

# Функция Бейкера-Ахиезера в дифференциальной геометрии и математической физике

*А. Е. Миронов*

## Лекция 1. Уравнение Кортевега – де Фриза

Многие важные нелинейные дифференциальные уравнения, возникающие в геометрии и математической физике, интегрируются с помощью функций Бейкера-Ахиезера. Мы рассмотрим два применения функций Бейкера-Ахиезера. В лекциях 1 и 2 будут построены солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза. В лекции 3 будет рассмотрена задача построения  $n$ -ортогональных криволинейных систем координат в  $\mathbb{R}^n$ .

В 1834 году шотландский инженер Скотт Рассел открыл замечательное явление — солитоны. Солитоны — это уединенные волны, которые не меняют форму со временем. Двигаясь вдоль канала, Рассел обратил внимание на волну, которая отделилась от остановившейся баржи. Эта волна двигалась с постоянной скоростью и не меняла своей формы. Рассел посвятил много времени изучению, открытого им явления. В частности, ему удалось смоделировать солитоны в лабораторных условиях. Позже в 1895 году голландские математики Кортевег и де Фриз вывели уравнение, описывающее солитоны

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}). \quad (1)$$

Теперь это уравнение называется уравнением Кортевега – де Фриза

(КдФ). Найдем автомодельные решения КдФ

$$u(x, t) = u(x + \kappa^2 t). \quad (2)$$

Потребуем от решений быстрого убывания на бесконечности:

$$u(x, t)|_{x=\pm\infty} = u_x(x, t)|_{x=\pm\infty} = u_{xx}(x, t)|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (3)$$

Подставим (2) в (1). Получим

$$u'''(\zeta) + 6u(\zeta)u'(\zeta) - 4\kappa^2 u'(\zeta) = 0,$$

где  $\zeta = x + \kappa^2 t$ . Проинтегрируем левую часть

$$u''(\zeta) + 3u^2(\zeta) - 4\kappa^2 u(\zeta) + s_0 = 0.$$

Из (3) следует, что  $s_0 = 0$ . Умножим полученное уравнение на  $u'(\zeta)$  и опять проинтегрируем по  $\zeta$

$$(u'(\zeta))^2 + 2u^3(\zeta) - 4\kappa^2 u^2(\zeta) + s_1 = 0.$$

В силу (3)  $s_1 = 0$ . Следовательно,

$$\frac{du}{\pm\sqrt{-2u^3 + 4\kappa^2 u^2}} = d\zeta.$$

Отсюда получаем решение в виде уединенной волны, которую наблюдал Рассел (рис. 1)

$$u(x, t) = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2(\kappa(x + \kappa^2 t + \zeta_0))},$$

где  $\zeta_0 = \text{const}$ . Такое решение называется *односолитонным*. Полученная формула для решения показывает, что скорость волны  $\kappa^2$  пропорциональна ее амплитуде (высоте).

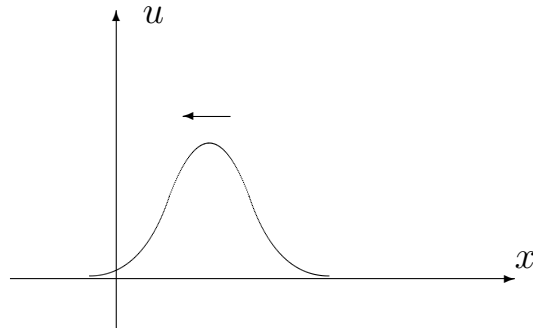


Рис. 1

Причина существования решений КдФ в виде уединенных волн заключается во взаимной компенсации эффектов дисперсии и опрокидывания. Эффект дисперсии — это "расплывание" (размазывание) волны, проще всего его можно продемонстрировать на примере уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}.$$

Задача Коши

$$u|_{t=0} = \delta(x), \quad u|_{x=\pm\infty} = 0$$

(одноточечный источник тепла) имеет решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Профиль решения со временем становится все более "расплывчатым" (рис. 2).

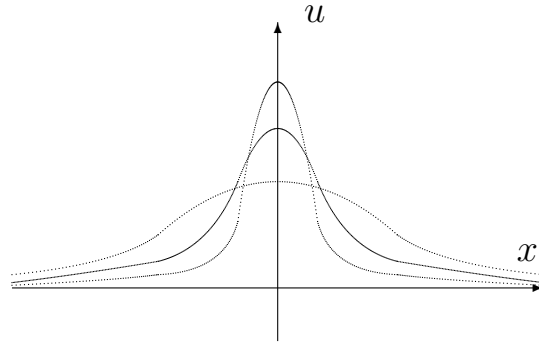


Рис. 2

За дисперсию в КдФ отвечает слагаемое  $u_{xxx}$ .

Эффект опрокидывания покажем на примере уравнения Хопфа

$$u_t + uu_x = 0.$$

Решение задачи Коши

$$u|_{t=0} = g(x)$$

дается неявной формулой

$$u(x, t) = g(x - ut).$$

Из этой формулы следует, что чем выше находится точка, тем больше ее скорость (рис. 3).

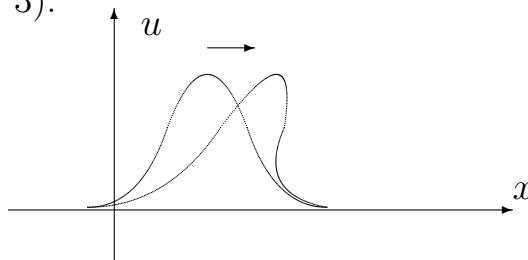


Рис. 3

Уравнение Хопфа описывает одномерное движение невзаимодействующих пылинок. Момент опрокидывания (неоднозначности) отвечает моменту возникновения ударной волны (плотность становится  $\infty$ ).

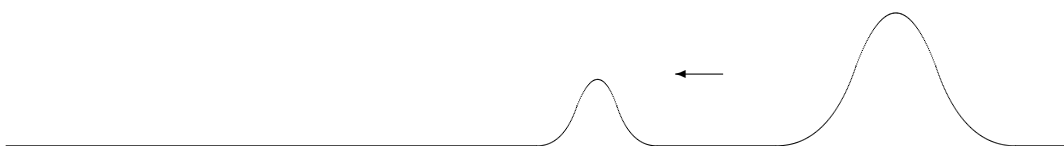


Рис. 4

Солитоны очень интересно взаимодействуют (см. рис. 4–6).

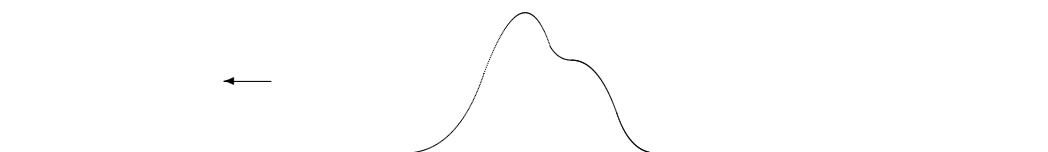


Рис. 5

В момент столкновения двух солитонов возникает одна волна, которая затем распадается на два солитона той же амплитуды, что и до столкновения.

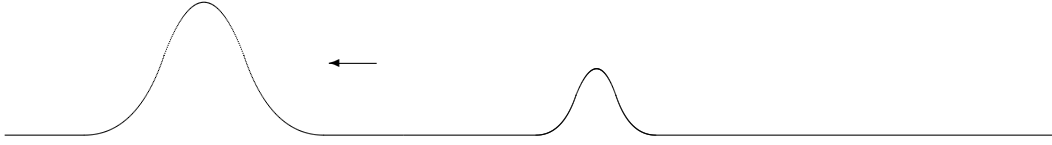


Рис. 6

Двухсолитонное решение КдФ проще всего получить с помощью подстановки Хироты

$$u(x, t) = 2\partial_x^2 \log \tau(x, t).$$

Эта подстановка сводит КдФ к билинейному уравнению Хироты на  $\tau$ -функцию

$$4\tau_x \tau_t + 3\tau_{xx}^2 - 4\tau_x \tau_{xxx} - 4\tau \tau_{tx} + \tau \tau_{xxx} = 0.$$

Простейшие решения уравнения Хироты и отвечающие им решения КдФ имеют вид.

1. Стационарное решение

$$\tau = x, \quad u = -\frac{2}{x^2}.$$

2. Рациональное решение

$$\tau = x^3 - 3t, \quad u = -\frac{6(x^4 + 6tx)}{(x^3 - 3t)^2}.$$

3. Односолитонное решение

$$\tau = 1 + \exp(\eta), \quad \eta = 2\kappa(x + \kappa^2 t + \zeta),$$

$$u = \frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2(\kappa(x + \kappa^2 t + \zeta))}.$$

4. Двухсолитонное решение

$$\tau = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 \exp(\eta_1 + \eta_2),$$

$$\eta_i = 2\kappa_i(x + \kappa_i^2 t + \zeta_i), \quad i = 1, 2.$$

Несложный анализ последней формулы показывает, что солитоны взаимодействуют именно так как это показано на рис. 2–6.

