Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

На правах рукописи

Давлетшина Валентина Николаевна

Формально самосопряженные коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 2 и их деформации, заданные солитонными уравнениями

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д. ф.–м. н. А. Е. Миронов

Новосибирск — 2015

Содержание

Введение

В диссертации изучаются коммутативные кольца формально самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два.

Пусть

$$L_n = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} v_i(x)\partial_x^i, \qquad L_m = \partial_x^m + \sum_{j=0}^{m-1} u_j(x)\partial_x^j$$

— обыкновенные дифференциальные операторы порядков n, $m \geqslant 2$. Условие коммутации операторов L_n и L_m

$$[L_n, L_m] = L_n L_m - L_m L_n = 0$$

представляет собой сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты этих операторов.

Напомним некоторые результаты из теории коммутирующих дифференциальных операторов. Один из первых важных результатов был получен Шуром [1] в 1905 году.

Лемма 1. *Пусть L_n, L_m и L_k — дифференциальные операторы порядков n, m и k соответственно ($n \geq 1$). Если $L_nL_m = L_mL_n$ и*

$L_n L_k = L_k L_n$, *то* $L_m L_k = L_k L_m$.

Лемма 1 означает, что множество операторов, коммутирующих с заданным оператором, образует коммутативное кольцо. Позднее в 1923 году Бурхналл и Чаунди в [2] доказали следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $L_n L_m = L_m L_n$, *то существует ненулевой полином* $R(\lambda, \mu)$, *такой что* $R(L_n, L_m) = 0$.

Например, если

$$L_2 = \partial_x^2 - \frac{2}{x^2}, \quad L_3 = \partial_x^3 - \frac{3}{x^2}\partial_x + \frac{3}{x^3},$$

то $L_2^3 = L_3^2$, т.е. $R = \lambda^3 - \mu^2$.

Уравнение $R(\lambda, \mu) = 0$ определяет *спектральную кривую* Γ пары коммутирующих дифференциальных операторов L_n и L_m

$$\Gamma = \{(\lambda, \mu) : R(\lambda, \mu) = 0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Если ψ является совместной собственной функцией

$$L_n \psi = \lambda \psi, \qquad L_m \psi = \mu \psi,$$

то точка с координатами (λ, μ) принадлежит спектральной кривой Γ.

Размерность пространства совместных собственных функций, для (λ, μ) в общем положении, является общим делителем n и m. *Рангом* l называется наибольший общий делитель всех порядков операторов из максимального коммутативного кольца, содержащего L_n и L_m.

В случае коммутирующих операторов ранга один совместные собственные функции (*функции Бейкера–Ахиезера*) и коэффициенты операторов выражаются через тэта–функцию многообразия Якоби спектральной кривой с помощью конструкции И.М. Кричевера [3]. Напомним эту конструкцию. Функция Бейкера–Ахиезера находится по следующему набору спектральных данных

$$\left\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma\right\},$$

где Γ — произвольная риманова поверхность рода g, $q \in \Gamma$, k^{-1} — локальный параметр в окрестности точки q, $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор степени g.

Тогда существует единственная функция $\psi(x, P)$ $(P \in \Gamma)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. В окрестности точки q функция ψ имеет существенную особенность
$$\psi = e^{kx}\left(1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \ldots\right);$$
2. Функция ψ мероморфна на $\Gamma - \{q\}$ с простыми полюсами в $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.

Пусть $f(P)$ — мероморфная функция с единственным полюсом в q порядка n с разложением

$$f = k^n + O(k^{n-1}).$$

Тогда существует единственный дифференциальный оператор

$$L(f) = \sum_{j=0}^{n} u_j(x)\partial_x^j, \qquad u_n = 1,$$

такой что

$$L(f)\psi(x,P) - f(P)\psi(x,P) = e^{xk}O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Коэффициенты $u_i(x)$ явно находятся по $\xi_i(x)$. Если правая часть последнего равенства не равна нулю, то ее можно добавить к функции Бейкера–Ахиезера и получить новую функцию, удовлетворяющую условиям 1 и 2 в определении функции Бейкера–Ахиезера, но, в силу единственности функции Бейкера–Ахиезера, это невозможно, т.е.

$$L(f)\psi(x,P) = f(P)\psi(x,P).$$

Аналогично для другой мероморфной функции $g(P)$ с единственным полюсом в q

$$L(g)\psi(x,P) = g(P)\psi(x,P).$$

Отсюда следует, что

$$\psi(x,P) \in Ker[L(f), L(g)].$$

Так как, ядро ненулевого оператора конечномерно,то

$$[L(f), L(g)] = 0.$$

Далее выпишем явный вид функции Бейкера–Ахиезера.

Рассмотрим базис циклов a_l, b_l $(1 \leq l \leq g)$ на Γ с индексами пересечений

$$a_k \circ a_l = 0, \quad b_k \circ b_l = 0, \quad a_k \circ b_l = \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq g.$$

Обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_g$ нормированный базис абелевых дифференциалов

$$\int_{a_k} \omega_l = \delta_{kl}.$$

Тогда тэта–функция многообразия Якоби поверхности Γ

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \left\{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\right\}$$

задается рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i < \Omega n, n > + 2\pi i < n, z >}, \qquad z \in \mathbb{C}^g,$$

где $< n, z >= n_1 z_1 + \ldots + n_g z_g$, Ω — симметричная матрица с компонентами

$$\Omega_{kl} = \Omega_{lk} = \int_{a_k} \omega_l,$$

причем $Im\ \Omega > 0$.

Тэта–функция обладает свойством

$$\theta(z + \Omega m + n) = e^{-\pi i < \Omega m, m > - 2\pi i < m, z >} \theta(z), \quad m, n \in \mathbb{Z}^g.$$

Пусть ω — мероморфная 1–форма на Γ с единственным полюсом второго порядка в точке q, и нормированная условием

$$\int_{a_k} \omega = 0.$$

Пусть U — вектор b–периодов

$$U = \left(\int_{b_1} \omega, \dots, \int_{b_g} \omega \right).$$

Для фиксированной точки P_0 пусть $A(P) : \Gamma \to J(\Gamma)$ — отображение Абеля

$$A(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \dots, \int_{P_0}^{P} \omega_g \right).$$

Тогда на Γ определена функция

$$\zeta(x,P) = \frac{\theta(A(P) - A(\gamma_1) - \ldots - A(\gamma_g) - K_\Gamma + xU)}{\theta(A(P) - A(\gamma_1) - \ldots - A(\gamma_g) - K_\Gamma)} e^{2\pi i x \int_{P_0}^{P} \omega},$$

где K_Γ — вектор римановых констант. Функция ζ имеет простые полюса в $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ и в окрестности точки q имеет вид

$$\zeta = e^{kx} \left(\xi_0(x) + \frac{\xi_1(x)}{k} + \ldots \right).$$

Тогда, $\psi(x,P) = \frac{\zeta(x,P)}{\xi_0(x)}$ является функцией Бейкера–Ахиезера. Таким образом, совместные собственные функции операторов ранга один и их коэффициенты выражаются через тэта–функцию многообразия Якоби спектральной кривой.

Коммутирующие операторы ранга $l > 1$ классифицированы Кричевером И.М. [4]. Совместные собственные функции таких операторов отвечают спектральным данным Кричевера (см. гл.1 для $l = 2$), но найти в явном виде собственные функции не удается. Первые результаты об операторах ранга $l = 2$ получены Ж. Диксмье [5]. Им найдены примеры коммутирующих операторов ранга два порядков

4 и 6 с полиномиальными коэффициентами:

$$L_4=(\partial_x^2-x^3+\alpha)^2-2x,$$

$$L_6=(\partial_x^2-x^3-\alpha)^3-\frac{3}{2}(x(\partial_x^2-x^3-\alpha)+(\partial_x^2-x^3-\alpha)x).$$

Спектральная кривая пары L_4 и L_6 является эллиптической кривой, которая задается уравнением

$$w^2=z^3-\alpha.$$

Операторы Диксмье были первыми примерами нетривиальных коммутирующих элементов в первой алгебре Вейля.

В случае эллиптических спектральных кривых операторы ранга $l=2$ порядков 4 и 6 найдены И.М. Кривечером и С.П. Новиковым [6], причем оператор четвертого порядка имеет вид

$$L_4=(\partial_x^2+u)^2+2c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1))\partial_x+(c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1)))_x-\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1(x)=\gamma_0+c(x),\quad \gamma_2(x)=\gamma_0-c(x),$$

$$u(x)=-\frac{1}{4c_x^2}+\frac{1}{2}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2}+2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_{xx}-\frac{c_{xxx}}{2c_x}+c_x^2(\Phi_x(\gamma_0+c,\gamma_0-c)-\Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2)=\zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(\gamma_1)-\zeta(\gamma_2),$$

где $c(x)$ — произвольная гладкая функция, $\gamma_0\in\mathbb{C}$, $\wp(x)$, $\zeta(x)$ — функции Вейрштрасса. Оператор L_6 можно найти из уравнения

$$L_6^2=4(L_4)^3+g_2L_4+g_3.$$

Данные операторы изучались в [7]–[13]. При $g = 1$, $l = 3$ операторы найдены О.И. Моховым [14]. В [15]–[18] найдены некоторые примеры операторов ранга $l = 2$ и 3 при $g = 2, 3, 4$. До недавнего времени примеров коммутирующих операторов ранга $l > 1$, отвечающих спектральным кривым рода $g > 4$, не было известно.

