.

Известно, что система (36) интегрируема по Лиувиллю (см., например, [23]).

Теорема 3.1 ([3*]). *Гамильтонова система (36), отвечающая задаче (34), (35), обладает следующими первыми интегралами:*

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - \ldots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2),$$

$$F_2 = p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \ldots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},$$
$$F_3 = p_3 - F_4 x_1 - F_5 \frac{x_1^2}{2!} - \ldots - F_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!},$$
$$\ldots$$
$$F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1} x_1 - F_n \frac{x_1^2}{2!}, \qquad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \qquad F_n = p_n.$$

Интегралы F_i, $i = 1, ..., n$, *почти всюду функционально независимы и находятся в инволюции:*

$$\{F_k, F_s\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Гамильтоновы системы такого вида, отвечающие субримановой задаче на других группах Ли, изучались, например, в [30] – [32].

Докажем теорему 3.1. Из (38) следует, что $H_{u_1} = H_{u_2} = 0$, то есть $u_1 = \langle p, f_1 \rangle, u_2 = \langle p, f_2 \rangle$. Поэтому

$$H(q,p) = \frac{\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2}{2} = \frac{\langle p, f_1 \rangle^2 + \langle p, f_2 \rangle^2}{2} = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - ... - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2).$$

Уравнения (36) имеют вид

$$\dot{x}_1 = p_1 - x_2 p_3 - \ldots - x_{n-1} p_n, \qquad \dot{x}_2 = p_2,$$
$$\dot{x}_3 = -x_2 \dot{x}_1, \qquad \ldots \qquad , \dot{x}_n = -x_{n-1} \dot{x}_1,$$
$$\dot{p}_1 = 0, \qquad \dot{p}_2 = p_3 \dot{x}_1, \qquad \ldots \qquad , \dot{p}_{n-1} = p_n \dot{x}_1, \qquad \dot{p}_n = 0.$$

Введем вдоль траектории новый параметр $s(t)$ такой, что $\dot{s} = u_1$, тогда $s(t) = x_1(t)$. Уравнения на импульсы перепишутся в следующем виде:

$$p_1' = 0, \qquad p_2' = p_3, \qquad \ldots \qquad , p_{n-1}' = p_n, \qquad p_n' = 0,$$

где $p_i' = \frac{dp_i}{ds}$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь первые интегралы легко находятся:

$$F_n = p_n, \qquad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \qquad F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1}x_1 - F_n\frac{x_1^2}{2!},$$

$$...$$

$$F_2 = p_2 - F_3x_1 - F_4\frac{x_1^2}{2!} - ... - F_n\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2p_3 - ... - x_{n-1}p_n)^2 + p_2^2).$$

Заметим, что $F_j = F_j(x_1, p_j, p_{j+1}, ..., p_n)$, $1 < j < n$, поэтому все F_j почти всюду функционально независимы и находятся попарно в инволюции. Теорема 3.1 доказана.

3.2 Поверхности уровня первых интегралов

Объясним, как устроены поверхности уровня интегралов F_i. Введем отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,p) = (F_1(x,p), ..., F_n(x,p))$.

Справедлива

Теорема 3.2 ([3*]). *Если $C \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение отображения φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо двум экземплярам $\mathbb{R}^n$, либо s_1 непересекающимся цилиндрам $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $0 \le s_1 \le n-2$.*

Если C — критическое значение φ, то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо $\mathbb{R}^n$, либо объединению $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k$, $k \le n-2$. Здесь Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$, либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — окружность или замкнутая кривая с s самопересечениями (см. ниже).

Докажем теорему 3.2.