Перейдем к построению многосолитонных решений. Нам понадобится следующее наблюдение Лакса. Он заметил, что КдФ эквивалентно условию коммутации двух дифференциальных операторов. А именно, рассмотрим дифференциальные операторы

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x, t), \quad \partial_t - A = \partial_t - \left( \partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x, t)\partial_x + \frac{3}{4}u_x(x, t) \right). \quad (4)$$

Вычислим их коммутатор

$$[L_2, \partial_t - A] = L_2(\partial_t - A) - (\partial_t - A)L_2 = -u_t + \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

В правой части стоит КдФ. Таким образом, если мы найдем коммутирующие операторы вида (4), то мы автоматически найдем решения.

Важным классом решений является класс *конечнозонных* решений. Этот класс выделяется дополнительным ограничением

$$[L_2, L_{2g+1}] = 0, \quad (5)$$

где  $L_{2g+1}$  — дифференциальный оператор по  $x$  порядка  $2g + 1$  с коэффициентами зависящими от  $t$ . Термин "конечнозонный" означает

следующее. Предположим, что  $u(x)$  — вещественный периодический потенциал  $u(x + \tau) = u(x)$  оператора Шредингера  $-\partial_x^2 + u(x)$ . Будем считать, что собственное число  $\lambda$  принадлежит спектру, если существует собственная функция  $\psi(x)$

$$(-\partial_x^2 + u(x))\psi = \lambda\psi$$

такая, что  $\psi(x + \tau) = \psi(x)e^{ip}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ . Спектр оператора Шредингера состоит из отрезков  $[\alpha_i, \beta_i] \subset \mathbb{R}$ . Если спектр состоит конечного числа отрезков (один из которых полубесконечен), то оператор Шредингера называется *конечнозонным*. С.П. Новиков [1] доказал, что если оператор Шредингера коммутирует с оператором нечетного порядка, то он конечнозonen. Обратное утверждение доказано Б.А. Дубровиным [2]. В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (5) выполнено (при этом  $u$  не обязательно периодическая функция).

Совместная собственная функция операторов  $L_2, L_{2g+1}$  и  $\partial_t - A$  — это и есть *функция Бейкера–Ахиезера*

$$L_2\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi, \quad (\partial_t - A)\psi = 0, \quad \psi = \psi(x, P), \quad P = (z, w).$$

Оказывается, что совместные собственные числа  $z, w$  удовлетворяют уравнению гиперэллиптической кривой

$$w^2 = (z - z_1) \dots (z - z_{2g+1}).$$

Если все числа  $z_i$  попарно различны, то  $\psi$  выражается через тэта-функцию гиперэллиптической кривой [3]. Если же  $z_i$  совпадают и кривая вырождается в рациональную кривую, то  $\psi$  выражается через элементарные функции. Наша цель — научиться находить функцию Бейкера–Ахиезера в случае кратных  $z_i$  и получить соответствующие решения КдФ. Прежде чем это делать напомним некоторые результаты из теории коммутирующих дифференциальных операторов.



### Коммутирующие дифференциальные операторы.

Условие коммутации обыкновенных линейных дифференциальных операторов

$$L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x) \partial_x^i, \quad L_m = \sum_{j=0}^m v_j(x) \partial_x^j$$

эквивалентно сложной системе нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты  $u_i(x), v_j(x)$ .

**Пример 1.** Условие

$$[\partial_x^2 + u(x, t), \quad \partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x)\partial_x + \frac{3}{4}u'(x)] = 0$$

эквивалентно уравнению

$$(u')^2 + 2u^3 + s_1u + s_2 = 0,$$

где  $s_1, s_2$  — некоторые константы.

В 1905 г. Шур доказал следующую замечательную лемму.

**Лемма 1.** Пусть  $L_n, L_m, L_k$  — дифференциальные операторы порядков  $n, m, k$  и пусть  $n \geq 1$ . Если

$$L_n L_m = L_m L_n, \quad L_n L_k = L_k L_n,$$

то

$$L_m L_k = L_k L_m.$$

Эта лемма означает, что множество операторов, коммутирующих с заданным оператором, образует кольцо. И.М. Кричевером [4, 5] получена классификация коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов.

Дадим набросок доказательства леммы Шура. Для этого нам понадобятся формальные псевдодифференциальные операторы, которые имеют вид

$$u_n(x)\partial_x^n + \dots + u_0(x) + u_{-1}(x)\partial_x^{-1} + u_{-2}(x)\partial_x^{-2} + \dots$$

Формальные псевдодифференциальные операторы образуют ассоциативное кольцо. Умножение в нем определяется естественным требованием

$$\partial_x^n \circ \partial_x^{-m} = \partial_x^{-m} \circ \partial_x^n = \partial_x^{n-m},$$

а также правилом Лейбница

$$\partial_x^n \circ f = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} (\partial_x^j f) \circ \partial_x^{n-j},$$

где

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad 0 \leq j \leq n$$

и  $\binom{n}{j} = 0$  при  $j > n$ .

Несложно проверить, что элементы вида

$$S = 1 + s_1(x)\partial_x^{-1} + s_2(x)\partial_x^{-2} + \dots$$

обратимы. Для любого дифференциального оператора порядка  $n$  существует псевдодифференциальный оператор  $S$  указанного вида такой, что

$$S^{-1} \circ L_n \circ S = \partial_x^n.$$

Коэффициенты оператора  $S$  находятся последовательно из равенства

$$L_n \circ S = S \circ \partial_x^n.$$

Введем два псевдодифференциальных оператора

$$\tilde{L}_m = S^{-1}L_mS, \quad \tilde{L}_k = S^{-1}L_kS.$$

Из условия леммы следует, что

$$\partial_x^n \tilde{L}_m = \tilde{L}_m \partial_x^n, \quad \partial_x^n \tilde{L}_k = \tilde{L}_k \partial_x^n.$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что если псевдодифференциальный оператор коммутирует с оператором  $\partial_x^n$ , то его коэффициенты постоянны. Следовательно,  $\tilde{L}_m$  и  $\tilde{L}_k$  коммутируют. Отсюда вытекает коммутруемость  $L_m$  и  $L_k$ .

Отметим, что в общем случае для матриц аналог леммы Шура неверен. Например, для

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_1A_2 = A_2A_1, \quad A_1A_3 = A_3A_1, \quad A_2A_3 \neq A_3A_2.$$

Следующая важная лемма доказана Бурхналлом и Чаунди в 1924 г.

**Лемма 2.** *Если  $L_1L_2 = L_2L_1$ , то существует ненулевой полином  $R(z, w)$  такой, что  $R(L_1, L_2) = 0$ .*

**Пример 2.** Операторы из примера 1 удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$L_3^2 = L_2^3 + \frac{s_1}{8}L_2 - \frac{s_2}{16},$$

таким образом

$$R = w^2 - \left( z^3 + \frac{s_1}{8}z - \frac{s_2}{16} \right).$$

Дадим набросок доказательства леммы 2. Рассмотрим пространство собственных функций оператора  $L_n$  с собственным значением  $z$

$$\mathcal{L}_z = \{\psi : L_n\psi = z\psi\}.$$

Из коммутативности  $L_n$  и  $L_m$  следует, что оператор  $L_m$  действует на пространстве  $\mathcal{L}_z$

$$L_m : \mathcal{L}_z \rightarrow \mathcal{L}_z.$$

Выберем в пространстве  $\mathcal{L}_z$  базис  $c_0(x, z), \dots, c_{n-1}(x, z)$  такой, что

$$\partial_x^j c_i|_{x=x_0} = \delta_{ij},$$

где  $x_0$  — фиксированная точка. В базисе  $c_j$  оператор  $L_m$  на  $\mathcal{L}_z$  задается матрицей  $A(z)$  с полиномиальными коэффициентами по  $z$ . По теореме Гамильтона–Келли полином

$$R(z, w) = \det(wE - A(z)),$$

где  $E$  — единичная матрица, зануляет  $A(z)$ . По построению

$$R(L_n, L_m)c_j(x, z) = 0.$$

Следовательно, дифференциальный оператор  $R(L_n, L_m)$  имеет бесконечномерное ядро. Отсюда следует, что  $R(L_n, L_m) = 0$ .

Полином  $R$  играет важную роль в теории коммутирующих дифференциальных операторов и во всей теории интегрируемых систем. Множество нулей  $R$  параметризует совместные собственные числа операторов  $L_n$  и  $L_m$ , а именно, пусть  $\psi$  — совместная собственная функция

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

тогда  $z$  и  $w$  удовлетворяют уравнению  $R(z, w) = 0$ .

**Определение.** *Спектральной кривой пары  $L_n, L_m$  называется гладкая компактификация комплексной алгебраической кривой, заданной в  $\mathbb{C}^2$  уравнением*

$$R(z, w) = 0.$$

Разберем несколько примеров алгебраических кривых. Топологически гладкая аффинная кривая, заданная в  $\mathbb{C}^2$  алгебраическим уравнением, является сферой с  $g$  ручками, проколотой в нескольких точках. Компактификация такой кривой — это добавление недостающих точек. Число  $g$  — род кривой.

**Пример 3.** Компактификация кривой, заданной уравнением  $w^2 = z$  — это кривая рода 0 (сфера Римана или комплексная проективная прямая  $\mathbb{C}P^1$ ).