В работе [19] изучались операторы ранга $l = 2$ в случае гиперэллиптических спектральных кривых произвольного рода g. Пусть L_4 и L_{4g+2} — пара коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающих гиперэллиптической спектральной кривой рода g

$$\Gamma : w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0,$$

с выделенной точкой $q = \infty$, тогда

$$L_4\psi = z\psi, \qquad L_{4g+2}\psi = w\psi.$$

Совместные собственные функции этих операторов удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка [6]

$$\psi^{''} = \chi_1(x, P)\psi^{'} + \chi_0(x, P)\psi, \quad P(z, w) \in \Gamma,$$

где χ_0 и χ_1 — рациональные функции на Γ. Оператор L_4 формально самосопряжен тогда и только тогда, когда

$$\chi_1(x, P) = \chi_1(x, \sigma(P)),$$

где $\sigma(z, w) = (z, -w)$ [19]. Напомним, что дифференциальным оператором, формально сопряженным к дифференциальному оператору

$$L=\partial_x^n+l_{n-1}(x)\partial_x^{n-1}+\ldots+l_1(x)\partial_x+l_0(x)$$

называется оператор

$$L^*=(-1)^n\partial_x^n+(-1)^{n-1}\partial_x^{n-1}l_{n-1}(x)+\ldots-\partial_x l_1(x)+l_0(x).$$

Оператор L называется формально самосопряженным, если $L=L^*$. Всюду далее формально самосопряженный оператор будем называть самосопряженным оператором.

Пусть L_4 самосопряжен, т.е. имеет вид

$$L_4=(\partial_x^2+V(x))^2+W(x).$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2 ([19]). *Имеют место равенства:*

$$\chi_0=-\frac{Q_{xx}}{2Q}+\frac{w}{Q}-V,\qquad \chi_1=\frac{Q_x}{Q},$$

где Q — полином по z степени g с коэффициентами, зависящими от x :

$$Q=z^g+\alpha_{g-1}(x)z^{g-1}+\ldots+\alpha_0(x).$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z)=4(z-W)Q^2-4V(Q_x)^2+(Q_{xx})^2-2Q_xQ_{xxx}$$

$$+2Q(2V_xQ_x+4VQ_{xx}+Q_{xxxx}). \qquad (1.1)$$

Следствие ([19])**.** *Полином Q удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$\partial_x^5 Q + 4VQ_{xxx} + 2Q_x(2z - 2W + V_{xx}) + 6V_xQ_{xx} - 2QW_x = 0. \quad (1.2)$$

В [19]–[20] с помощью теоремы 1.2 были построены примеры операторов

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 g(g+1),$$

$$L_4^\dagger = (\partial_x^2 + \alpha_1 \operatorname{ch}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)\operatorname{ch}(x),$$

коммутирующих с соответствующими операторами порядка $4g+2$ (другие примеры построены в [21],[1*],[3*]). Отметим, что при $g = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ операторы $L_4^\sharp$, $L_6^\sharp$ совпадают с операторами Диксмье [5]. Действия автоморфизмов первой алгебры Вейля на $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ изучались в [22]. С помощью замены координат и автоморфизмов первой алгебры Вейля И.О. Моховым [23] из операторов $L_4^\dagger$, $L_{4g+2}^\dagger$ получены примеры операторов ранга l.

Отметим, что коммутирующие дифференциальные операторы имеют приложения в солитонных уравнениях. Лакс заметил [24], что условие коммутации дифференциальных операторов

$$[L_2, \partial_t - A] = 0,$$

где

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x,t), \qquad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}u_x(x,t)$$

эквивалентно уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$4u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Это уравнение описывает солитоны (уединенные волны на мелководье). Важным классом решений уравнения КдФ являются конечнозонные решения. Эти решения выделяются дополнительным условием

$$[L_2, L_{2g+1}] = 0,$$

где L_{2g+1} — обыкновенный дифференциальный оператор нечетного порядка с коэффициентами, зависящими от x и t. Пара коммутирующих операторов L_2 и L_{2g+1} является операторами ранга 1.

Другим примером, где обыкновенные коммутирующие операторы играют важную роль, является уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4}U_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(U_t + \frac{3}{2}UU_x - \frac{1}{4}U_{xxx}).$$

Это уравнение допускает представление Захарова–Шабата

$$[\partial_t - \widetilde{A}, \partial_y - \widetilde{L}] = 0,$$

где

$$\widetilde{L} = \partial_x^2 + U(x,y,t), \qquad \widetilde{A} = \partial_x^3 + \frac{3}{2}U(x,y,t)\partial_x + P(x,y,t),$$

$P(x,y,t)$ — некоторая функция. Решения КП ранга l выделяются дополнительным условием, при котором операторы $(\partial_t - \widetilde{A})$ и $(\partial_y - \widetilde{L})$

коммутируют с элементами коммутативного кольца $\mathfrak{A}_l$ обыкновенных дифференциальных операторов ранга l

$$[L_n, \partial_t - \widetilde{A}] = 0, \qquad [L_n, \partial_y - \widetilde{L}] = 0,$$

где $L_n \in \mathfrak{A}_l$. Решения ранга один задаются известной формулой Кричевера

$$U(x, t, y) = 2\partial_x^2 \ln \theta(V_1 x + V_2 y + V_3 t + V_4) + const,$$

где V_i — некоторые векторы, θ — тэта–функция многообразия Якоби спектральной кривой. Решения КП ранга $l > 1$ в общем случае не найдены.

Целью диссертации является построение новых примеров коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, а также изучение коммутативных колец самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два и их деформаций, заданных солитонными уравнениями.

В работе получены следующие **основные результаты.**

1. Построены новые примеры коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов порядков 4 и $4g + 2$ ранга два.

2. Доказано, что некоторые уже известные пары коммутирующих дифференциальных операторов порядков 4 и $4g+2$ не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два (совместно с Э.И. Шамаевым).

3. Изучены деформации коммутативных колец самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Список литературы насчитывает 35 наименований. Общий объем диссертации составляет 59 страниц.

Первая глава посвящена построению и изучению коммутирующих дифференциальных операторов ранга два. В параграфе 1.1. напоминаются определение совместной собственной функции коммутирующих дифференциальных операторов (вектор–функция Бейкера–Ахиезера) и уравнения Кричевера–Новикова на параметры Тюрина. В параграфе 1.2. строятся новые примеры коммутирующих операторов порядков 4 и $4g+2$, отвечающих гиперэллиптическим кривым рода g.

Теорема 1.3 ([1*],[2*]). *Оператор*

$$L_4^{\natural} = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_1 e^x, \quad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с некоторым дифференциальным оператором $L_{4g+2}^{\natural}$ *порядка* $4g+2$. *Операторы* $L_4^{\natural}$, $L_{4g+2}^{\natural}$ *являются операторами ранга два.*

Вторая часть теоремы 1.3 (операторы $L_4^{\natural}$, $L_{4g+2}^{\natural}$ являются операторами ранга два) доказана в [2*] совместно с Э.И. Шамаевым.

Теорема 1.4 ([3*]). *Оператор*

$$L_4^\flat=\left(\partial_x^2+\frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x)+\alpha\cos(x)+\frac{(2g+1)^2-\alpha^2}{4}\right)^2$$

$$-g(g+1)(\alpha^2\cos^2(x)+2\alpha\cos(x)),\quad \alpha\neq 0$$

коммутирует с некоторым дифференциальным оператором $L_{4g+2}^\flat$ *порядка* $4g+2$. *Операторы* $L_4^\flat$, $L_{4g+2}^\flat$ *являются операторами ранга два.*

Спектральная кривая пары коммутирующих операторов $L_4^\flat$, $L_{4g+2}^\flat$ находится в следующей теореме.

Теорема 1.5 ([3*]). *Спектральная кривая операторов* $L_4^\flat$ *и* $L_{4g+2}^\flat$ *задается уравнением* $w^2=F_g(z)$, *где*

$$F_g(z)=zA_0(z)^2+\frac{1}{4}((1-\alpha^2-4g(g+1))A_1(z)^2+4A_2(z)^2-12A_1(z)A_3(z))+$$

$$+A_0(z)(\alpha A_1(z)+(4g(g+1)-3-\alpha^2)A_2(z)+12A_4(z)),$$

функции $A_i(z)$ *определены в формуле (1.7),* $F_g(z)$ *— полином степени* $2g+1$ *по* z.

Как уже отмечалось оператор

$$L_4^\sharp=(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2+\alpha_3g(g+1),$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\sharp$ [19], а также

$$L_4^\dagger=(\partial_x^2+\alpha_1\operatorname{ch}(x)+\alpha_0)^2+\alpha_1g(g+1)\operatorname{ch}(x)$$

коммутирует с оператором $L^{\dagger}_{4g+2}$ [20]. При этом для больших g не известно как устроены максимальные коммутативные кольца, содержащие $L^{\sharp}_4$, $L^{\sharp}_{4g+2}$ и $L^{\dagger}_4$, $L^{\dagger}_{4g+2}$. В следующих теоремах доказано, что эти операторы являются операторами ранга два.

Теорема 1.8 ([2*]). *Операторы $L^{\sharp}_4$, $L^{\sharp}_{4g+2}$ не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два.*

Теорема 1.9 ([2*]). *Операторы $L^{\dagger}_4$, $L^{\dagger}_{4g+2}$ не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два.*

Теоремы 1.8 и 1.9 получены совместно с Э.И. Шамаевым.

Во **второй главе** изучаются решения ранга два эволюционной системы уравнений

$$V_t = \frac{1}{4}(6VV_x + 6W_x + V_{xxx}), \quad W_t = \frac{1}{2}(-3VW_x - W_{xxx}).$$

Эта система эквивалентна условию коммутации самосопряженного оператора четвертого порядка и кососимметричного оператора третьего порядка

$$[L_4, \partial_t - A] = 0,$$

где

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x,t))^2 + W(x,t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x,t).$$

При этом мы предполагаем, что при каждом t оператор L_4 входит в коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2, $[L_4, L_{4g+2}] = 0$. Решения ранга один эволюционной системы (т.е. когда L_4 коммутирует с оператором нечетного порядка) были найдены Дринфельдом и Соколовым [25]. В параграфе 2.1. изучаются деформации коммутативных колец самосопряженных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями.