Пусть $(x_1, ..., x_n, P_1, ..., P_n)$ — новые координаты в фазовом пространстве, где P_i определяются следующим образом:

$$P_1 = p_1 - x_2 p_3 - x_3 p_4 - ... - x_{n-1} p_n, \qquad P_n = p_n,$$

$$P_{n-1} = p_{n-1} - P_n x_1, \qquad P_{n-2} = p_{n-2} - P_{n-1} x_1 - P_n \frac{x_1^2}{2!},$$

$$\dots$$

$$P_3 = p_3 - P_4 x_1 - P_5 \frac{x_1^2}{2!} - ... - P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}, \qquad P_2 = p_2.$$

Заметим, что новые координаты не являются каноническим. Уравнения (36) в новых координатах имеют вид:

$$\dot{x}_1 = P_1, \qquad \dot{x}_2 = P_2, \qquad \dot{x}_3 = -x_2 P_1, \qquad \dots \qquad , \dot{x}_n = -x_{n-1} P_1,$$

$$\dot{P}_1 = -P_2 \left(P_3 + P_4 x_1 + ... + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!} \right),$$

$$\dot{P}_2 = P_1 \left(P_3 + P_4 x_1 + ... + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!} \right),$$

$$\dot{P}_3 = 0, \qquad \dots \qquad , \dot{P}_n = 0.$$

В новых координатах первые интегралы принимают вид:

$$F_1 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2), \;\; F_2 = P_2 - P_3 x_1 - ... - P_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \;\; F_3 = P_3, \dots, F_n = P_n.$$

Выпишем матрицу Якоби $J_{n\times 2n} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial P})$ отображения φ в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ w_0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & -x_1 & -\frac{x_1^2}{2!} & ... & -\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & ... & 0 & P_1 & P_2 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $w_0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\left(P_3 + P_4 x_1 + ... + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}\right)$.

Если $P_1 \neq 0$, то ранг матрицы максимален и равен n. Ранг $J_{n\times 2n}$ равняется $n-1$ только в следующих случаях: $P_1 = 0,\ P_2 = 0$ либо $P_1 = w_0 = 0,\ P_2 \neq 0$.

Зафиксируем значения первых интегралов: $F_k = C_k,\ 1 \leq k \leq n$. Тогда

$$P_1^2 + P_2^2 = 2C_1, \tag{39}$$

$$P_2 = C_2 + C_3 x_1 + ... + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \tag{40}$$

при этом $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Таким образом, поверхности уровней первых интегралов определяются пересечением двух цилиндров в $\mathbb{R}^3$, заданных уравнениями (39) и (40).

Рассмотрим сначала случай, когда $C_3 = \ldots = C_n = 0$. Тогда уравнение (40) принимает вид $P_2 = C_2$. Из (39) получаем $P_1 = \pm\sqrt{2C_1 - C_2^2}$. Если $|C_2| < \sqrt{2C_1}$, то ранг отображения φ равен n

и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно двум экземплярам $\mathbb{R}^n$. Если $|C_2| = \sqrt{2C_1}$, то ранг φ равен $n-1$ и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Далее предположим, что найдется такое k, $3 \leq k \leq n$, что $C_k \neq 0$. В этом случае пересечение двух цилиндров, заданных в $\mathbb{R}^3$ уравнениями (39) и (40), состоит из замкнутых кривых, симметричных относительно плоскости OP_2x_1, и точек их касания.

В регулярном случае, когда в пересечении цилиндров лежат s_1 непересекающихся кривых, гомеоморфных окружностям, где $1 \leq s_1 \leq n-2$, поверхности уровня устроены как объединение цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. На рис. 1 изображены цилиндры, заданные уравнениями (39), (40), которые пересекаются по двум окружностям, то есть поверхности уровня первых интегралов в этом случае устроены как объединение двух экземпляров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Критические уровни первых интегралов отвечают точкам касания цилиндров, их число не превосходит $n-3$; в этом случае поверхности устроены как объединение $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_s$, $1 \leq s \leq n-2$, где Γ_j гомеоморфны либо $\mathbb{R}^{n-1}$ (этот случай отвечает изолированной точке касания цилиндров), либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — либо окружность, либо замкнутая кривая с s_2 самопересечениями, $1 \leq s_2 \leq n-3$. На рис. 2 изображены два цилиндра, которые касаются в изолированной точке K и пересекаются по двум соприкасающимся в точке L окружностям, то есть поверхности уровня в этом случае устроены как $\mathbb{R}^{n-1} \cup (\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma)$, где γ – замкнутая кривая с одним самопересечением. Теорема 3.2 доказана.