**Пример 4.** Аффинная часть *эллиптической кривой* задается уравнением

$$w^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3), \quad z_i \neq z_j.$$

Топологически — это проколотый тор (рис. 7).

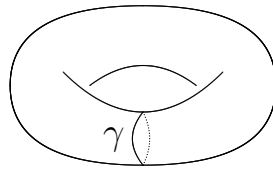


Рис. 7

**Пример 5.** Аффинная часть *гиперэллиптической кривой* задается уравнением

$$w^2 = (z - z_1) \dots (z - z_{2g+1}), \quad z_i \neq z_j.$$

Это кривая рода  $g$ , которая компактифицируется одной точкой на бесконечности.

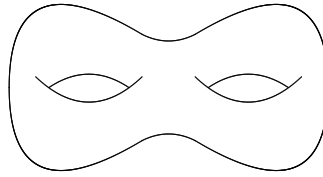


Рис. 8:  $g=2$

Отметим, что аффинная часть кривой, заданной уравнением

$$w^2 = (z - z_1) \dots (z - z_{2g+2}), \quad z_i \neq z_j$$

компактифицируется двумя точками на бесконечности. Это другое представление гиперэллиптической кривой рода  $g$ .

Алгебраические кривые могут иметь особенности.

**Пример 6.** Кривая, заданная уравнением

$$w^2 = (z - z_1)^2(z - z_3), \quad z_1 \neq z_3.$$

получается из эллиптической кривой стягиванием одного цикла (см. рис. 7, цикл  $\gamma$  стягивается в точку). Стягивание получается при стремлении  $z_2$  к  $z_1$ . Компактификация такой кривой — это сфера с двумя отождествленными точками (сфера с двойной точкой, рис. 9).

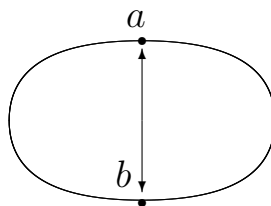


Рис. 9:  $a \sim b$

**Пример 7.** Компактификация кривой

$$w^2 = (z - z_1)^2 \dots (z - z_g)^2 (z - z_{2g+1}), \quad z_i \neq z_j$$

является сферой с  $g$  двойными точками.

**Пример 8.** Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$w^n = z^m$$

со взаимно простыми  $n$  и  $m$ . Компактификация такой кривой — это сфера с каспидальной особенностью в точке  $(0, 0)$ . Особенность устроена следующим образом. Рассмотрим трехмерную сферу

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2.$$

В  $S^3$  содержится двумерный тор

$$T^2 = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2} \right\} \subset S^3.$$

Пересечение кривой  $w^n = z^m$  с  $S^3$  — это торический узел типа  $(m, n)$ , который лежит в  $T^2$ . Этот узел параметризуется следующим образом

$$t \rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n\pi i t}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{m\pi i t} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Топологически каспидальная особенность — это конус над торическим узлом (рис. 10).

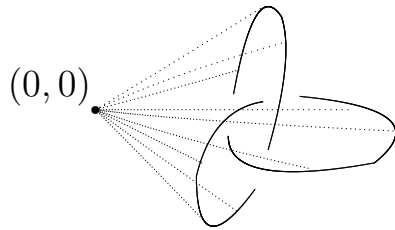


Рис. 10:  $n = 2, m = 3$

## Лекция 2. Функция Бейкера-Ахиезера

Предположим, что  $L_n$  и  $L_m$  — коммутирующие дифференциальные операторы со взаимно простыми  $n$  и  $m$  (для конечнозонных решений КдФ важен случай  $n = 2$ ,  $m = 2g + 1$ ). Тогда, как отмечалось в предыдущей лекции, совместные собственные числа параметризуются точками спектральной кривой  $\Gamma$

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi, \quad P = (z, w) \in \Gamma.$$

Предположим, что спектральная кривая несингулярна. Тогда для фиксированных  $(z, w) \in \Gamma$  существует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция  $\psi(x, P)$ . Функция  $\psi(x, P)$  является *функцией Бейкера-Ахиезера*. Дадим определение этой функции. Функция Бейкера-Ахиезера строится по *спектральным данным*

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\}.$$

Здесь  $\Gamma$  — гладкая неприводимая компактная алгебраическая кривая рода  $g$ ,  $q \in \Gamma$  — выделенная точка,  $k^{-1}$  — локальный параметр около  $q$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  — набор точек в общем положении (дивизор  $\gamma_1 + \dots + \gamma_g$  должен быть неспециальным, т.е. не должно существовать мероморфной функции с простыми полюсами в  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ ). Тогда существует единственная функция  $\psi(x, P)$ , которая обладает следующими свойствами.

1. В точке  $q$   $\psi$  имеет существенную особенность экспоненциального типа

$$\psi = e^{xk} \left( 1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \dots \right).$$

2. На  $\Gamma - \{q\}$   $\psi$  мероморфна с простыми полюсами в  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ .

Функция  $\psi(x, P)$  называется *одноточечной функцией Бейкера-Ахиезера*. В случае гладкой спектральной кривой  $\Gamma$  функция  $\psi$  явно



найдена И.М. Кричевера [5] в терминах тэта-функции многообразия Якоби кривой  $\Gamma$ . В случае сингулярной спектральной кривой в определении функции Бейкера–Ахиезера нужно заменить род на арифметический род.

Покажем, что спектральным данным  $S$  отвечает коммутативное кольцо дифференциальных операторов, изоморфное кольцу мероморфных функций на  $\Gamma$  с полюсом в  $q$ .

Пусть  $f(P)$  — мероморфная функция на  $\Gamma$  с единственным полюсом в окрестности  $q$  порядка  $n$ . Тогда в точке  $q$  она разлагается в ряд Лорана по параметру  $k$

$$f(P) = k^n + \alpha_{n-1}k^{n-1} + \dots + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{k} + \dots$$

Отметим, что  $n$ -я производная  $\psi$  имеет асимптотику

$$\partial_x^n \psi = k^n e^{kx} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

Такую же асимптотику имеет  $f(P)\psi$ . Таким образом

$$\partial_x^n \psi - f(P)\psi = k^{n-1} e^{kx} \left( u_{n-1}(x) + O\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

Отсюда

$$\partial_x^n \psi + u_{n-1}(x) \partial_x^{n-1} \psi - f(P)\psi = k^{n-2} e^{kx} (O(1)).$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим дифференциальный оператор

$$L(f) = \partial_x^n + u_{n-1} \partial_x^{n-1} + \dots + u_0$$

такой, что

$$L(f)\psi - f(P)\psi = e^{kx} \left( O\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

Коэффициенты  $u_i(x)$  явно находятся по  $\xi_i(x)$  и  $\alpha_i$ . Правая часть последнего равенства равна 0, т.к. в противном случае мы можем добавить ее к функции Бейкера–Ахиезера и получить новую функцию, которая удовлетворяет всем требованиям функции Бейкера–Ахиезера. В силу единственности

$$L(f)\psi = f(P)\psi.$$

Таким образом мы получили преобразование

$$f \rightarrow L(f).$$

Аналогично для другой мероморфной функции  $g(P)$  с полюсом в  $q$

$$L(g)\psi = g(P)\psi.$$

Отсюда следует, что

$$\psi(x, P) \in \text{Ker}[L(f), L(g)].$$

В силу того, что ядро ненулевого оператора конечномерно

$$[L(f), L(g)] = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 9.** Пусть  $\Gamma = \mathbb{C}P^1$  — пополнение комплексной плоскости точкой на бесконечности. Рассмотрим следующие спектральные данные

$$\{\mathbb{C}P^1, \infty, z^{-1}\}.$$

В этом случае функция Бейкера–Ахиезера — это экспонента

$$\psi(x, z) = e^{xz}.$$

Функции

$$f(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0$$

отвечает оператор с постоянными коэффициентами

$$L(f) = \partial_x^n + c_{n-1}\partial_x^{n-1} + \dots + c_0.$$

Ясно, что для другой функции  $g(z)$  операторы  $L(f)$  и  $L(g)$  коммутируют.

**Пример 10.** Найдем функцию Бейкера–Ахиезера в случае эллиптической спектральной кривой. Пусть  $\Gamma$  — эллиптическая кривая

$$\Gamma = \mathbb{C}/\{2m\omega + 2n\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

На  $\Gamma$  существует единственная с точностью до добавления константы мероморфная функция с полюсом второго порядка в 0 — это  $\wp$ -функция Вейерштрасса,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2 z^2}{20} + \frac{g_3 z^4}{28} + \dots$$

Ряд Лорана не содержит нечетных членов, в противном случае мероморфная функция  $\wp(z) - \wp(-z)$  имела бы полюс только первого порядка в 0, что невозможно. Функция  $\wp(z)$  удовлетворяет уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Действительно,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2 z}{10} + \frac{g_3 z^3}{7} + \dots,$$

следовательно,

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 + O(z).$$

Отсюда вытекает уравнение. Таким образом мы получаем биголоморфное отображение

$$z \rightarrow (\wp(z), \wp'(z))$$

между  $\Gamma - \{0\}$  и алгебраической кривой, заданной в  $\mathbb{C}^2$  уравнением

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Функция  $\wp(z)$  имеет также следующее представление

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mathbb{Z}^2 - \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right].$$

Этот ряд абсолютно сходится на любом компакте.