Теорема 2.1 ([4*]). *Предположим, что потенциалы V и W самосопряженного оператора $L_4 = (\partial_x^2+V(x,t))^2+W(x,t)$, коммутирующего с оператором L_{4g+2}, удовлетворяют системе эволюционных уравнений*

$$V_t = \frac{1}{4}(6VV_x + 6W_x + V_{xxx}), \quad W_t = \frac{1}{2}(-3VW_x - W_{xxx}).$$

Тогда полином Q, определенный по оператору L_4 (см. Теорему 1.2), удовлетворяет уравнению

$$Q_t = \frac{1}{2}\left(-3VQ_x - Q_{xxx}\right). \tag{2.3}$$

Отметим, что данное уравнение задает симметрии уравнения (1.1).

Замечание. *Аналогично можно получить эволюционное уравнение на Q, если в $[L_4, \partial_t - A] = 0$ заменить оператор A на кососимметричный оператор порядка $2n+1$. Например, при $n = 2, 3$ имеют место уравнения*

$$Q_{t_2} = \frac{1}{8}(-4QW_x+2V_xQ_{xx}+Q_x(8z-5V^2+2W-V_{xx})-2VQ_{xxx}), \tag{2.7}$$

$$Q_{t_3} = \frac{1}{32}(-14V^3Q_x - 2V(-6(2QW_x + V_xQ_{xx}) + Q_x(24z + 18W +$$

$$+5V_{xx})) - 6V^2Q_{xxx} + 2(6W_xQ_{xx} - (8z + 6W + V_{xx})Q_{xxx} + Q_{xx}V_{xxx} +$$

$$+4QW_{xxx}) - Q_x(7V_x^2 + 10W_{xx} + V_{xxxx})). \qquad (2.8)$$

Эти эволюционные уравнения также задают симметрию уравнения (1.1).

Сопоставим теорему 2.1 с аналогичными результатами для конечнозонных решений уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

Уравнение КдФ имеет представление Лакса

$$[\partial_x^2 + u(x,t), \partial_t - (\partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}u_x(x,t))] = 0.$$

Конечнозонные решения выделяются дополнительным условием

$$[\partial_x^2 + u(x,t), L_{2g+1}] = 0,$$

где L_{2g+1} — дифференциальный оператор порядка $2g+1$ с коэффициентами зависящими от t. Спектральная кривая пары L_2, L_{2g+1}, задается уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0.$$

При этом

$$\partial_x^2 + u(x,t) - z = (\partial_x + \chi)(\partial_x - \chi),$$

где

$$\chi = \frac{w}{2Q} + \frac{Q_x}{Q},$$

$$Q(x,t,z) = z^g + \alpha_{g-1}(x,t)z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(x,t).$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4Q^2(z-u) + Q_x^2 - 2QQ_{xx},$$

а также уравнению (см. [26])

$$Q_t = \frac{1}{2}(2z+u)Q_x - \frac{1}{2}Qu_x. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.3) является аналогом известного уравнения (2.17). В параграфе 2.2 показано, что уравнения (2.3), (2.7) и (2.8) в случае эллиптической спектральной кривой сводятся к уравнениям из иерархии Кричевера–Новикова. Здесь же построены некоторые автомодельные решения уравнений (2.3), (2.7) и (2.8) в случае эллиптической спектральной кривой.

Результаты диссертации докладывались на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И. А. Тайманова (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012, 2014, 2015); семинаре «Инварианты трехмерных многообразий» под руководством чл.–корр. РАН А. Ю. Веснина (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012); семинаре «Интегрируемые системы» под руководством д.ф.–м.н. А. Е. Миронова (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2013, 2014); семинаре лаборатории геометрической теории управления под руководством д.ф.–м.н., профессора А. А. Аграчева (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2013, 2014).

Результаты диссертации были представлены на Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2013); 44–ой Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2013); Международной конференции «Геометрия и анализ на метрических структурах» (Новосибирск, 2013); Международной молодежной конференции «Геометрия и управление» (Москва, 2014); Международной школе-конференции «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах» (Артыбаш, 2014);

Основные результаты диссертации опубликованы в семи печатных и электронных изданиях [1*] – [7*], четыре из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1*] – [4*], три — в тезисах докладов и материалах конференций [5*] – [7*]. Результаты работы [2*] получены в неразделимом соавторстве с Э.И. Шамаевым.

Глава 1

Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга два

1.1 Функция Бейкера–Ахиезера ранга 2

Совместной собственной функцией коммутирующих операторов L_n и L_m ранга 2 является функция Бейкера–Ахиезера [6]. Она строится по следующему набору спектральных данных

$$\left\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, \delta\right\},$$

где Γ — произвольная риманова поверхность рода g, q — выделенная точка на Γ, k^{-1} — локальный параметр в окрестности точки q, $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{2g}$ — дивизор, δ — множество векторов вида $(1, \delta_1), \ldots, (1, \delta_{2g})$.

Вектор–функцией Бейкера–Ахиезера называется функция $\psi = (\psi_0, \psi_1)$, такая что:

1. В окрестности q вектор–функция ψ имеет вид:

$$\psi(x,P) = \sum_{s=0}^{\infty}(\xi_s(x)k^{-s})\Psi(x,P),$$

   где $\xi_0 = (1,0)$. Матричная функция $\Psi(x,P)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = A\Psi,$$

   где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+\omega(x) & 0 \end{pmatrix},$$

   $\omega(x)$ — некоторая функция.

2. Компоненты ψ мероморфны на $\Gamma - \{q\}$ с простыми полюсами в $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$, при этом

$$Res_{\gamma_i}\psi_0 = \delta_i Res_{\gamma_i}\psi_1, \quad 1 \le i \le 2g.$$

Пара (γ, δ) называется параметрами Тюрина. Они определяют полустабильное голоморфное векторное расслоение ранга два на Γ степени $2g$ с набором η_1, η_2 голоморфных сечений, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ — точки их линейной зависимости $\eta_2(\gamma_i) = \delta_i\eta_1(\gamma_i)$.

Для мероморфных функций $f(P)$ и $g(P)$ с единственными полюсами в q существуют дифференциальные операторы L_f и L_g такие, что

$$L_f\psi = f(P)\psi, \quad L_g\psi = g(P)\psi,$$

при этом

$$[L_f, L_g] = 0.$$

В случае операторов ранга $l > 1$ совместную собственную функцию ψ нельзя найти явно. Тем не менее, Кричевером и Новиковым был предложен метод деформации параметров Тюрина [6], с помощью которого можно находить операторы ранга $l > 1$. Напомним его для нашего случая.

Пусть Φ — матрица Вронского

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ \psi_{0x} & \psi_{1x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим логарифмическую производную χ матрицы Φ

$$(\partial_x - \chi)\Phi = 0,$$

где

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы χ являются мероморфными функциями с $2g$ простыми полюсами $P_1(x), \dots, P_{2g}(x)$. В окрестности точки q справедливы разложения:

$$\chi_0(x, P) = k + \omega(x) + O(k^{-1}), \quad \chi_1(x, P) = O(k^{-1}).$$

Пусть $k-\gamma_i(x)$ — локальный параметр в окрестности $P_i(x)$. Тогда

$$\chi_s = \frac{c_{i,s}(x)}{k-\gamma_i(x)} + d_{i,s}(x) + O(k-\gamma_i(x)), \quad s=1,2.$$

Справедлива теорема

Теорема 1.1 ([6]). *Пусть* $\alpha_{i,0} = \frac{c_{i,0}(x)}{c_{i,1}(x)}$. *Тогда*

$$\partial_x \gamma_i = -c_{i,1}(x),$$

$$\partial_x \alpha_{i,0}(x) = -d_{i,0}(x) + \alpha_{i,0}(x)^2 + \alpha_{i,0}(x) d_{i,1}(x).$$

Чтобы найти операторы, достаточно решить уравнения из теоремы 1.1.

Кричевером и Новиковым [6] решены эти уравнения в случае эллиптической спектральной кривой, и найдены операторы ранга два порядков 4 и 6, при этом оператор четвертого порядка имеет вид

$$L_4 = (\partial_x^2+u)^2+2c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1))\partial_x+(c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1)))_x-\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1),$$

где

$$\gamma_1(x) = \gamma_0 + c(x), \quad \gamma_2(x) = \gamma_0 - c(x),$$

$$u(x) = -\frac{1}{4c_x^2}+\frac{1}{2}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2}+2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_{xx}-\frac{c_{xxx}}{2c_x}+c_x^2(\Phi_x(\gamma_0+c,\gamma_0-c)-\Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2) = \zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(\gamma_1)-\zeta(\gamma_2),$$

где $c(x)$ — произвольная гладкая функция, $\gamma_0 \in \mathbb{C}$, $\wp(x)$, $\zeta(x)$ — функции Вейрштрасса. Оператор L_6 можно найти из уравнения

$$L_6^2 = 4(L_4)^3 + g_2 L_4 + g_3.$$

Данный пример коммутирующих операторов изучил Гриневич [27] и сформулировал необходимое и достаточное условие, чтобы операторы L_4 и L_6 имели рациональные коэффициенты, а также выделил среди этих операторов операторы Диксмье.

1.2 Примеры коммутирующих формально самосопряженных дифференциальных операторов ранга два

Построим примеры коммутирующих операторов L_4 и L_{4g+2}, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой

$$\Gamma : w^2 = F_{2g+1}(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0,$$

используя метод, разработанный в [19]. Напомним его.