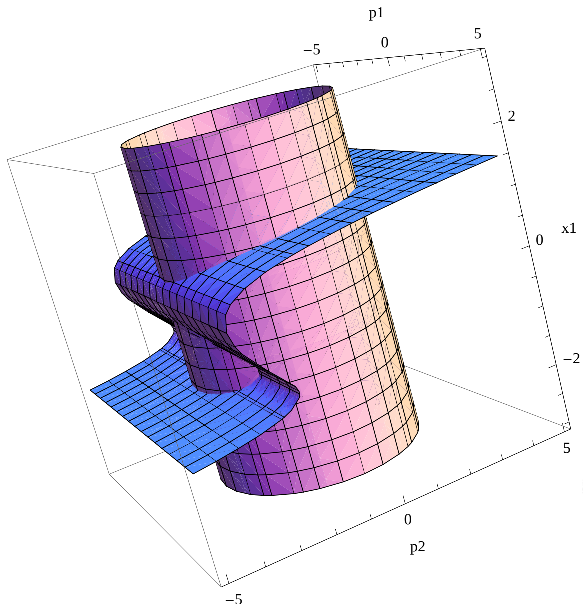

Рис. 1: Пересечение цилиндров, отвечающее регулярному значению интегралов

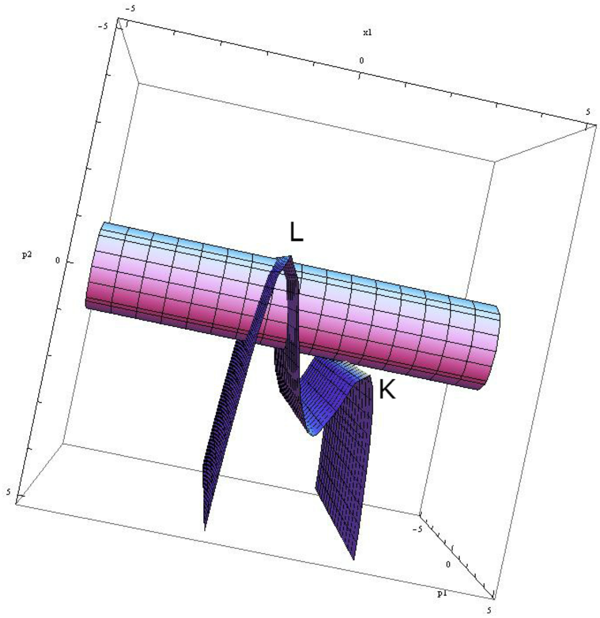

Рис. 2: Пересечение цилиндров, отвечающее критическому значению интегралов

3.3 Экстремальные траектории

Система (36) допускает траектории, для которых $x_1(t),\ x_2(t)$ — периодические функции, а их проекции на плоскость Ox_1x_2 — замкнутые кривые.

Теорема 3.3 ([3*]). *Среди решений системы (36) найдутся такие, что их проекции на плоскость* Ox_1x_2 *образуют замкнутые кривые, симметричные относительно оси* Ox_1.

Докажем теорему 3.3. Нас интересуют такие траектории, для которых $x_1(t), x_2(t)$ — периодические функции. Если $x_1(t)$ — периодическая функция (см. ниже), то из уравнений

$$\dot{x}_1 = P_1, \quad P_2 = C_2 + C_3 x_1 + \ldots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}$$

следует, что $P_1(t)$ и $P_2(t)$ также являются периодическими. С учетом

$$\dot{x}_2 = P_2, \quad 2H = (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 = 2C_1$$

имеем:

$$\dot{x}_2 = C_2 + C_3 x_1 + ... + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \tag{41}$$

$$(\dot{x}_1)^2 = 2C_1 - \left(C_2 + C_3 x_1 + ... + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!} \right)^2. \tag{42}$$

Введем обозначения

$$Q_{n-2}(x_1) = C_2 + C_3 x_1 + ... + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \qquad f(x_1) = 2C_1 - Q_{n-2}^2(x_1),$$

тогда уравнения (41), (42) примут вид:

$$(\dot{x}_1)^2 = f(x_1), \qquad \dot{x}_2 = Q_{n-2}(x_1). \tag{43}$$

Пусть α_i — вещественные корни уравнения $Q_{n-2}(x_1) = 0$, а β_j — вещественные корни уравнения $f(x_1) = 0$, $\quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l$. Заметим, что

$$\lim_{x_1 \to \pm\infty} f(x_1) = -\infty.$$

С другой стороны, $f(\alpha_i) = 2C_1 > 0, \quad i = 1, \ldots, k$. Поэтому каждый корень α_i расположен внутри некоторого отрезка $[\beta_j, \ \beta_{j+1}]$, на котором $f(x_1) \geq 0$ (см. Рис. 3).