Для явного задания функции Бейкера–Ахиезера нам понадобятся  $\zeta$  и  $\sigma$ -функции Вейерштрасса. Они определяются из условий

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z).$$

Функция  $\zeta(z)$  имеет следующие разложения

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\mathbb{Z}^2 - \{0\}} \left[ \frac{1}{z - 2m\omega - 2n\omega'} + \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{z}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right],$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2 z^3}{60} - \frac{g_3 z^5}{140} + \dots,$$

Эта функция имеет простые полюсы в узлах решетки  $\{2m\omega + 2n\omega'\}$ . Функция  $\sigma(z)$  является целой на  $\mathbb{C}$ . Она имеет простые нули в узлах решетки и следующим образом разлагается в бесконечное произведение

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} \left[ \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \exp \left( \frac{z}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^2 \right) \right].$$

Функции  $\zeta(z)$  и  $\sigma(z)$  обладают следующими свойствами

$$\zeta(z + 2k\omega + 2m\omega') = \zeta(z) + 2k\eta + 2m\eta',$$

где  $\eta = \zeta(\omega)$ ,  $\eta' = \zeta(\omega')$ ,

$$\sigma(z+2\omega) = -\sigma(z) \exp(2\eta(z+\omega)), \quad \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z) \exp(2\eta'(z+\omega')).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, z) = e^{-x\zeta(z)} \frac{\sigma(z+x+\gamma)\sigma(\gamma)}{\sigma(z+\gamma)\sigma(x+\gamma)}.$$

Из перечисленных свойств функций  $\zeta(z)$  и  $\sigma(z)$  вытекает, что  $\psi$  определена на  $\Gamma$ , т.е. она  $\Lambda$ -периодична. Также несложно понять, что  $\psi$  — функция Бейкера–Ахиезера, отвечающая спектральным данным

$$S = \{\Gamma, 0, -z, -\gamma\}.$$

Найдем дифференциальный оператор, отвечающий функции  $\wp(z)$

$$L_2\psi(x, z) = (\partial_x^2 + u(x))\psi(x, z) = \wp(z)\psi(x, z).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \psi &= e^{xk} \left( 1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \dots \right), \quad k = -\frac{1}{z}, \\ \wp &= k^2 + \frac{g_2}{20k^2} + \frac{g_3}{28k^4} + \dots, \\ \partial_x^2\psi &= k^2 \left( 1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + \dots \right) e^{xk} + \\ &+ 2k \left( \frac{\xi_{1x}(x)}{k} + \frac{\xi_{2x}(x)}{k^2} + \dots \right) e^{xk} + \left( \frac{\xi_{1xx}(x)}{k} + \frac{\xi_{2xx}(x)}{k^2} + \dots \right) e^{xk}, \end{aligned}$$

следовательно,  $u = -2\xi_{1_x}(x)$ . Таким образом, для того чтобы найти потенциал  $u$  нам достаточно найти коэффициент  $\xi_1$  в разложении функции Бейкера–Ахиезера. Далее,

$$e^{-x\zeta(z)} = e^{-\frac{x}{z} + x\frac{z^3 g_2}{60} + \dots},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(z+x+\gamma)\sigma(\gamma)}{\sigma(z+\gamma)\sigma(x+\gamma)} &= 1 + z \frac{d}{dz} \left( \frac{\sigma(z+x+\gamma)\sigma(\gamma)}{\sigma(z+\gamma)\sigma(x+\gamma)} \right) \Big|_{z=0} + O(z^2) = \\ &= 1 + z \frac{\sigma'(x+\gamma)\sigma(\gamma)^2\sigma(x+\gamma) - \sigma^2(x+\gamma)\sigma(\gamma)\sigma'(x+\gamma)}{\sigma^2(\gamma)\sigma^2(x+\gamma)} + O(z^2) = \\ &= 1 + z \left( \frac{\sigma'(x+\gamma)}{\sigma(x+\gamma)} - \frac{\sigma'(\gamma)}{\sigma(\gamma)} \right) + O(z^2). \end{aligned}$$

Откуда

$$\xi_1 = -\frac{\sigma'(x+\gamma)}{\sigma(x+\gamma)} + \frac{\sigma'(\gamma)}{\sigma(\gamma)} = -\zeta(x+\gamma) + \frac{\sigma'(\gamma)}{\sigma(\gamma)}.$$

Следовательно,

$$u = -2\wp(x+\gamma).$$

Таким образом мы получили равенство

$$(\partial_x^2 - 2\wp(x+\gamma))\psi = \wp(z)\psi.$$

Оператор, отвечающий функции  $\frac{1}{2}\wp'(z)$  имеет вид

$$\partial_x^3 - 3\wp(x+\gamma)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x+\gamma).$$

Полученный нами оператор второго порядка — это частный случай конечнозонного оператора Ламе

$$\partial_x^2 - g(g+1)\wp(x+\gamma),$$

который коммутирует с оператором порядка  $g(g+1)$ .

Рассмотрим несколько примеров сингулярных спектральных кривых.

**Пример 11.** При  $g_2, g_3 \rightarrow 0$  в предыдущем примере эллиптическая кривая вырождается в рациональную кривую с каспидальной особенностью (см. рис. 10)

$$w^2 = z^3.$$

При этом эллиптические функции  $\sigma(z), \zeta(z), \wp(z)$  вырождаются в функции

$$\hat{\sigma}(z) = z, \quad \hat{\zeta}(z) = \frac{1}{z}, \quad \hat{\wp}(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Мы получаем коммутирующие дифференциальные операторы с рациональными коэффициентами

$$\hat{\psi} = e^{-\frac{x}{z}} \frac{z + x + \gamma}{(x + \gamma)(z + \gamma)},$$

$$\left( \partial_x^2 - \frac{2}{(x + \gamma)^2} \right) \hat{\psi} = \frac{1}{z^2} \hat{\psi},$$

$$\left( \partial_x^3 - \frac{3}{(x + \gamma)^2} \partial_x + \frac{3}{(x + \gamma)^3} \right) \hat{\psi} = \frac{1}{z^3} \hat{\psi}.$$

**Пример 12.** Рассмотрим в качестве спектральной кривой  $\Gamma$  другое вырождение эллиптической кривой — сферу с двойной точкой. отождествим две точки на  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  с координатами  $a$  и  $-a$ . Арифметический род такой кривой равен 1. Функция Бейкера–Ахиезера, отвечающая спектральным данным

$$S = \{\Gamma, \infty, 1/z, \gamma\},$$

имеет вид

$$\psi(x, z) = e^{xz} \left( 1 + \frac{\xi(x)}{z - \gamma} \right).$$

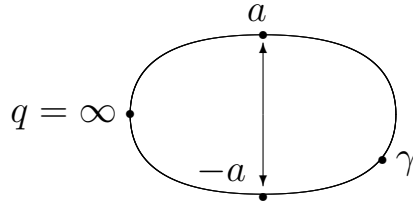


Рис. 11:  $a \sim -a$

Из условия

$$\psi(x, a) = \psi(x, -a)$$

находим

$$\xi(x) = \frac{(\gamma^2 - a^2) \sinh(ax)}{a \cosh(ax) + \gamma \sinh(ax)}.$$

Дифференциальные операторы, отвечающие рациональным функциям с полюсом в  $q$

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = z^3 - a^2 z$$

имеют вид

$$L(f) = \partial_x^2 + u(x), \quad L(g) = \partial_x^3 + \left( \frac{3}{2}u(x) - a^2 \right) \partial_x + \frac{3}{4}u'(x),$$

$$u(x) = \frac{2a^2(a^2 - \gamma^2)}{(a \cosh(ax) + \gamma \sinh(ax))^2}.$$

Полином Бурхналла–Чаунди имеет вид

$$R = w^2 - z(z - a^2)^2.$$

### Солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза

Предположим, что  $u(x, t)$  — конечнозонное решение КдФ, т.е.

$$[\partial_x^2 + u(x, t), \partial_t - A] = 0, \quad [\partial_x^2 + u(x, t), L_{2g+1}] = 0. \quad (6)$$



Коэффициенты оператора  $L_{2g+1}$  зависят от  $t$ . Спектральные данные пары  $\partial_x^2 + u(x, t)$ ,  $L_{2g+1}$  меняются со временем

$$S(t) = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1(t), \dots, \gamma_g(t)\}.$$

Оказывается, что спектральная кривая  $\Gamma$  — ”интеграл движения“ т.е. она не меняется со временем, а дивизор  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \dots + \gamma_g(t)$  пробегает прямолинейную обмотку в многообразии Якоби спектральной кривой  $\Gamma$ .

Далее мы введем функцию Бейкера–Ахиезера, которая зависит от времени, при  $t = 0$  она совпадает с рассмотренной ранее функцией Бейкера–Ахиезера. Эта функция будет совместной собственной функцией для операторов, входящих в (6).