Совместная собственная функция ψ

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\psi'' - \chi_1(x,P)\psi' - \chi_0(x,P)\psi = 0, \quad P = (z,w) \in \Gamma,$$

где χ_0, χ_1 — рациональные функции на Γ с $2g$ простыми полюсами. На спектральной кривой Γ есть голоморфная инволюция σ, такая что $\sigma(z,w) = (z,-w)$. Оператор L_4 формально самосопряжен тогда и только тогда, когда выполнено тождество [19]

$$\chi_1(x,P)=\chi_1(x,\sigma P).$$

Предположим, что

$$L_4=L_4^*=(\partial_x^2+V(x))^2+W(x),$$

где V, W — некоторые функции, тогда

Теорема 1.2 ([19]). *Функции χ_0 и χ_1 имеют вид*

$$\chi_0=-\frac{Q_{xx}}{2Q}+\frac{w}{Q}-V,\qquad \chi_1=\frac{Q_x}{Q},$$

где Q — полином степени g по z

$$Q=z^g+\alpha_{g-1}(x)z^{g-1}+\ldots+\alpha_0(x),$$

$\alpha_i(x)$ — некоторые функции. И полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z)=4(z-W)Q^2-4V(Q_x)^2+(Q_{xx})^2-2Q_xQ_{xxx}+$$

$$+2Q(2V_xQ_x+4VQ_{xx}+Q_{xxxx}). \qquad (1.1)$$

Из теоремы следует

Следствие ([19]). *Полином Q удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$\partial_x^5Q+4VQ_{xxx}+2Q_x(2z-2W+V_{xx})+6V_xQ_{xx}-2QW_x=0. \qquad (1.2)$$

Используя уравнение (1.1), построим пары коммутирующих дифференциальных операторов порядков 4 и $4g+2$ с гладкими коэффициентами.

Теорема 1.3 ([1*],[2*]). *Оператор*

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_1 e^x, \quad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с некоторым дифференциальным оператором $L_{4g+2}^\natural$ *порядка* $4g+2$*. Операторы* $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ *являются операторами ранга два.*

Доказательство. Искомый оператор $L_{4g+2}^\natural$, коммутирующий с $L_4^\natural$, существует, если найдется полином $Q(x,z)$, удовлетворяющий (1.2). Будем искать решение уравнения (1.2) в виде

$$Q(x,z) = A_g(z)e^{gx} + A_{(g-1)}(z)e^{(g-1)x} + \ldots + A_0(z). \tag{1.3}$$

Считаем, что $A_s(z) = 0$ при $s > 2g$, и $A_s(z) = 0$ при $s < 0$.

Пусть

$$V(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_0, \quad W(x) = g(g+1)\alpha_1 e^x.$$

При подстановке V, W и (1.3) в (1.2) получаем

$$B_g(z)e^{gx} + \ldots + B_1(z)e^x = 0, \tag{1.4}$$

где

$$B_s(z) = -2\alpha_1 A_{s-1}(z)(2s-1)(g^2+g-s^2+s) + A_s(z)s(4\alpha_0 s^2 + s^4 + 4z).$$

Отметим, что, в силу выбора V и W, в (1.3) не содержится слагаемых вида $B_0(z)$ и $B_{g+1}(z)e^{(g+1)x}$. Из уравнений

$$B_1(z) = \ldots = B_g(z) = 0$$

находим

$$A_{s-1}(z) = -\frac{A_s(z)s(4\alpha_0 s^2 + s^4 + 4z)}{2\alpha_1(2s-1)(g^2+g-s^2+s)}, \quad 1 \le s \le g.$$

Таким образом, мы выражаем $A_0, \ldots, A_{g-1}$ через A_g. Выбрав в качестве A_g подходящую константу, а именно

$$A_g = \alpha_1^g \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2g-1)^2,$$

мы получаем решение Q уравнения (1.2) (а следовательно, и (1.1)), где Q — полином степени g по z. Мы показали, что операторы $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ коммутируют. Ниже в теореме 1.6 мы покажем, что эти операторы не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два. Первая часть теоремы 1.3 доказана. $\square$

Укажем уравнения спектральных кривых, а также операторы, коммутирующие с $L_4^\natural$, при $g = 1, 2$.

Примеры.

1. Пусть $g = 1$. Тогда

$$Q(x,z) = z - \alpha_1 e^x + \alpha_0 + \frac{1}{4},$$

$$\Gamma : F_1(z) = \frac{1}{16} z(4z + 1 + 4\alpha_0)^2,$$

$$L_6^\natural = \partial_x^6+3\alpha_1 e^x\partial_x^4+(\alpha_1(10+3\alpha_1 e^x)e^x+\frac{1}{4}+\alpha_0-2\alpha_0^2)\partial_x^2+\alpha_1(6\alpha_1 e^x+7)\partial_x+$$
$$+\frac{1}{4}\alpha_1 e^x(4\alpha_1^2 e^{2x}+32\alpha_1 e^x+15-8\alpha_0-12\alpha_0^2).$$

2. Пусть $g=2$. Тогда

$$Q(x,z)=z^2+\frac{1}{4}(20\alpha_0-12\alpha_1 e^x+17)z+1+4\alpha_0^2-12\alpha_1 e^x+9\alpha_1^2 e^{2x}+\alpha_0(5-12\alpha_1 e^x),$$
$$\Gamma : F_2(z)=\frac{1}{16}z(4+z+4\alpha_0)^2(1+4z+4\alpha_0)^2.$$

Из-за громоздкости формул мы приведем оператор L_{10}, коммутирующий с L_4, только при $\alpha_0=0$

$$L_{10}=\partial_x^{10}+5\alpha_1 e^x\partial_x^8+20\alpha_1 e^x\partial_x^7+(\frac{17}{4}+5\alpha_1(13+2\alpha_1 e^x)e^x)\partial_x^6+$$
$$+5\alpha_1(25+12\alpha_1 e^x)e^x\partial_x^5+\frac{5}{4}\alpha_1(157+188\alpha_1 e^x+8\alpha_1^2 e^{2x})e^x\partial_x^4+\frac{5}{2}\alpha_1(83+$$
$$+216\alpha_1 e^x+24\alpha_1^2 e^{2x})e^x\partial_x^3+\frac{1}{4}(4+745\alpha_1 e^x+3475\alpha_1^2 e^{2x}+860\alpha_1^3 e^{3x}+$$
$$+20\alpha_1^4 e^{4x})\partial_x^2+\frac{5}{2}\alpha_1(40+327\alpha_1 e^x+150\alpha_1^2 e^{2x}+8\alpha_1^3 e^{3x})e^x\partial_x+$$
$$+\frac{1}{4}\alpha_1(175+1865\alpha_1 e^x+1475\alpha_1^2 e^{2x}+180\alpha_1^3 e^{3x}+4\alpha_1^4 e^{4x})e^x.$$

Отметим, что в этих примерах спектральная кривая — это сфера с двойными точками. По-видимому это верно для любого g.

Далее построим следующий пример пары коммутирующих операторов порядка 4 и $4g+2$ с тригонометрическими коэффициентами.

Теорема 1.4 ([3*]). *Оператор*

$$L_4^\flat=\left(\partial_x^2+\frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x)+\alpha\cos(x)+\frac{(2g+1)^2-\alpha^2}{4}\right)^2-$$
$$-g(g+1)(\alpha^2\cos^2(x)+2\alpha\cos(x)),\quad \alpha\neq 0$$

коммутирует с некоторым оператором $L_{4g+2}^{\flat}$ *порядка* $4g+2$. *Операторы* $L_4^{\flat}$, $L_{4g+2}^{\flat}$ *являются операторами ранга два.*

Доказательство. Пусть

$$V(x) = \frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x) + \alpha\cos(x) + \frac{(2g+1)^2-\alpha^2}{4},$$

$$W(x) = -g(g+1)\left(\alpha^2\cos^2(x) + 2\alpha\cos(x)\right).$$

Будем искать Q в виде

$$Q(x,z) = A_{2g}(z)\cos^{2g}(x) + \ldots + A_1(z)\cos(x) + A_0(z).$$

Полагаем $A_s(z) = 0$ при $s > 2g$ и $A_s(z) = 0$ при $s < 0$. Тогда (1.2) примет вид

$$-\sin(x)\left(B_{2g}(z)\cos^{2g}(x) + \ldots + B_1(z)\cos(x) + B_0(z)\right) = 0, \qquad (1.5)$$

где

$$B_{s+1}(z) = -(s+1)(-4g(g+1) + s(s+2))\alpha^2 A_s(z) +$$

$$+2\alpha(2s+3)(2g(g+1) - (s+1)(s+2))A_{s+1}(z) +$$

$$+((s+2)^3(3 - 4g(g+1) + s(s+4) + 2\alpha^2) + 4(s+2)z)A_{s+2}(z) +$$

$$+2\alpha(2s+5)(s+2)(s+3)A_{s+3}(z) +$$

$$+(s+2)(s+3)(s+4)(4g(g+1) - 2(s+3)^2 - \alpha^2 - 1)A_{s+4}(z) +$$

$$+(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)A_{s+6}(z) \qquad (1.6)$$

при $-1 \le s \le 2g-1$.