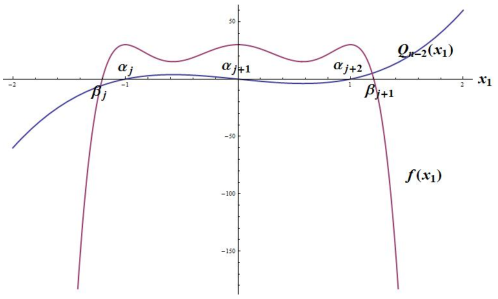

Рис. 3: Пример взаимного расположения корней уравнений $f(x_1) = 0,\ Q_{n-2}(x_1) = 0$

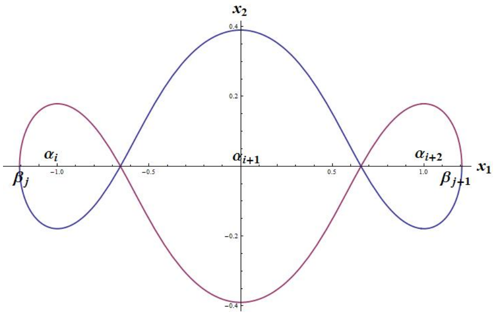

Рис. 4: Проекция траектории, отвечающей случаю, показанному на Рис. 3, на плоскость Ox_1x_2

Любому такому отрезку $[\beta_j,\ \beta_{j+1}]$ отвечают периодические решения $x_1(t)$ с некоторым периодом τ. Предположим, что $x_1(0) = \beta_j$. Тогда $x_1(\frac{\tau}{2}) = \beta_{j+1}, \qquad x_1(\tau) = x_1(0) = \beta_j$. В силу (43) имеем

$$dx_1 = \sqrt{f(x_1)}dt, \qquad dx_2 = Q_{n-2}(x_1)dt, \qquad t \in [0,\ \frac{\tau}{2}],$$

$$dx_1 = -\sqrt{f(x_1)}dt, \qquad dx_2 = Q_{n-2}(x_1)dt, \qquad t \in [\frac{\tau}{2}, \tau].$$

Следовательно,

$$dx_2 = \pm\frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}dx_1. \tag{44}$$

Таким образом, $x_2(t)$ — периодическая функция тогда и только тогда, когда следующий интеграл обращается в ноль:

$$\int_0^\tau Q_{n-2}(x_1)dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} Q_{n-2}(x_1)dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^\tau Q_{n-2}(x_1)dt =$$

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}dx_1 + \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{-\sqrt{f(x_1)}}dx_1 = 2\int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}}dx_1 = 0.$$

Выберем константы $C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы полином $Q_{n-2}(x_1)$ имел вид $Q_{n-2}(x_1) = x_1(x_1^2 - \alpha_1^2)\ldots(x_1^2 - \alpha_k^2)$. Тогда последнее равенство автоматически выполнено. Положим $x_2(x_1)|_{x_1=\beta_j} = 0$. Тогда траектория будет симметричной относительно оси Ox_1 в плоскости Ox_1x_2. Теорема 3.3 доказана.

В заключении приведем примеры траекторий, отвечающих различным значениям констант C_j, чьи проекции на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые симметричные кривые с различным числом самопересечений (см. Рис. 5 — 8). Они были получены численным интегрированием уравнения (44).