Функцией Бейкера–Ахиезера  $\psi(x, t, P)$ , отвечающей спектральным данным

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\},$$

называется функция, которая обладает свойствами:

1. в точке  $q$  функция  $\psi$  имеет существенную особенность вида

$$\psi = e^{xk+tk^3} \left( 1 + \frac{\xi_1(x, t)}{k} + \frac{\xi_2(x, t)}{k^2} + \dots \right).$$

2. на  $\Gamma - \{q\}$  функция  $\psi$  мероморфна с простыми полюсами в  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ .

Для неспециального дивизора  $\gamma_1 + \dots + \gamma_g$  функция  $\psi$  существует и единственна.

В случае когда спектральная кривая гладкая функция Бейкера–Ахиезера выражается через тэта-функцию спектральной кривой  $\Gamma$ .

Пусть  $\Gamma$  — гиперэллиптическая кривая.

$$w^2 = (z - z_1) \dots (z - z_{2g+1})$$

и  $q = \infty \in \Gamma$ . Функция  $z$  имеет полюс второго порядка в  $q$ , а функция  $w$  — порядок  $2g + 1$ . Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned}(\partial_x^2 + u(x, t))\psi &= z\psi, & L_{2g+1}\psi &= w\psi, \\(\partial_t - A)\psi &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что  $u$  — решение КдФ.

Рассмотрим вырожденный случай — сферы с  $g$  двойными точками.

**Пример 13.** Пусть  $\Gamma = \mathbb{C}P^1 / \{a_1 \sim -a_1, \dots, a_g \sim -a_g\}$ ,  $q = \infty \in \Gamma$ . Арифметический род такой кривой равен  $g$ . Функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(x, t, z) = e^{xz+tz^3} \left( 1 + \frac{\xi_1(x, t)}{z - \gamma_1} + \dots + \frac{\xi_g(x, t)}{z - \gamma_g} \right).$$

Функция  $\psi$  удовлетворяет следующим условиям

$$\psi(x, t, a_1) = \psi(x, t, -a_1), \dots, \psi(x, t, a_g) = \psi(x, t, -a_g),$$

из которых находятся  $\xi_1, \dots, \xi_g$ . Из равенства

$$(\partial_x^2 + u(x, t))\psi = z^2\psi$$

находим решение КдФ. При  $\gamma_i, a_i \in \mathbb{R}$  получаем  $n$ -солитонное решение КдФ.

При  $g = 1, \gamma_1 = 0$  получаем односолитонное решение (см. рис. 1)

$$u(x, t) = \frac{2a^2}{\cosh^2(a(x + a^2t))}.$$

При  $g = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 3, a_1 = 2, a_2 = 4$  (рис. 12) получаем двухсолитонное решение (см. рис. 4 – 6)

$$u(x, t) =$$

$$\frac{160e^{16t+4x}(9 + 28e^{112t+4x} + 630e^{128t+8x} + 6300e^{144t+12x} + 1225e^{256t+16x})}{(1 + 45e^{16t+4x} + 35e^{128t+8x} + 175e^{144t+12x})^2}.$$

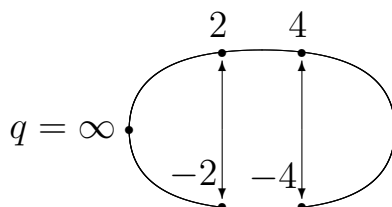


Рис. 12

### Лекция 3. Ортогональные криволинейные системы координат в евклидовом пространстве

В этой лекции мы рассмотрим очень интересную и важную задачу построения ортогональных криволинейных координат в  $\mathbb{R}^n$ . Эта задача интересна как с точки зрения классической дифференциальной геометрии так и с точки зрения современной математической физики (см. [6],[7],[8],[9]).

Криволинейные координаты  $u = (u^1, \dots, u^n)$  в  $\mathbb{R}^n$  называются ортогональными, если метрика в этих координатах принимает диагональный вид

$$ds^2 = H_1^2(u)(du^1)^2 + \dots + H_n^2(u)(du^n)^2. \quad (7)$$

Функции  $H_i$  называются коэффициентами Ламе. Пусть  $x = (x^1, \dots, x^n)$  — евклидовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , тогда условие ортогональности эк-

бивалентно условию

$$\frac{\partial x^1}{\partial u^i} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \frac{\partial x^n}{\partial u^j} = 0, \quad i \neq j.$$

Приведем несколько примеров криволинейных ортогональных координат.

**Полярные координаты:**

$$x = u^1 \cos u^2, \quad y = u^1 \sin u^2.$$

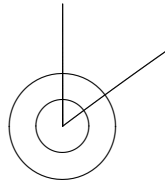


Рис. 13

Координатные линии — концентрические окружности с центром в  $(0, 0)$  и лучи, выходящие из  $(0, 0)$  (рис. 13).

**Эллиптические координаты:**

$$x = \cosh u^1 \cos u^2, \quad y = \sinh u^1 \sin u^2.$$

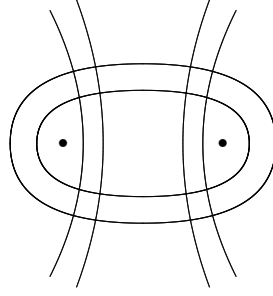


Рис. 14

Координатные линии — софокусные эллипсы и ортогональные им софокусные гиперболы (рис. 14).

**Сферические координаты:**

$$x = u^1 \cos u^2 \sin u^3, \quad y = u^1 \cos u^2 \cos u^3, \quad z = u^1 \sin u^2.$$

Условие зануления тензора кривизны метрики (7) имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial u^k} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} + \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial u^j} \frac{\partial H_i}{\partial u^k}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \right) + \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial u^i} \right) + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{1}{H_k^2} \frac{\partial H_i}{\partial u^k} \frac{\partial H_j}{\partial u^k} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) эквивалентны условию  $R_{ijk} = 0$ ,  $j \neq k$ , а уравнения (9) эквивалентны условию  $R_{ijj} = 0$ . В силу диагональности метрики все остальные компоненты тензора кривизны зануляются автоматически. Система уравнений (8), (9) переопределена. Число уравнений в (8) равно  $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ , а в (9) —  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Оказывается, что общее решение системы (8), (9) зависит от  $\frac{n(n-1)}{2}$  функций двух переменных. Введем коэффициенты вращения

$$\beta_{ij} = \frac{\partial u^i H_j}{H_i}, \quad i \neq j.$$

Тогда уравнения (8), (9) принимают вид

$$\partial_{u^k} \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \quad (10)$$

$$\partial_{u^i}\beta_{ij} + \partial_{u^j}\beta_{ij} + \sum_{k \neq i,l} \beta_{ki}\beta_{kj} = 0, \quad i \neq j. \quad (11)$$

По коэффициентам вращения коэффициенты Ламе находятся как решение задачи Коши

$$H_i(0, \dots, 0, u^i, 0, \dots, 0) = h_i(u^i),$$

а координатные функции  $x^j(u)$  находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \partial_{u^l} x^k,$$

где символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad i \neq j \neq k; \quad \Gamma_{kj}^k = \frac{\partial_{u^j} H_k}{H_k}; \quad \Gamma_{ii}^k = -\frac{H_i \partial_{u^k} H_i}{(H_k)^2}, \quad k \neq i.$$

Уравнения (10) — это известная задача  $n$ -волн, а уравнения (11) — дополнительное ограничение на решения этой задачи. Впервые методы интегрируемых систем к (10),(11) применены Захаровым [8]. Мы рассмотрим метод функций Бейкера–Ахиезера построения  $n$ -ортогональных криволинейных систем координат [9].

**Многоточечная функция Бейкера–Ахиезера.** Рассмотрим следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, P_1, \dots, P_n, \gamma_1, \dots, \gamma_{g+l-1}, R_1, \dots, R_l\},$$

$P_i, \gamma_i, R_i \in \Gamma$ . Выберем локальные координаты  $k_i^{-1}$  около выделенных точек  $P_i \in \Gamma$ . Предположим, что дивизор  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l-1}$  неспециален. Существует единственная функция  $\psi(u, P), P \in \Gamma$ , которая удовлетворяет следующим условиям.

1. В окрестности точки  $P_i$  справедливо разложение

$$\psi = e^{k_i u^i} \left( \xi_i^0(u) + \frac{\xi_i^1(u)}{k_i} + \dots \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. На  $\Gamma - \{\cup_i^n P_i\}$  функция  $\psi$  мероморфна с простыми полюсами в  $\gamma_i$ .

3.  $\psi(R_i) = d_i, \quad i = 1, \dots, l,$

$$|d_1|^2 + \dots + |d_l|^2 \neq 0.$$

Функция  $\psi(u, P)$  называется *n-точечной функцией Бейкера–Ахиезера*.

В случае гладкой спектральной кривой  $\psi$  выражается через тэта-функцию многообразия Якоби кривой  $\Gamma$ .