Из условия $B_{s+1}(z)=0$ при $0\le s\le 2g-1$ вычислим коэффициенты полинома Q с помощью рекуррентной формулы

$$A_s(z)=\frac{1}{(s+1)(4g(g+1)-s(s+2))\alpha^2}\times$$

$$\times\Big(2\alpha(2s+3)(-2g(g+1)+(s+1)(s+2))A_{s+1}(z)+$$

$$+((s+2)^3(-3+4g(g+1)-s(s+4)-2\alpha^2)-4(s+2)z)A_{s+2}(z)-$$

$$-2\alpha(2s+5)(s+2)(s+3)A_{s+3}(z)-$$

$$-(s+2)(s+3)(s+4)(4g(g+1)-2(s+3)^2-\alpha^2-1)A_{s+4}(z)-$$

$$-(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)A_{s+6}(z)\Big). \qquad (1.7)$$

Докажем по индукции, что из (1.7) следует

$$A_{2i-1}(z)=\frac{2iA_{2i}(z)}{\alpha},\quad 1\le i\le g. \qquad (1.8)$$

При $i=g$ формула (1.8) следует из (1.7). Предположим, что формула (1.8) верна для $g\ge i\ge s+1$. Докажем (1.8) для $s\ge i\ge 1$. По рекуррентному соотношению (1.7) и предположению индукции при $i\ge s+1$ имеем

$$A_{2s}=\frac{(s+1)}{(2s+1)(s(s+1)-g(g+1))\alpha_1^2}\Big(2(s+2)(s+3)(2s+3)(2s+5)A_{2s+6}-$$

$$-(2s+3)(s+2)(9-4g(g+1)+8s(s+2)+\alpha_1^2)A_{2s+4}+$$

$$+2((s+1)(s(2s+1)^2+2(s+1)\alpha_1^2)+z-g(g+1)(2s+1)^2)A_{2s+2}\Big),$$

$$A_{2s-1}=\frac{2s(s+1)}{(2s+1)(s(s+1)-g(g+1))\alpha_1^3}\Big(2(s+2)(s+3)(2s+3)(2s+5)A_{2s+6}-$$

$$-(2s+3)(s+2)(9-4g(g+1)+8s(s+2)+\alpha_1^2)A_{2s+4}-$$

$$-2((s+1)(s(2s+1)^2+2(s+1)\alpha_1^2)+z-g(g+1)(2s+1)^2)A_{2s+2}\Big).$$

Отсюда следует, что формула (1.8) верна при всех i, $1 \le i \le g$.

Рассмотрим оставшийся коэффициент в (1.5) при $s=-1$

$$B_0 = -4g(g+1)\alpha A_0(z) + (4g(g+1)-2(\alpha^2+2z))A_1(z) - 12\alpha A_2(z) -$$

$$-6(4g(g+1)-9-\alpha^2)A_3(z) - 120A_5(z). \tag{1.9}$$

Выразим коэффициенты A_1, A_3 и A_5 через A_2, A_4 и A_6 с помощью формулы (1.8), а коэффициент A_0 через A_1, A_2, A_3, A_4 и A_6 с помощью формулы (1.7). Получим равенство $B_0(z)=0$.

Пусть $A_{2g}(z) = (-1)^g\alpha^{2g}3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2g-1)^2$. Тогда построенный полином $Q(x,z)$ является полиномом степени g по z и удовлетворяет (1.2). Таким образом, мы доказали, что операторы $L_4^\flat$, $L_{4g+2}^\flat$ коммутируют. В теореме 1.7 мы докажем, что эти операторы не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два. Первая часть теоремы 1.4 доказана. $\square$

Выпишем уравнение спектральной кривой пары коммутирующих операторов $L_4^\flat$ и $L_{4g+2}^\flat$.

Теорема 1.5 ([3*]). *Спектральная кривая операторов $L_4^\flat$ и $L_{4g+2}^\flat$ задается уравнением $w^2=F_g(z)$, где*

$$F_g(z) = zA_0(z)^2 + \frac{1}{4}((1-\alpha^2-4g(g+1))A_1(z)^2 + 4A_2(z)^2 - 12A_1(z)A_3(z)) +$$

$$+A_0(z)(\alpha A_1(z)+(4g(g+1)-3-\alpha^2)A_2(z)+12A_4(z)),$$

функции $A_i(z)$ *определены в формуле (1.7),* $F_g(z)$ *— полином степени* $2g+1$ *по* z.

Доказательство. Заметим, что правая часть (1.1) содержит производные полинома Q не более четвертого порядка. Поэтому при подстановке $x=\pi/2$ на левую часть в (1.1) влияют только последние пять слагаемых в Q, т.е.

$$F_g(z)=\frac{1}{4}(4(z-W)\tilde{Q}^2-4V(\tilde{Q}_x)^2++(\tilde{Q}_{xx})^2-2\tilde{Q}_x\tilde{Q}_{xxx}+$$

$$+2\tilde{Q}(2V_x\tilde{Q}_x+4V\tilde{Q}_{xx}+\tilde{Q}_{xxxx}))\,|_{x=\pi/2},$$

где

$$\tilde{Q}=A_4(z)\cos^4(x)+A_3(z)\cos^3(x)+A_2(z)\cos^2(x)+A_1(z)\cos(x)+A_0(z).$$

Отсюда получаем

$$F_g(z)=zA_0(z)^2+\frac{1}{4}((1-\alpha^2-4g(g+1))A_1(z)^2+4A_2(z)^2-12A_1(z)A_3(z))+$$

$$+A_0(z)(\alpha A_1(z)+(4g(g+1)-3-\alpha^2)A_2(z)+12A_4(z)).$$

Теорема 1.5 доказана. □

Укажем примеры операторов, коммутирующих с $L_4^\flat$, и уравнения соответствующих спектральных кривых при $g=1$.

Пример.

Пусть $g=1$. Тогда

$$Q(x,z)=z-\alpha^2\cos^2(x)-2\alpha\cos(x)+2\alpha^2-2,$$

$$\Gamma: \ F_1(z) = z^3 + 4(\alpha^2-1)z^2 + (5\alpha^4 - 15\alpha^2 - 4)z + 7\alpha^2 - 14\alpha^4 + 2\alpha^6,$$

$$L_6^\flat = \partial_x^6 + \frac{3\alpha}{4}\cos(x)(\alpha\cos(x)+4)\partial_x^4 - 3\alpha\sin(x)(2+\alpha\cos(x))\partial_x^3 +$$
$$+\Big(\frac{3\alpha^4}{16}\cos^4(x) + \frac{3\alpha^3}{2}\cos^3(x) - 7\alpha^2\cos^2(x) + \frac{-275+142\alpha^2-3\alpha^4}{16}\Big)\partial_x^2 +$$
$$+\sin(x)\Big(-\frac{3\alpha^4}{4}\cos^3(x) - \frac{9\alpha^3}{2}\cos^2(x) + 8\alpha^2\cos(x) + 10\alpha\Big)\partial_x +$$
$$+\frac{\alpha^6}{64}\cos^6(x) + \frac{3\alpha^5}{16}\cos^5(x) - \frac{5\alpha^4}{4}\cos^4(x) - \frac{37\alpha^3}{4}\cos^3(x) +$$
$$+\frac{349\alpha^2 + 94\alpha^4 - 3\alpha^6}{64}\cos^2(x) + \frac{37\alpha + 118\alpha^3 - 3\alpha^5}{16}\cos(x).$$

Теперь докажем, что построенные нами пары коммутирующих операторов

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_1 e^x, \quad L_{4g+2}^\natural,$$

а также

$$L_4^\flat = \left(\partial_x^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\cos^2(x) + \alpha\cos(x) + \frac{(2g+1)^2-\alpha^2}{4}\right)^2 -$$
$$-g(g+1)(\alpha^2\cos^2(x) + 2\alpha\cos(x)), \quad L_{4g+2}^\flat$$

имеют ранг два, т.е. не коммутируют с операторами нечетного порядка.

Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 3 ([2*]). *Пусть даны операторы*

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x),$$

$$L_n = a_n\partial_x^n + a_{n-1}\partial_x^{n-1} + \ldots + a_1\partial_x + a_0, \quad a_i = a_i(x).$$

Их коммутатором является оператор порядка $n+3$

$$[L_n, L_4] = b_{n+3}\partial_x^{n+3} + b_{n+2}\partial_x^{n+2} + \ldots + b_1\partial_x + b_0, \quad b_i = b_i(x),$$

коэффициенты которого заданы формулами

$$b_{m+3} = -4a'_m - 6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} -$$

$$-2Va_{m+1} - 4Va'_{m+2} - 2Va''_{m+3} + 2\sum_{s=m+1}^{n} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} V -$$

$$-2V'a_{m+2} - 2V'a'_{m+3} + 2\sum_{s=m+2}^{n} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} V -$$

$$-(V^2 + W + V'')a_{m+3} + \sum_{s=m+3}^{n} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}(V^2 + W + V''), \quad (1.10)$$

где $-3 \leqslant m \leqslant n$. *Полагаем* $a_s = 0$ *при* $s < 0$ *и* $a_s = 0$ *при* $s > n$, $C_q^p = \frac{q!}{(q-p)!p!}$ *при* $p \geqslant 0$ *и* $C_q^p = 0$ *при* $p < 0$.

Лемма доказывается прямыми вычислениями.

Если $[L_n, L_4] = 0$, то из (1.10) следует, что a_n, a_{n-1} — константы. Всюду в дальнейшем будем считать, что $a_n = 1$, a_{n-1} обозначим через λ.