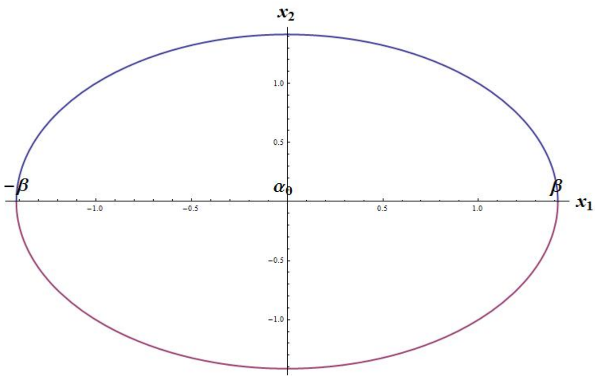

Рис. 5: $Q(x_1) = x_1,\ C_1 = 1$

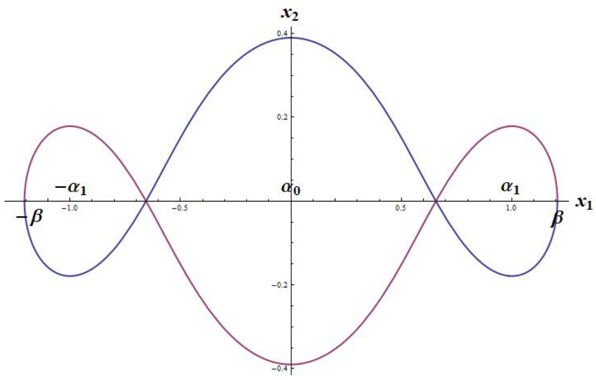

Рис. 6: $Q(x_1) = 10x_1(x_1^2 - 1),\ C_1 = 15$

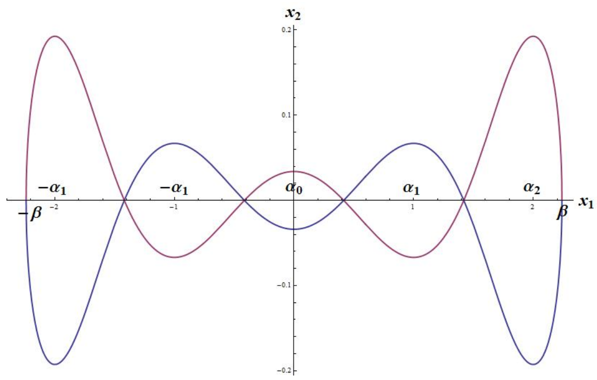

Рис. 7: $Q(x_1) = x_1(x_1^2 - 1)(x_1^2 - 4),\ C_1 = 42$

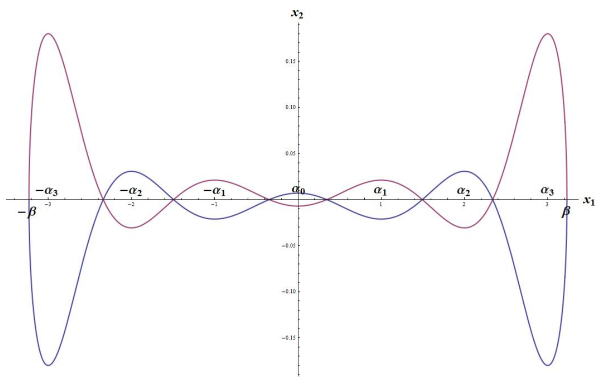

Рис. 8: $Q(x_1) = x_1(x_1^2 - 1)(x_1^2 - 4)(x_1^2 - 9),\ C_1 = 40000$

Заключение

В диссертации изучаются интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с натуральной механической системой и магнитным геодезическим потоком на двумерном торе, а также с субримановым распределением Гурса в $\mathbb{R}^n$. В работе получены следующие основные результаты.

1) Исследована натуральная механическая система на двумерном торе с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x, y)$$

и потенциалом

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(x + y) + V_3(y) + V_4(y - x).$$

Найдены необходимые условия на потенциал, при которых она обладает неприводимым первым интегралом 4 степени (в неразделимом соавторстве с Д.Н. Александровым).

2) Доказано, что квазилинейная система дифференциальных уравнений, отвечающая наличию у магнитного геодезического потока на

двумерном торе на фиксированном уровне энергии (в конформных координатах) дополнительного полиномиального первого интеграла, является егоровской системой.