Пусть  $Q_1, \dots, Q_n \in \Gamma$  — дополнительный набор точек. Положим

$$x^j = \psi(Q_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$Q = Q_1 + \dots + Q_n, \quad P = P_1 + \dots + P_n, \quad R = R_1 + \dots + R_l.$$

**Теорема 1** (И.М. Кричевер). *Предположим, что на  $\Gamma$  существует голоморфная инволюция*

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \sigma^2 = 1,$$

*такая, что*

$$\sigma(P_i) = P_i, \quad \sigma k_i = -k_i, \quad \sigma(Q_i) = Q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Предположим также, что на  $\Gamma$  существует мероморфная форма  $\Omega$  с дивизором нулей и полюсов*

$$(\Omega) = \gamma + \sigma\gamma + P - R - \sigma(R) - Q,$$

*с условием на вычеты*

$$\text{Res}_{Q_1} \Omega = \dots = \text{Res}_{Q_n} \Omega. \tag{12}$$

*Тогда*

$$\frac{\partial x^1}{\partial u^j} \frac{\partial x^1}{\partial u^i} + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \frac{\partial x^n}{\partial u^i} = 0, \quad i \neq j.$$

Дадим доказательство этой теоремы. Рассмотрим форму  $\omega_{ij} = \partial_{u^i}\psi(u, P)\partial_{u^j}\psi(u, \sigma P)\Omega$ . Форма  $\omega_{ij}$  мероморфна и имеет простые полюса только в  $Q_i$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^n \operatorname{Res}_{Q_k} \omega_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial u^j} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \operatorname{Res}_{Q_k} \Omega = \\ &= \operatorname{Res}_{Q_k} \Omega \left( \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \frac{\partial x^1}{\partial u^i} + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $x^j$  вещественны, то  $x^j$  — координатные функции  $n$ -ортогональной системы координат в евклидовом пространстве.

### Приводимые спектральные кривые

Теорема Кричевера остается верной и для сингулярных спектральных кривых [10]. Мы рассмотрим случай, когда  $\Gamma$  — приводимая кривая, состоящая из компонент  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ , каждая из которых изоморфна  $\mathbb{C}P^1$ . Компоненты пересекаются по некоторому набору точек. В этом случае функция Бейкера–Ахиезера  $\psi$  задается набором функций  $\psi_1, \dots, \psi_s$  на компонентах  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ . Если точка  $a \in \Gamma_p$  отождествляется с  $b \in \Gamma_q$ , то функции  $\psi_p$  и  $\psi_q$  удовлетворяют требованию

$$\psi_p(u, a) = \psi_q(u, b).$$

Дифференциал  $\Omega$  на  $\Gamma$  задается набором дифференциалов  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  на компонентах  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ . В точках пересечения  $\Omega_i$  могут иметь простые полюса первого порядка, причем должно выполняться условие на вычеты

$$\operatorname{Res}_a \Omega_p + \operatorname{Res}_b \Omega_q = 0.$$

Регулярным дифференциалом на  $\Gamma$  называется дифференциал, который регулярен вне точек пересечения. *Арифметическим родом*  $\Gamma$  называется размерность пространства регулярных дифференциалов на  $\Gamma$ . Теорема Кричевера верна для приводимой кривой  $\Gamma$ , если в



формулировке заменить род на арифметический род и учесть перечисленные изменения. Доказательство такое же как и в гадком случае, нужно просуммировать вычеты форм

$$\omega_{ij}^s = \partial_{u^i} \psi_s(u, P) \partial_{u^i} \psi_s(u, \sigma P) \Omega_s$$

по всем неприводимым компонентам. Для таких приводимых кривых функция Бейкера–Ахиезера и координатные функции ортогональных криволинейных координат выражаются через элементарные функции. Разберем несколько примеров.

**Пример 14.** Пусть кривая  $\Gamma$  состоит из двух экземпляров  $\mathbb{C}P^1$ , которые пересекаются по двум точкам (рис. 15)

$$a \sim b, \quad -a \sim -b.$$

Существенные особенности лежат на одной компоненте  $\Gamma_1$ , а дивизор  $Q$  лежит на компоненте  $\Gamma_2$

$$P_1 = \infty, P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad Q_1 = \infty, Q_2 = 0 \in \Gamma_2.$$

Зададим функцию Бейкера–Ахиезера следующим образом:

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} \left( f_0(u) + \frac{f_1(u)}{z_1 - \alpha_1} + \dots + \frac{f_k(u)}{z_1 - \alpha_{s_1}} \right), \quad z_1 \in \Gamma_1,$$

$$\psi_2(u, z_2) = \left( g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - \beta_1} + \dots + \frac{g_n(u)}{z_2 - \beta_{s_2}} \right), \quad z_2 \in \Gamma_2,$$

условие склейки и нормировки имеет вид

$$\psi_1(R_{1,i}) = d_{1,i}, \quad \psi_2(R_{2,j}) = d_{2,j},$$

$$\psi_1(u, a) = \psi_2(u, b), \quad \psi_1(u, -a) = \psi_2(u, -b),$$

где  $R_{1,i} \in \Gamma_1, i = 1, \dots, l_1$  и  $R_{2,j} \in \Gamma_2, j = 1, \dots, l_2, l = l_1 + l_2 = s_1 + s_2$ .

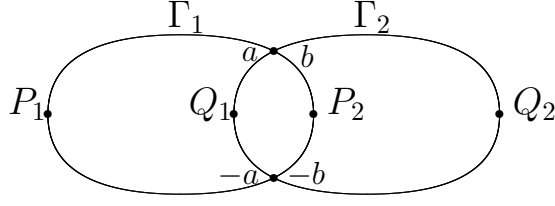


Рис. 15.

Пусть

$$\Omega_1 = \frac{z_1(z_1^2 - \alpha_1^2) \dots (z_1^2 - \alpha_{l_1-1}^2)}{(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - R_{1,1}^2) \dots (z_1^2 - R_{1,l_1}^2)} dz_1,$$

$$\Omega_2 = \frac{(z_2^2 - \beta_1^2) \dots (z_2^2 - \beta_{l_2+1}^2)}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - R_{2,1}^2) \dots (z_2^2 - R_{2,l_2}^2)} dz_2.$$

Как отмечалось выше, если

$$\operatorname{res}_a \Omega_1 = -\operatorname{res}_b \Omega_2, \quad \operatorname{res}_{-a} \Omega_1 = -\operatorname{res}_{-b} \Omega_2, \quad \operatorname{res}_{Q_1} \Omega_2 = \operatorname{res}_{Q_2} \Omega_2,$$

то

$$\partial_{u^1} x^1 \partial_{u^2} x^1 + \partial_{u^1} x^2 \partial_{u^2} x^2 = 0.$$

Рассмотрим простейший случай:  $l_1 = s_2 = 1, l_2 = s_1 = 0, r = R \in \Gamma_1, d_{1,1} = 1$ . Тогда

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f(u), \quad \psi_2 = \left( g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - c} \right),$$

$$\Omega_1 = \frac{z_1}{(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - r^2)} dz_1, \quad \Omega_2 = -\frac{(z_2^2 - c^2)}{z_2(z_2^2 - b^2)} dz_2.$$

Имеем

$$\operatorname{res}_a \Omega_1 = \operatorname{res}_{-a} \Omega_1 = \frac{1}{2(a^2 - r^2)}, \quad \operatorname{res}_b \Omega_2 = \operatorname{res}_{-b} \Omega_2 = \frac{(b^2 - c^2)}{2b^2},$$

$$\operatorname{res}_{Q_1} \Omega_2 = 1, \quad \operatorname{res}_{Q_2} \Omega_2 = -\frac{b^2}{c^2}.$$

Условия регулярности  $\Omega$  и (12) выполнены, когда

$$b = \pm ic, \quad a^2 - r^2 = -\frac{1}{2}.$$

Для частного решения  $b = i$ ,  $c = -1$ ,  $a = \frac{i}{2}$ ,  $r = \frac{1}{2}$ , координатные функции принимают вид

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left( \cos \left( \frac{u^1}{2} - 2u^2 \right) + \sin \left( \frac{u^1}{2} - 2u^2 \right) \right), \\ x^2 &= e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left( \cos \left( \frac{u^1}{2} - 2u^2 \right) - \sin \left( \frac{u^1}{2} - 2u^2 \right) \right). \end{aligned}$$

После замены

$$y^1 = \frac{u^1}{2}, \quad y^2 = 2u^2$$

получим

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{-y^1 - y^2} (\cos(y^1 - y^2) + \sin(y^1 - y^2)), \\ x^2 &= e^{-y^1 - y^2} (\cos(y^1 - y^2) - \sin(y^1 - y^2)). \end{aligned}$$

Координатные линии — спирали, закрученные в разные стороны.