Справедлива следующая

Теорема 1.6 ([2*]). *Оператор* $L_4^\natural$ *не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Доказательство. Предположим, что существует оператор

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \lambda\partial_x^{2k} + a_{2k-1}\partial_x^{2k-1} + \ldots + a_1\partial_x + a_0,$$

коммутирующий с $L_4^\natural = (\partial_x^2+\alpha_1 e^x+\alpha_0)^2+\alpha_1 g(g+1)e^x$. В этом случае формула (1.10) при $m=0,\dots,2k-1$ дает

$$4a'_m = -6a''_{m+1}-4a'''_{m+2}-a''''_{m+3}+(\alpha_1 e^x+\alpha_0)(-4a'_{m+2}-2a''_{m+3})+$$
$$+2\alpha_1\sum_{s=m+2}^{2k+1}C_s^{m+1}e^x a_s+\alpha_1 e^x(-2a_{m+2}-2a'_{m+3})+2\alpha_1\sum_{s=m+2}^{2k+1}C_s^{m+2}e^x a_s+$$
$$+\alpha_1\sum_{s=m+4}^{2k+1}C_s^{m+3}a_s\partial_x^{s-m-3}\Big(\alpha_1 e^{2x}+\big(2\alpha_0+g(g+1)+1\big)e^x\Big). \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что коэффициенты a_s — многочлены по e^x. Также из формулы (1.11) следует, что коэффициенты $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s=1,\dots,k$ являются полиномами по e^x степени s, более того, при $s=1,\dots,k$,

$$a_{2k+1-2s}=\frac{\alpha_1^s}{2^s s!}\Big(\prod_{i=0}^{s-1}(2k+1-2i)\Big)e^{sx}+\dots, \quad (1.12)$$

и

$$a_{2k-2s}=\frac{\alpha_1^s}{2\cdot 2^s s!}\Big(s\prod_{i=0}^{s}(2k+1-2i)+2\lambda\prod_{i=1}^{s}(2k+2-2i)\Big)e^{sx}+\dots. \quad (1.13)$$

При $m=-3$ формула (1.10) дает

$$b_0=-a''''_0-2(\alpha_1 e^x+\alpha_0)a''_0-2\alpha_1 e^x a'_0+$$
$$+\alpha_1\sum_{s=1}^{2k+1}\Big(2^s\alpha_1 e^{2x}+\big(2\alpha_0+g(g+1)+1\big)e^x\Big)a_s.$$

Из (1.12) и (1.13) следует, что b_0 является полиномом по e^x степени $k+2$, точнее

$$b_0=\frac{\alpha_1^{k+2}}{2^{k-1}k!}\Big(\prod_{i=0}^{k-1}(2k+1-2i)\Big)e^{(k+2)x}+\dots.$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$. Поэтому $L_4^\natural$ и L_{2k+1} не коммутируют. Теорема 1.6 доказана. $\square$

Таким образом, мы доказали, что пара операторов $L_4^\natural$ и $L_{4g+2}^\natural$ имеет ранг два.

Аналогично доказывается, что пара коммутирующих операторов $L_4^\flat$ и $L_{4g+2}^\flat$ является операторами ранга 2.

Теорема 1.7 ([3*]). *Оператор $L_4^\flat$ не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Доказательство. Предположим, что существует обыкновенный дифференциальный оператор нечетного порядка

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \lambda\partial_x^{2k} + a_{2k-1}(x)\partial_x^{2k-1} + \ldots + a_1(x)\partial_x^1 + a_0(x), \quad a_i = a_i(x),$$

такой что $[L_{2k+1}, L_4] = 0$. Тогда по формуле (1.10) вычислим $a_{2k-1}, \ldots, a_0$

$$4a_m' = 6a_{m+1}'' - 4a_{m+2}''' - a_{m+3}'''' - 4V(x)a_{m+2}' - 2V(x)a_{m+3}'' +$$
$$+2\sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1} V(x) - 2V'(x)a_{m+3}' + 2\sum_{s=m+3}^{2k+1} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} V(x) +$$
$$+\sum_{s=m+4}^{2k+1} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}\left(V^2(x) + W(x) + V''(x)\right), \quad 0 \leq m \leq 2k-1.$$

Коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ являются тригонометрическими полиномами, а именно, при $s = 1, \ldots, k$

$$a_{2k-2s} = \frac{\lambda k! \alpha^{2s}}{2^{2s} s!(k-s)!}\cos^{2s}(x) -$$
$$-\frac{\alpha^{2s}\prod_{i=0}^{s}(2k-(2i-1))}{2^{3s}(s-1)!}\cos^{2s-1}(x)\sin(x) + \ldots, \qquad (1.14)$$

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha^{2s}\prod_{i=0}^{s-1}(2k-(2i-1))}{s!2^{3s}}\cos^{2s}(x)+\dots. \qquad (1.15)$$

При $m=-3$ формула (1.10) примет вид

$$b_0 = -a_0'''' - 2V(x)a_0'' - 2V'(x)a_0' + a_1\partial_x(V(x)^2+W(x)+V''(x)) +$$
$$+\sum_{s=2}^{2k+1}\partial_x^s(V^2+W+V'').$$

Тогда из (1.14) и (1.15) следует, что b_0 является полиномом по косинусам и синусам степени $2k+3$

$$b_0 = -\frac{\alpha^{2k+4}\prod_{i=0}^{k-1}(2k-(2i-1))}{2^{3k+2}k!}\cos^{2k+3}(x)\sin(x)+\dots.$$

Таким образом, $b_0\neq 0$, и следовательно, $[L_{2k+1},L_4]\neq 0$. Таким образом, теорема 1.7 доказана. □

Как уже отмечалось оператор

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2+\alpha_3g(g+1),$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\sharp$ [19], а также

$$L_4^\dagger = (\partial_x^2+\alpha_1\operatorname{ch}(x)+\alpha_0)^2+\alpha_1g(g+1)\operatorname{ch}(x)$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\dagger$ [20]. При этом не известно как устроены максимальные коммутативные кольца, содержащие $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ и $L_4^\dagger$, $L_{4g+2}^\dagger$. Докажем, что эти операторы ранга два.

Теорема 1.8 ([2*]). *Оператор $L_4^\sharp$ не коммутирует с оператором нечетного порядка.*

Доказательство. Допустим, что существует дифференциальный оператор нечетного порядка

$$L_{2k+1} = \partial_x^{2k+1} + \lambda \partial_x^{2k} + a_{2k-1}\partial_x^{2k-1} + \ldots + a_1\partial_x + a_0,$$

коммутирующий с $L_4^\sharp$. Тогда формула (1.10) при $m = 0, \ldots, 2k-1$ дает

$$\begin{gathered}
4a'_m = -6a''_{m+1} - 4a'''_{m+2} - a''''_{m+3} + \\
+(\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(-2a_{m+1} - 4a'_{m+2} - 2a''_{m+3}) + \\
+2\sum_{s=m+1}^{m+4} C_s^{m+1} a_s \partial_x^{s-m-1}(\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + \\
+2(3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1)(-a_{m+2} - a'_{m+3}) + \\
+2\sum_{s=m+2}^{m+4} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1}(\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + \\
+\sum_{s=m+4}^{m+9} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3}\Big(\alpha_3\big(g(g+1)+6\big)x + (\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2\Big).
\end{gathered} \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, что коэффициенты a_s являются полиномами по x. По индукции с помощью формулы (1.16) доказывается, что коэффициенты $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s = 1, \ldots, k$ являются полиномами степени $3s$, более того,

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha_3^s}{2^s s!}\Big(\prod_{i=0}^{s-1}(2k+1-2i)\Big)x^{3s} + \ldots, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{1.17}$$

и

$$a_{2k-2s} = \lambda \alpha_3^s C_k^s x^{3s} + \ldots, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{1.18}$$

При $m=-3$ формула (1.10) дает

$$b_0=-a_0''''-2(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)a_0''-2(3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1)a_0'+$$
$$+\sum_{s=1}^{6}a_s\partial_x^s\Big(\big(\alpha_3g(g+1)+6\alpha_3\big)x+(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2\Big).$$

Из (1.17) и (1.18) следует, что b_0 является полиномом степени $3k+5$, точнее

$$b_0=6\frac{\alpha_3^{k+2}}{2^kk!}\Big(\prod_{i=0}^{k-1}(2k+1-2i)\Big)x^{3k+5}+\dots.$$

Таким образом, мы доказали, что $b_0\neq 0$, следовательно, L_{2k+1} и $L_4^\sharp$ не коммутируют. Теорема 1.8 доказана. $\Box$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.9 ([2*]). *Операторы $L_4^\dagger$, $L_{4g+2}^\dagger$ не коммутируют с операторами нечетного порядка, т.е. являются операторами ранга два.*

Доказательство. Предположим, что существует дифференциальный оператор нечетного порядка

$$L_{2k+1}=\partial_x^{2k+1}+\lambda\partial_x^{2k}+a_{2k-1}\partial_x^{2k-1}+\ldots+a_1\partial_x+a_0,$$

коммутирующий с $L_4^\dagger$. Из (1.10) при $m=0,\ldots,2k-1$ следует, что

$$4a_m'=-6a_{m+1}''-4a_{m+2}'''-a_{m+3}''''(\alpha_1\operatorname{ch}x+\alpha_0)(-4a_{m+2}'-2a_{m+3}'')+$$
$$+2\alpha_1\sum_{s=m+2}^{2k+1}C_s^{m+1}a_s\partial_x^{s-m-1}\operatorname{ch}(x)+$$

$$+2\alpha_1 \operatorname{sh}(x)(-a_{m+2} - a'_{m+3}) + 2\alpha_1 \sum_{s=m+2}^{2k+1} C_s^{m+2} a_s \partial_x^{s-m-1} \operatorname{ch}(x) +$$

$$+\alpha_1 \sum_{s=m+4}^{2k+1} C_s^{m+3} a_s \partial_x^{s-m-3} \Big(\alpha_1 \operatorname{ch}^2(x) + \big(2\alpha_0 + g(g+1) + 1\big) \operatorname{ch}(x)\Big). \tag{1.19}$$

Из (1.19) вытекает, что a_s — полином по e^x и e^{-x}. Из (1.19) следует, что $a_{2k+1-2s}$ и a_{2k-2s} при $s = 1, \ldots, k$ являются полиномами по e^x степени s, более того,

$$a_{2k+1-2s} = \frac{\alpha_1^s}{4^s s!} \Big(\prod_{i=0}^{s-1} (2k + 1 - 2i) \Big) e^{sx} + \ldots \tag{1.20}$$

и

$$a_{2k-2s} = \frac{\alpha_1^s}{2 \cdot 4^s s!} \Big(s \prod_{i=0}^{s} (2k+1-2i) + 2\lambda \prod_{i=1}^{s} (2k+2-2i) \Big) e^{sx} + \ldots. \tag{1.21}$$

При $m = -3$ формула (1.10) принимает вид

$$b_0 = -a_0'''' - (\alpha_1(e^x + e^{-x}) + 2\alpha_0) a_0'' - \alpha_1(e^x - e^{-x}) a_0' +$$

$$+\alpha_1 \sum_{s=1}^{2k+1} \Big(2^{s-2} \alpha_1 \big(e^{2x} + (-1)^s e^{-2x}\big) + \frac{1}{2} \big(2\alpha_0 + g(g+1) + 1\big) \big(e^x + (-1)^s e^{-x}\big) \Big) a_s.$$