3) Исследовано распределение Гурса в $\mathbb{R}^n$. Выписаны первые интегралы субриманова геодезического потока для этого распределения, построены их поверхности уровня. Найдены примеры траекторий, отвечающих движению вдоль "запрещенных" направлений.

Результаты этой работы могут быть использованы при изучении интегрируемых гамильтоновых систем.

Список литературы

[1] Kozlov, V. V. *Integrable and non-integrable hamiltonian systems* / V. V. Kozlov // Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev. — 1989. — 8, №1. — С. 1–81.

[2] Денисова, Н. В., Козлов, В. В. *Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе.* /Н. В. Денисова, /В. В. Козлов // Матем. сб. — 1994. — 185, №12. — С. 49–64.

[3] Болсинов, А. В., Козлов, В. В., Фоменко, А. Т. *Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела.* /А. В. Болсинов, /В. В. Козлов, /А. Т. Фоменко // УМН. — 1995. — 50, №3 (303). — С. 3–32.

[4] Бялый, М. Л. *О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе* / М. Л. Бялый // Функц. анализ и его прилож. — 1987. — 21, №4. — С. 64–65.

[5] Денисова, Н. В., Козлов, В. В. *Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора.* /Н. В. Денисова, /В. В. Козлов // Матем. сб. — 2000. — 191, №2. — С. 43–63.

[6] Денисова, Н. В., Козлов, В. В., Трещев, Д. В. *Замечания о полиномиальных интегралах высших степеней обратимых систем с торическим пространством конфигураций.* /Н. В. Денисова, В. В. Козлов, Д. В. Трещев // Изв. РАН Сер. матем. — 2012. — 76, №5. — С. 57 – 72.

[7] Миронов, А. Е. *О полиномиальных интегралах механической системы на двумерном торе.* /А. Е. Миронов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2010. — 74, №4. — С. 145 – 156.

[8] Козлов, В. В., Трещев, Д. В. *Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений.* /В. В. Козлов, /Д. В. Трещев // Матем. сб. — 1988. — 135 (177), №1. — С. 119 – 138.

[9] Козлов, В. В. *Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем.* /В. В. Козлов // ДАН СССР. — 1979. — 249, №6. — С. 1299 – 1302.

[10] Колокольцов, В. Н. *Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом.* /В. Н. Колокольцов // Изв. АН СССР. Сер. матем.. — 1982. — 46, №5. — С. 994 – 1010.

[11] Bialy, M. L., Mironov, A. E. *Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus.* / M. L. Bialy, A. E. Mironov // Discrete

and Continuous dynamical systems. — 2011. — 29, №1. — P. 81 – 90.

[12] Царев, С. П. *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа.* /С. П. Царев // Доклады АН СССР. — 1985. — 282, №3. — С. 534 – 537.

[13] Царев, С. П. *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа.* /С. П. Царев // Изв. АН СССР, Сер. матем.. — 1990. — 54, №5. — С. 1048 – 1068.

[14] Sevennec, B. *Geometrie des systemes de lois de conservation.*/ B. Sevennec // Soc. Math. de France, Marseille. — 1994. — 56.

[15] Bialy, M. L., Mironov, A. E. *Integrable geodesic flows on 2-torus: formal solutions and variational principle* / M. L. Bialy, A. E. Mironov // Journal of Geometry and Physics. — 2015. — 87, №1. — P. 39 – 47.

[16] Bialy, M. L. *Richness or semi-hamiltonicity of quasi-linear systems that are not in evolution form* / M. L. Bialy // Quarterly of Applied Math. — 2013. — 71, — P. 787 – 796.

[17] Павлов, М. В., Царев, С. П. *Тригамильтоновы структуры егоровских систем гидродинамического типа.* /М. В. Павлов, С. П. Царев // Функциональный Анализ и их Приложения. — 2003. — 37, №1. — С. 32 – 45.

[18] Козлов, В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.*/ В. В. Козлов // Изд-во Удмартского гос. университета, Ижевск. — 1995. — 432.

[19] Тен, В. В. *Полиномиальные первые интегралы систем с гироскопическими силами.* /В. В. Тен // Матем. заметки. — 2000. — 68, №1. — С. 151 – 153.