**Пример 15.** Пусть  $\Gamma$  состоит из трех компонент  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ , гомеоморфных  $\mathbb{C}P^1$ , пересекающихся по четырем точкам, как это показано на рис. 16:

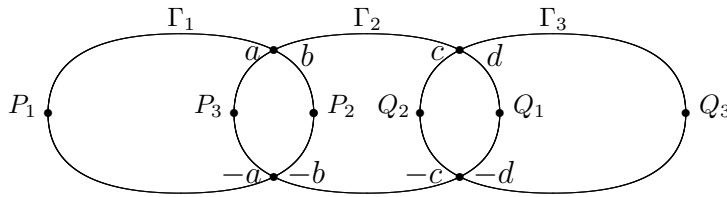


Рис. 16

$$\pm a \sim \pm b, \quad \pm c \sim \pm d, \quad \pm a \in \Gamma_1, \quad \pm b, \pm c \in \Gamma_2, \quad \pm d \in \Gamma_3.$$

Положим

$$\begin{aligned} P_1 &= \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad P_3 = \infty \in \Gamma_2, \\ Q_1 &= 0 \in \Gamma_2, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_3, \quad Q_3 = 0 \in \Gamma_3, \\ l &= 1, \quad r = R \in \Gamma_1, \quad \psi_1(r) = 1. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(u, z_1) &= e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f(u), \quad z_1 \in \Gamma_1, \\ \psi_2(u, z_2) &= e^{u^3 z_2} \left( g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - \beta} \right), \quad z_2 \in \Gamma_2, \\ \psi_3(u, z_3) &= h_0(u) + \frac{h_1(u)}{z_3 - \gamma}, \quad z_3 \in \Gamma_3, \end{aligned}$$

а также

$$\psi_1(\pm a) = \psi_2(\pm b), \quad \psi_2(\pm c) = \psi_3(\pm d), \quad \psi_1(r) = 1.$$

Возьмем  $\Omega$  заданный дифференциалами

$$\Omega_1 = \frac{z_1 dz_1}{(z_1^2 - a^2)(r^2 - z_1^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{(\beta^2 - z_2^2) dz_2}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)}, \quad \Omega_3 = \frac{(\gamma^2 - z_3^2) dz_3}{z_3(z_3^2 - d^2)}.$$

Условие регулярности  $\Omega$  и условие (12) выполнено при

$$a^2 = -\frac{1}{12}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = d = i, \quad \beta = bc, \quad \gamma = -1$$

и в этом случае мы имеем

$$x^1 = \sqrt{2} e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \cos \left( \frac{1}{12} (3\pi + 2\sqrt{3}(u^1 - 2(6u^2 + u^3))) \right),$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \sqrt{2}e^{-\frac{u^1}{2}-2u^2} \left( \cos\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + u^3\right) + \right. \\
&\quad \left. \sin\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + u^3\right) \right), \\
x^3 &= \sqrt{2}e^{-\frac{u^1}{2}-2u^2} \left( \cos\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + u^3\right) - \right. \\
&\quad \left. \sin\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12} + u^3\right) \right).
\end{aligned}$$

Укажем спектральные данные для некоторых классических систем координат.

**Евклидова система координат.** Пусть  $\Gamma$  является объединением  $n$  экземпляров  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  комплексной проективной прямой  $\mathbb{C}P^1$ . Положим

$$P_j = \infty, \quad Q_j = 0, \quad R_j = -1 \in \Gamma_j, \quad \psi_j(R_j) = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда дифференциал  $\Omega$  задается дифференциалами

$$\Omega_j = \frac{dz_j}{z_j(z_j^2 - 1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

на компонентах  $\Gamma$ . Функция Бейкера–Ахиезера  $\psi$  равна

$$\psi_j = e^{u^j z_j} f_j(u^j), \quad j = 1, \dots, n$$

и мы получаем евклидовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ :

$$x^j = e^{u^j}.$$

**Полярные координаты.** Пусть  $\Gamma$  состоит из пяти неприводимых компонент  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ , которые пересекаются, как показано на рис. 17:

$$\{0 \in \Gamma_1\} \sim \{0 \in \Gamma_2\}, \quad \{a \in \Gamma_2\} \sim \{b_1 \in \Gamma_3\}, \quad \{-a \in \Gamma_2\} \sim \{b_2 \in \Gamma_4\},$$

$$\{c_1 \in \Gamma_3\} \sim \{d \in \Gamma_5\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_4\} \sim \{-d \in \Gamma_5\}.$$

Зададим инволюцию  $\sigma$  на  $\Gamma$  следующим образом:

а) на  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  инволюция имеет вид

$$\sigma(z_j) = -z_j;$$

б)  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  переставляются под действием  $\sigma$  и точки  $b_1, c_1, \infty \in \Gamma_3$  отображаются в точки  $b_2, c_2, \infty \in \Gamma_4$  соответственно.

Несложно проверить, что

$$\sigma(z_3) = \frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1} z_3 + \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 - c_1},$$

$$\sigma(z_4) = \frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2} z_4 + \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 - c_2}.$$

Положим

$$\beta_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 - c_2}, \quad \beta_2 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 - c_1},$$

тогда  $0 \in \Gamma_3$  отображается по действию  $\sigma$  в  $\beta_2 \in \Gamma_4$ , а  $0 \in \Gamma_4$  отображается в  $\beta_1 \in \Gamma_3$ .

В качестве дивизоров  $P = P_1 + P_2$  и  $Q = Q_1 + Q_2$  возьмем

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad Q_1 = 0 \in \Gamma_5, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_5.$$

Возьмем в качестве  $D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  дивизор

$$\gamma_1 = 0 \in \Gamma_3, \quad \gamma_2 = 0 \in \Gamma_4, \quad \gamma_3 = \alpha \in \Gamma_5.$$

Так как  $\deg D = g + l - 1 = 3$  и  $g = 1$ , мы имеем  $l = 3$ . Положим

$$R_1 = -1 \in \Gamma_1, \quad R_2 = \infty \in \Gamma_4, \quad R_3 = \infty \in \Gamma_5.$$

Тогда функция Бейкера–Ахиезера принимает вид

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1} f_1(u), \quad \psi_2(u, z_2) = e^{u^2 z_2} f_2(u),$$

$$\psi_3(u, z_3) = \frac{f_3(u)}{z_3} + \widehat{f}_3(u), \quad \psi_4(u, z_4) = \frac{f_4(u)}{z_4} + \widehat{f}_4(u),$$

$$\psi_5(u, z_5) = f_5(u) + \frac{\widehat{f}_5(u)}{z_5 - \alpha}.$$

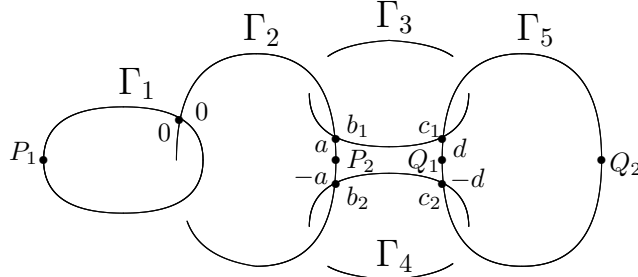


Рис. 17

Имеем

$$\psi_1(u, 0) = \psi_2(u, 0), \quad \psi_2(u, a) = \psi_3(u, b_1), \quad \psi_2(u, -a) = \psi_4(u, b_2),$$

$$\psi_3(u, c_1) = \psi_5(u, d), \quad \psi_4(u, c_2) = \psi_5(u, -d).$$

Возьмем следующие условия нормировки:

$$\psi_1(u, -1) = 1, \quad \psi_3(u, \infty) = 0, \quad \psi_4(u, \infty) = 0.$$

Это дает

$$f_1 = e^{u^1}, \quad f_2 = e^{u^1}, \quad f_3 = e^{u^1+au^2}, \quad \widehat{f}_3 = 0, \quad f_4 = e^{u^1-au^2}, \quad \widehat{f}_4 = 0,$$

$$f_5 = \frac{e^{u^1-au^2}(b_1c_2e^{2au^2}(d-\alpha) + b_2c_1(d+\alpha))}{2c_1c_2d},$$

$$\widehat{f}_5 = \frac{e^{u^1-au^2}(-b_2c_1 + e^{2au^2}b_1c_2)(d^2 - \alpha^2)}{2c_1c_2d}.$$

Прямыми вычислениями легко проверить, что при

$$a = i, \quad b_1 = \bar{b}_2 = \frac{i}{2}, \quad c_1 = \bar{c}_2 = \frac{i-1}{2}, \quad d = -i\alpha$$

дифференциал  $\Omega$ , заданный дифференциалами

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - 1)}, \quad \Omega_2 = -\frac{dz_2}{z_2(z_2^2 - a^2)}, \quad \Omega_3 = -\frac{z_3(z_3 - \beta_1)dz_3}{(z_3 - b_1)(z_3 - c_1)},$$

$$\Omega_4 = -\frac{z_4(z_4 - \beta_2)dz_4}{(z_4 - b_2)(z_4 - c_2)}, \quad \Omega_5 = -\frac{(z_5^2 - \alpha^2)dz_5}{z_5(z_5^2 - d^2)},$$

регулярен на  $\Gamma$  и удовлетворяет условию (12), а

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r \cos \varphi, \quad x^2 = \psi_5(Q_2) = r \sin \varphi,$$

где  $r = e^{u^1}$  и  $\varphi = u^2$ .

**Цилиндрические координаты.** В качестве  $\Gamma$  возьмем несвязное объединение кривой из предыдущего примера  $\widehat{\Gamma}$  (полярные координаты) и копию  $\Gamma_6$  кривой  $\mathbb{C}P^1$ . Все данные относящиеся к  $\widehat{\Gamma}$  — те же самые, что и в предыдущем примере. На  $\Gamma_6$  возьмем  $Q_3 = 0, P_3 = \infty, R_4 = -1$  и  $\psi(R_4) = 1$ . Тогда мы имеем  $\psi_6(u^3) = e^{u^3(z_6+1)}$  и

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r \cos \varphi, \quad x^2 = \psi_5(Q_2) = r \sin \varphi, \quad x^3 = \psi_6(Q_3) = z,$$

где  $r = e^{u^1}, \varphi = u^2$  и  $z = u^3$ .