Из (1.20) и (1.21) следует, что b_0 является полиномом по e^x степени $k + 2$, точнее,

$$b_0 = \frac{\alpha_1^{k+2}}{k! 2^{2k+1}} \Big(\prod_{i=0}^{k-1} (2k + 1 - 2i) \Big) e^{(k+2)x} + \ldots.$$

Таким образом, $b_0 \neq 0$, следовательно, L_{2k+1} и $L_4^\dagger$ не коммутируют. Теорема 1.9 доказана. $\square$

Глава 2

Деформации коммутативных колец самосопряженных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями

В этой главе мы исследуем уравнения коммутации

$$[L_4, \partial_{t_n} - A_{2n+1}] = 0,$$

где L_4 самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x, t_n))^2 + W(x, t_n),$$

A_n — кососимметричный оператор порядка $2n+1$,

$$-A_n^* = A_n = \partial_x^{2n+1} + a_{2n-1}(x, t_n)\partial_x^{2n-1} + a_{2n-2}(x, t_n)\partial_x^{2n-2} + \ldots + a_0(x, t_n).$$

При этом мы предполагаем, что при каждом t_n оператор L_4 входит в коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2, т.е. все операторы, коммутирующие с L_4, имеют четный порядок. По-другому это означает, что размерность пространства совместных собственных функций L_4 и коммутирующего с ним оператора L_{4g+2} при фиксированных общих собственных числах z, w равна двум:

$$dim_{\mathbb{C}} \{\psi : L_4\psi = z\psi, L_{4g+2}\psi = w\psi\} = 2.$$

Отметим, что если $n = 1$, тогда

$$[L_4, \partial_t - A] = 0,$$

где

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x,t))^2 + W(x,t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x,t)$$

эквивалентно системе эволюционных уравнений

$$V_t = \frac{1}{4}(6VV_x + 6W_x + V_{xxx}), \quad W_t = \frac{1}{2}(-3VW_x - W_{xxx}). \qquad (2.1)$$

Эта система является обобщением уравнения КдФ. Если $W = 0$, то V удовлетворяет КдФ.

Всюду далее, если $n = 1$, индекс у t_1 будем опускать.

2.1 Коммутирующие операторы ранга два и эволюционные уравнения

Пусть $\psi = (\psi_0(x,t), \psi_1(x,t))$ — совместная собственная функция попарно коммутирующих операторов L_4, L_{4g+2} и $\partial_t - A$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad (\partial_t - A)\psi = 0,$$

где

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x,t))^2 + W(x,t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x,t).$$

Точка $P = P(z,w)$ принадлежит гиперэллиптической спектральной кривой рода g

$$\Gamma : w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0.$$

Обозначим через Φ матрицу Вронского

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ \psi_{0x} & \psi_{1x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{pmatrix},$$

такие что

$$(\partial_x - \chi)\Phi = 0, \quad (\partial_t - \Sigma)\Phi = 0.$$

Компоненты матриц χ и Σ удовлетворяют уравнениям Кричевера–Новикова.

Напомним, что компоненты матрицы χ имеют следующий вид ([19])

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где Q — некоторый полином по z степени g :

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x,t)z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(x,t),$$

удовлетворяющий уравнению

$$4F_g(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx}$$
$$+2Q(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}). \qquad (2.2)$$

Здесь, в отличие от уравнения (1.1) главы 1, функции V, W и Q зависят от x и t.

Верна следующая

Теорема 2.1 ([4*])**.** *Предположим, что потенциалы V и W самосопряженного оператора $L_4 = (\partial_x^2 + V(x,t))^2 + W(x,t)$, коммутирующего с оператором L_{4g+2}, удовлетворяют системе (2.1). Тогда полином Q, удовлетворяет уравнению*

$$Q_t = \frac{1}{2}\left(-3VQ_x - Q_{xxx}\right). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Для оператора L_4, входящего в

$$[L_4, \partial_t - A] = 0,$$

справедливо разложение (см. [19])

$$L_4 - z = (\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_3)(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0),$$

где

$$\chi_3 = \chi_0 + \chi_1^2 + 2(V + \chi_{1x}).$$

Совместная собственная функция ψ, удовлетворяющая уравнениям

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi,$$

$$(\partial_t - A)\psi = 0, \tag{2.4}$$

удовлетворяет также уравнениям

$$\partial_x^2\psi = \chi_1\partial_x\psi + \chi_0\psi, \tag{2.5}$$

$$\partial_t\psi = \Sigma_2\partial_x\psi + \Sigma_1\psi, \tag{2.6}$$

где Σ_1, Σ_2 — компоненты логарифмической производной матрицы Вронского. Найдем Σ_1 и Σ_2. Для этого в (2.4) понизим порядок производных по x функции ψ с помощью (2.5). Это дает

$$\Sigma_1 = \frac{QV_x + 2(2VQ_x + Q_{xxx})}{4Q}, \quad \Sigma_2 = \frac{-2QV - 4w - 2Q_{xx}}{4Q}.$$

Теперь из (2.6) находим оставшиеся компоненты матрицы Σ

$$\partial_t\psi_x = \Sigma_3\psi + \Sigma_4\psi_x,$$

$$\Sigma_3 = \frac{V(2w - Q_{xx}) + Q(-4z + 2V^2 + 4W + V_{xx})}{4Q},$$

$$\Sigma_4 = \frac{2QVQ_x - Q^2V_x}{4Q^2}.$$

Используя уравнения (2.2) и (2.1), из совместности (2.5) и (2.6) приходим к уравнению (2.3). Теорема 2.1 доказана. $\square$

Таким образом, мы нашли динамику полинома Q по времени при условии, что потенциалы V и W удовлетворяют эволюционной системе (2.1). Непосредственными вычислениями легко проверить, что уравнение (2.3) задает симметрию уравнения (2.2).

Замечание. *Аналогично можно получить эволюционное уравнение на Q, если в условии коммутации $[L_4, \partial_t - A] = 0$ заменить оператор A на кососимметричный оператор порядка $2n+1$. Например, при $n = 2$*

$$Q_{t_2} = \frac{1}{8}(-4QW_x+2V_xQ_{xx}+Q_x(8z-5V^2+2W-V_{xx})-2VQ_{xxx}), \quad (2.7)$$

при $n = 3$

$$Q_{t_3} = \frac{1}{32}(-14V^3Q_x - 2V(-6(2QW_x + V_xQ_{xx}) + Q_x(24z + 18W+$$
$$+5V_{xx})) - 6V^2Q_{xxx} + 2(6W_xQ_{xx} - (8z + 6W + V_{xx})Q_{xxx} + Q_{xx}V_{xxx}+$$
$$+4QW_{xxx}) - Q_x(7V_x^2 + 10W_{xx} + V_{xxxx})). \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) также задают симметрии уравнения (2.2).

2.2 Случай эллиптических спектральных кривых. Иерархия уравнений Кричевера–Новикова

В этом параграфе мы исследуем уравнения (2.1), (2.3), (2.7) и (2.8) в случае эллиптической спектральной кривой и строим их частные решения.

Пусть спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Тогда из (2.2) вытекает, что при $g = 1$ оператор L_4 принимает вид $L_4 = (\partial_x^2 + V)^2 + W$, где

$$V = \frac{-16F_1(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}. \qquad (2.9)$$

Система (2.1), а, следовательно, и уравнение (2.3) при выполнении (2.9) сводятся к уравнению Кричевера–Новикова

$$W_t = \frac{48F_1(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) - 3W_{xx}^2 + 2W_x W_{xxx}}{8W_x}, \qquad (2.10)$$

которое возникает при построении решений ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили в случае эллиптической спектральной кривой [6]. Уравнения

$$[L_4, \partial_{t_n} - A_{2n+1}] = 0$$

при $n = 2, 3$, где

$$A_5 = \partial_x^5 + \frac{5}{2}V\partial_x^3 + \frac{15}{4}V_x\partial_x^2 + \frac{5}{8}(3V^2 + 2W + 5V_{xx})\partial_x + \frac{5}{16}(6VV_x + 2W_x + 3W_{xxx}).$$

$$A_7 = \partial_x^7 + \frac{7}{2}V\partial_x^5 + \frac{35}{4}V_x\partial_x^4 + \frac{7}{8}(5V^2 + 2W + 15V_{xx})\partial_x^3 + \frac{7}{16}(30VV_x + 6W_x +$$

$$+ 25V_{xxx})\partial_x^2 + \frac{7}{32}(10V^3 + 35V_x^2 + 2V(6W + 25V_{xx}) + 14W_{xx} + 23V_{xxxx})\partial_x +$$

$$+ \frac{7}{64}(30V^2V_x + 12WV_x + 60V_xV_{xx} + 6V(2W_x + 5V_{xxx}) + 10W_{xxx} + 9V_{xxxxx}),$$