[20] Болотин, С. В. *О первых интегралах систем с гироскопическими силами.* /С. В. Болотин // Вестник Моск. Универ., Матем. и Механ. — 1984. — 1, №6. — С. 75 – 82.

[21] Taimanov, I. A. *On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus* / I. A. Taimanov // Reg. and Chaotic Dyn. — 2015. — 20, №6. — С. 667 – 678.

[22] Bialy, M. L., Mironov, A. E. *New semi-hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces.* / M. L. Bialy, A. E. Mironov // Central European Journal of Mathematics. — 2012. — 10, №5. — P. 1596 – 1604.

[23] Anzaldo–Meneses, A., Monroy–Perez, F. *Goursat distribution and sub-Riemannian structures.* / A. Anzaldo–Meneses, F. Monroy–Perez // Journal of Math. Physics. — 2003. — 44, №12. — С. 6101 – 6111.

[24] Аграчев, А. А., Сачков, Ю. Л. *Геометрическая теория управления.*/ В. В. Козлов, Ю. Л. Сачков // Физматлит. — 2005. — 392.

[25] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.*/ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко // Физматгиз. — 1961.

[26] Ардентов, А. А., Сачков, Ю. Л. *Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля.* /А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков // Матем. сборник. — 2011. — 202, №11. — С. 31 – 54.

[27] Bozis, G. *Compatibility conditions for a nonquadratic integral of motion.* / G. Bozis // Celestial Mech. — 1982. — 28, №4. — С. 367 – 380.

[28] Переломов, А. М. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли.*/ А. М. Переломов // Наука, Москва. — 1990. — С. 83 – 84.

[29] Laumond, J. P. *Robot Motion Planning and Control.*/ J. P. Laumond // Springer, Berlin, Heidelberg. — 1998.

[30] Taimanov, I. A. *Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics.* / I. A. Taimanov // Journal of Dynamical and Control Sistems — 2003. — 3, №1. — С. 129 – 147.

[31] Мажитова, А. Д. *Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли.*/ А. Д. Мажитова // Матем. труды. — 2012. — 15, №1. — С. 120 – 128.

[32] Сачков, Ю. Л. *Теория управления на группах Ли.*/ Ю. Л. Сачков // Совр. математика. Фунд. направления. — 2007. — 26 — С. 5 – 59.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Агапов, С. В., Александров, Д. Н. *Полиномиальные интегралы четвертой степени натуральной механической системы на двумерном торе.* /С. В. Агапов // Математические заметки. — 2013. —Т. 93, №5. — С. 790 – 793.

[2*] Агапов, С. В. *Об интегрируемом магнитном геодезическом потоке на двумерном торе.* /С. В. Агапов // Сибирские электронные математические известия. — 2015. —Т. 12.— С. 868 – 873.

[3*] Агапов, С. В. *О субримановом геодезическом потоке для распределения Гурса.* /С. В. Агапов // Сибирский математический журнал. — 2016. —Т. 57, №1. — С. 3 – 9.

[4*] Agapov, S. *On integrability of the sub-Riemannian geodesic flow for Goursat distribution* [Электронный ресурс] / S. Agapov //

International Youth Conference «Geometry and Control», Moscow, April 14–18, 2014: Abstracts. — Moscow: Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences. — 2014. — P. 5–6. — Режим доступа: http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf.

[5*] Агапов, С. В. *О субримановом геодезическом потоке для распределения Гурса.* [Электронный ресурс] / С. В. Агапов // Тезисы школы – конференции «Вторая Зимняя геометрическая школа», Переславль-Залесский. — 2015. — 3 стр. — Режим доступа: http://site.u.pereslavl.ru/O_nas/Nauchnye_konferentsii/Zimnyaya_geometricheskaya_shkola_2015_g./Agapov.pdf.

[6*] Agapov, S. *On an integrable magnetic geodesic flow on a 2-torus.* [Электронный ресурс] / S. Agapov // International Conference «Metric Structures and Control Systems», Novosibirsk. — 2015. — P. 5–7. — Режим доступа: http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2015/09/abstracts.pdf.