**Сферические координаты в  $\mathbb{R}^3$ .** Кривая  $\Gamma$  состоит из 9 неприводимых компонент, которые пересекаются, как это показано на рис. 18:

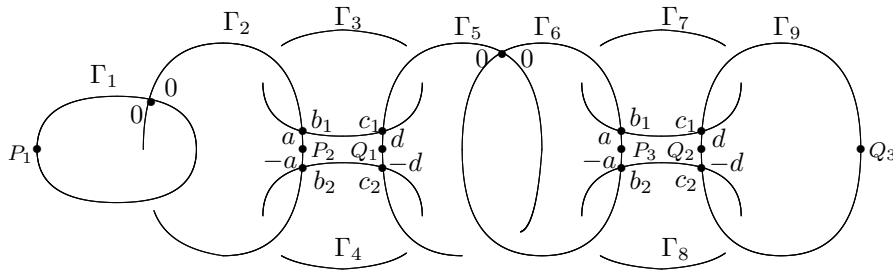


Рис. 18



$$\begin{aligned}
\{0 \in \Gamma_1\} \sim \{0 \in \Gamma_2\}, \quad \{a \in \Gamma_2\} \sim \{b_1 \in \Gamma_3\}, \quad \{-a \in \Gamma_2\} \sim \{b_2 \in \Gamma_4\}, \\
\{c_1 \in \Gamma_3\} \sim \{d \in \Gamma_5\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_4\} \sim \{-d \in \Gamma_5\}, \quad \{0 \in \Gamma_5\} \sim \{0 \in \Gamma_6\}, \\
\{a \in \Gamma_6\} \sim \{b_1 \in \Gamma_7\}, \quad \{-a \in \Gamma_6\} \sim \{b_2 \in \Gamma_8\}, \\
\{c_1 \in \Gamma_7\} \sim \{d \in \Gamma_9\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_8\} \sim \{-d \in \Gamma_9\},
\end{aligned}$$

где, для простоты, мы обозначаем одним и тем же символом точки в разных компонентах, если координаты этих точек совпадают (например,  $a$  в  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_6$ ).

Возьмем

$$Q_1 = \infty \in \Gamma_5, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_9, \quad Q_3 = 0 \in \Gamma_9,$$

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad P_3 = \infty \in \Gamma_6$$

и выберем дивизор  $D$  следующим образом

$$\gamma_1 = 0 \in \Gamma_3, \quad \gamma_2 = 0 \in \Gamma_4, \quad \gamma_3 = \alpha \in \Gamma_5,$$

$$\gamma_4 = 0 \in \Gamma_7, \quad \gamma_5 = 0 \in \Gamma_8, \quad \gamma_6 = \alpha \in \Gamma_9.$$

Арифметический род  $\Gamma$  равен 2,  $\deg D = 6$ , и следовательно,  $l = 5$ . Положим

$$R_1 = -1 \in \Gamma_1, \quad R_2 = \infty \in \Gamma_3, \quad R_3 = \infty \in \Gamma_4, \quad R_4 = \infty \in \Gamma_7, \quad R_5 = \infty \in \Gamma_8.$$

Функция Бейкера–Ахиезера записывается следующим образом

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1} f_1(u), \quad \psi_2 = e^{u^2 z_2} f_2(u), \quad \psi_3 = \frac{f_3(u)}{z_3} + \widehat{f}_3(u),$$

$$\psi_4 = \frac{f_4(u)}{z_4} + \widehat{f}_4(u), \quad \psi_5 = f_5(u) + \frac{\widehat{f}_5(u)}{(z_5 - \alpha)}, \quad \psi_6 = e^{u^3 z_6} f_6(u),$$

$$\psi_7 = \frac{f_7(u)}{z_7} + \widehat{f}_7(u), \quad \psi_8 = \frac{f_8(u)}{z_8} + \widehat{f}_8(u), \quad \psi_9 = f_9(u) + \frac{\widehat{f}_9(u)}{z_9 - \alpha}.$$

Имеем следующие условия склейки (для краткости мы опускаем переменные  $u$ ):

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), & \psi_2(a) &= \psi_3(b_1), & \psi_2(-a) &= \psi_4(b_2), & \psi_3(c_1) &= \psi_5(d), \\ \psi_4(c_2) &= \psi_5(-d), & \psi_5(0) &= \psi_6(0), & \psi_6(a) &= \psi_7(b_1), & \psi_6(-a) &= \psi_8(b_2), \\ & & \psi_7(c_1) &= \psi_9(d), & \psi_8(c_2) &= \psi_9(-d). \end{aligned}$$

Возьмем следующие условия нормировки:

$$\psi_1(u, -1) = 1, \quad \psi_3(u, \infty) = 0, \quad \psi_4(u, \infty) = 0, \quad \psi_7(u, \infty) = 0, \quad \psi_8(u, \infty) = 0.$$

Пусть  $a, b_1, b_2, c_1, c_2, d$  принимают те же значения, что и в случае полярных координат и тогда регулярная форма  $\Omega$  строится как и в этом случае. Прямыми вычислениями получаем

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r \sin \varphi,$$

$$x^2 = \psi_9(Q_2) = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x^3 = \psi_9(Q_3) = r \cos \varphi \cos \theta,$$

где  $r = e^{u^1}$ ,  $\varphi = u^2$  и  $\theta = u^3$ .

**Сферические координаты в  $\mathbb{R}^n$ .** Пусть  $\Gamma^{(n-1)}$  — спектральная кривая и  $\psi^{(n-1)}$  — функции Бейкера–Ахиезера для  $(n-1)$ -мерных сферических координат. Спектральная кривая  $\Gamma^{(n)}$  для  $n$ -мерных сферических координат строится как объединение  $\Gamma^{(n-1)}$  и кривой, изображенной на рис. 19. При этом эти кривые пересекаются по точкам  $0 \in \Gamma_{4n-7} \subset \Gamma^{(n-1)}$  и  $0 \in \Gamma_{4n-6}$  (заметим, что число неприводимых компонент  $\Gamma^{(k)}$  равно  $4k-3$ ). Кроме того мы имеем

$$P_n = \infty \in \Gamma_{4n-6}, \quad Q_{n-1} = \infty, \quad Q_n = 0 \in \Gamma_{4n-3}.$$

На  $\Gamma^{(n-1)}$  функция Бейкера–Ахиезера совпадает с  $\psi^{(n-1)}$  и на дополнительных компонентах она определяется следующим образом:

$$\psi_{4n-6} = e^{u^n z_{4n-6}} f_{4n-6}(u), \quad \psi_{4n-5} = \frac{f_{4n-5}(u)}{z_{4n-5}},$$

$$\psi_{4n-4} = \frac{f_{4n-4}(u)}{z_{4n-4}}, \quad \psi_{4n-3} = f_{4n-3}(u) + \frac{\widehat{f}_{4n-3}(u)}{z_{4n-3} - \alpha}.$$

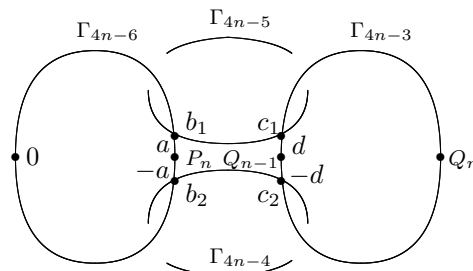


Рис. 19

Интересной задачей является задача нахождения спектральных данных для других классических ортогональных криволинейных координат, например, для эллиптической системы координат.

Применение изложенных методов для построения фробениусовых многообразий можно найти в [11].

## Список литературы

- [1] С.П. Новиков. *Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза. I.* Функциональный анализ и его прилож. **8:3** (1974), 54–66.
- [2] Б.А. Дубровин. *Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.* Функциональный анализ и его прилож. **9:3** (1975), 41–51.

- [3] А.Р. Итс, В.Б. Матвеев. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и  $N$ -солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза*. Теоретическая и математическая физика. **23**:1 (1975), 51–68.
- [4] И.М. Кричевер. *Коммутирующие кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*. Функциональный анализ и его прилож. **12**:3 (1978), 20–31.
- [5] И.М. Кричевер. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии*. Функциональный анализ и его прилож., **11**:1 (1977), 15–31.
- [6] G. Darboux. *Lecons sur le Systemés Ortogonaux et Coordonnées Curvilignes*, Gauthier–Villars, Paris, 1910.
- [7] B. Dubrovin. *Geometry of 2D topological field theories. Lecture Notes in Math.* 1620. Springer, Berlin, 1995, 120–348.
- [8] V.E. Zakharov. *Description of the  $n$ -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equation*. Duke Math. J. **94** (1998), 103–139.
- [9] Кричевер И.М. *Алгебро-геометрические  $n$ -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности*. Функц. анализ и его прил. **31**:1 (1997), 32–50.
- [10] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. *Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым*. Труды матем. института РАН. **255** 2006. 180–196.

- [11] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. *О некоторых алгебраических примерах фробенесовых многообразий*. Теорет. и матем. физ. **151**:2 2007. 195–206.