принимают вид

$$V_{t_2} = \frac{1}{16}(30V^2V_x + 20WV_x + 20V_xV_{xx} + 10V(2W_x + V_{xxx}) + 10W_{xxx} + \partial_x^5 V), \qquad (2.11)$$

$$W_{t_2} = \frac{1}{8}(-5V^2W_x+10WW_x-5W_xV_{xx}-10V_xW_{xx}-10VW_{xxx}-2\partial_x^5 W), \tag{2.12}$$

$$V_{t_3} = \frac{1}{64}(140V^3V_x + 70V_x^3 + 168WW_x + 28WV_{xxx} + 70V_{xx}V_{xxx}+$$

$$+14V^2(6W_x+5V_{xxx})+V_x(-56W_{xx}+42\partial_x^4 V)+14V(12WV_x+20V_xV_{xx}-$$

$$-2W_{xxx} + \partial_x^5 V) - 14\partial_x^5 W + \partial_x^7 V), \tag{2.13}$$

$$W_{t_3} = \frac{1}{32}(-14V^3W_x - 7V_x^2W_x - 70W_xW_{xx} + 42W_{xx}V_{xxx} + 42V^2W_{xxx}-$$

$$-28WW_{xxx}+70V_{xx}W_{xxx}+7W_x\partial_x^4 V+56V_x\partial_x^4 W+14V(-6WW_x+W_xV_{xx}+$$

$$+6V_xW_{xx}^2 + 2\partial_x^5 W) + 4\partial_x^7 W). \tag{2.14}$$

При подстановке (2.9) эти системы сводятся к уравнениям из иерархии Кричевера–Новикова

$$W_{t_2} = \frac{1}{128W_x^3}(-1280F_1^2(\gamma) - 16(4c_2 + 2W - F_{1xx}(\gamma))W_x^4 - 45W_{xx}^4+$$

$$+100W_xW_{xx}^2W_{xxx} + 160F_1(\gamma)(5W_{xx}^2 - 2W_xW_{xxx}) + 20W_x^2(-W_{xxx}^2+$$

$$+2W_{xx}(4F_{1x}(\gamma) - \partial_x^4 W)) + 8W_x^3\partial_x^5 W), \tag{2.15}$$

$$W_{t_3} = \frac{1}{1024W_x^5}(28672F_1^3(\gamma)+64W_x^6W_{xx}-1575W_{xx}^6+4998W_xW_{xx}^4W_{xxx}+$$

$$+8960)F_1^2(\gamma)(-7W_{xx}^2+2W_xW_{xxx})-28W_x^2W_{xx}^2(139W_{xxx}^2+66W_{xx}\partial_x^4 W)+$$

$$+56W_x^3(7W_{xxx}^3 + 34W_{xx}W_{xxx}\partial_x^4 W + 9W_{xx}^2\partial_x^5 W)16F_1(\gamma)(-1813W_{xx}^4+$$

$$+4W_x(24(2c_2 - W)W_x^3 + 595W_{xx}^2W_{xxx} - 7W_x(11W_{xxx}^2 + 18W_{xx}\partial_x^4 W)+$$

$$+14W_x^2\partial_x^5 W) + 8W_x^4(-7(3(\partial_x^4 W)^2 + 4W_{xxx}\partial_x^5 W)+$$

$$+2W_{xx}(6(2c_2 - W)W_{xx} - 7\partial_x^7 W)) + 16W_x^5(4(-2c_2 + W)W_{xxx} + \partial_x^7 W), \tag{2.16}$$

где $\gamma = -\frac{1}{2}(c_2 + W)$.

Найдем автомодельные решения уравнений (2.1), (2.11) и (2.12), (2.13) и (1.14).

Теорема 2.2. *Системы (2.1), (2.11) и (2.12), (2.13) и (2.14) имеют следующие решения*

$$V(x,t) = -10\wp(at + x) - \frac{2a}{21},$$

$$W(x,t) = -40\wp^2(at + x) - \frac{20}{21}(8a + 7g_2)\wp(at + x),$$

$$V(x,t_2) = -8\wp(at_2 + x) - \frac{2g_2}{3}.$$

$$W(x,t_2) = 24\wp^2(at_2 + x) + 4g_2\wp(at_2 + x) + \frac{4a}{5},$$

$$V(x,t_3) = -10\wp(at_3 + x) + b.$$

$$W(x,t_3) = -40\wp^2(at_3 + x) + 8b\wp(at_3 + x),$$

a и b — некоторые константы, функция $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$(\wp^{'}(z))^2 = 4\wp^3(z) + g_2\wp^2(z) + g_1\wp(z) + g_0.$$

Доказательство теоремы 2.2 заключается в прямой проверке. Отметим, что конечнозонные решения уравнения Кричевера–Новикова (2.10) изучались в [28].

Заключение

В диссертации построены новые примеры коммутирующих формально самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два, которые отвечают гиперэллиптическим спектральным кривым. Изучены деформации коммутативных колец самосопряженных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями.

Результаты этой работы могут быть использованы при дальнейшем исследовании коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, а также при построении решений ранга два солитонных уравнений.

Список литературы

[1] Schur, J. *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke.* /J. Schur // Sitzungsber. Berl. Math. Ges. — 1905. №4. — P. 2 – 8.

[2] Burchnall, J. L. *Commutative ordinary differential operators.* / J. L. Burchnall, I. W. Chaundy // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. — 1923. — 2, №21. — P. 420 – 440.

[3] Кричевер, И. М. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* /И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1977. — 11, №1. — С. 15 – 31.

[4] Кричевер, И. М. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* /И. И. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1978. — 12, №3. — С. 20 – 31.

[5] Dixmier, J. *Sur les algebres de Weyl.*/ J. Dixmier // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — №96. — P. 209 – 242.

[6] Кричевер, И. М. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи матем. наук. — 1980. — 35, №6. — С. 47 – 68.

[7] Гриневич, П. Г. *О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами.* / П. Г. Гриневич, С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1982. — 16, №1. — С. 19 – 20.

[8] Grunbaum, F. *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six.* / F. Grunbaum // Physica D. — 1988. — 31, №3. — P. 424 – 433.

[9] Previato, E. *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves.* / E. Previato, G. Wilson // Compositio Math. — 1992. — 81, №1. — P. 107 – 119.

[10] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебры Вейля, отвечающие эллиптической спектральной кривой.* / О. И. Мохов // Международная конференция по алгебре памаяти А.И. Ширшева (1921-1981). — Август 1991. — Барнаул, СССР. — Отчеты о теории колец, алгебр и модулей, 1991. — С. 20 – 25.

[11] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебры Вейля, порожденных полиномами Чебышева.* / О. И. Мохов // Третья международная конференция по алгебре памяти М.И. Каргополова (1928-1976). — 1993. — Красноярск. — С. 23 – 28.

[12] Latham, G. *Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV.* / G. Latham // Appl. Math. Lett. — 1995. — 8, №6. — P. 73 – 78.

[13] Latham, G., Previato, E. *Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations.*/

G. Latham, E. Previato// Acta Appl. Math. — 1995. — №39. — P. 405 – 433.

[14] Мохов, О. И. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.*/ О. И. Мохов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1989. — 53, №6. — С. 1291 – 1315.

[15] Миронов, А. Е. *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два.*/ А. Е. Миронов// Матем. сб. — 2004. — 195, №5. — С. 103 – 114.

[16] Миронов, А. Е. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2.* / А. Е. Миронов// Сиб. электрон. матем. изв. 2009. — №6. — С. 533 – 536.

[17] Миронов, А. Е. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающих кривой рода 2.*/ А. Е. Миронов// Функц. анализ и его прил. 2005. — 39, №3. — С. 91 – 94.

[18] Zuo, D. *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2.* / D. Zuo // SIGMA. 2012. — 8, №044. — P. 1 – 11.

[19] Mironov, A. E. *Self-adjoint commuting ordinary differential operators* / A. E. Mironov // Invent. math. — 2014. — 197, №2. — P. 417 – 431.

[20] Mironov, A. E. *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.* / A. E. Mironov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — №234. — P. 309 – 321.

[21] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // УМН. — 2015. — 70, №1. — P. 179 – 180.

[22] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода.* / О. И. Мохов // Матем. заметки. — 2013. — 94, №2. — С. 314 – 316.

[23] Mokhov, O. I. *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients.* / O. I. Mokhov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — №234. — P. 323 – 336. 323–336.

[24] Lax, P. D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.*/ P. D. Lax // Comm.Pure Appl.Math. — 1968. — №21. — P. 467 – 490.

[25] Дринфельд, В. Г. *Симметрии в уравнениях Лакса* / В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов // Интегрируемые системы, под ред. А.Б. Шабата. — Уфа. — 1982.

[26] Дубровин, Б. А. *Нелинейные уранвения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* / Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков // УМН. — 1976. — 31, №1(187). — С. 55 – 136.

[27] Гриневич, П. Г. *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов.* / П. Г. Гриневич // Функц. анализ и его прил. — 1982. — 16, №1. — С. 19 – 24.

[28] Новиков, Д. П. *Алгебро-геометрические решения уравнения Кричевера–Новикова*/Д. П. Новиков // ТМФ. — 1999. — 121, №1. — С. 367 – 373.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Давлетшина, В. Н. *О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* /В. Н. Давлетшина // Сибирские электронные математические известия — 2013. — Т.10. — С. 109 – 112.

[2*] Давлетшина, В. Н. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* /В. Н. Давлетшина, Э. И. Шамаев // Сибирский математический журнал — 2014. — Т.55, №4. — С. 744 – 749.

[3*] Давлетшина, В. Н. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами.* /В. Н. Давлетшина // Сибирский математический журнал — 2015. — Т.56, №3. — С. 513 – 519.

[4*] Давлетшина, В. Н. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации, заданные солитонными уравнениями.* /В. Н. Давлетшина // Математические заметки — 2015. — Т.97, вып.3 — С. 350 – 358.

[5*] Давлетшина, В. Н. *О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* /В. Н. Давлетшина // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск. — 2013. — С. 52.

[6*] Давлетшина, В. Н. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации, заданные солитонными уравнениями.* [Электронный ресурс] / В. Н. Давлетшина // Тезисы Международной конференции «Геометрия и анализ на метрических структурах», Новосибирск. — 2013. — Режим доступа: `http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2013/12/Davletshina.pdf`

[7*] Davletshina, V. *Self-adjoint commuting differential operators of rank 2 and their deformations given by the soliton* [Электрон-

ный ресурс] / V. Davletshina // International Youth Conference «Geometry and Control», Moscow, April 14–18, 2014: Abstracts. — Moscow: Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences. — 2014. — P. 19 – 20. — Режим доступа: http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf