Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет »

На правах рукописи

Маулешова Гульнара Сайновна

Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1 и ранга 2

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д. ф.–м. н., член–корреспондент РАН
А. Е. Миронов

Новосибирск — 2018

Содержание

Введение

Диссертация посвящена исследованию алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода. В диссертационной работе в случае операторов ранга 2 получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода. Изучен новый класс операторов, а именно алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один. В эти операторы оператор сдвига входит только с положительными степенями. Найдены спектральные данные и примеры таких операторов в случае гиперэллиптических спектральных кривых. Также установлена связь таких операторов с одномерными конечнозонными операторами Шредингера, в частности, получена дискретизация конечнозонных операторов Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Напомним необходимые нам определения. Пусть L_k, L_s — разностные операторы порядков k и s

$$L_k = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n) T^j, \quad L_s = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n) T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$N_+ \geq N_- \geq 0,\ M_+ \geq M_- \geq 0,\ k = N_- + N_+,\ s = M_- + M_+,\ T$ — оператор сдвига, условие их коммутируемости эквивалентно сложной системе нелинейных разностных уравнений на их коэффициенты. Эти уравнения изучаются, начиная с начала 20–го века (см. [1]). Для коммутирующих разностных операторов справедлив аналог леммы Бурхналла–Чаунди [2]. А именно, если $L_k L_s = L_s L_k$, то существует ненулевой полином $F(z, w)$ такой, что $F(L_k, L_s) = 0$ [3]. Полином F задает *спектральную кривую* пары L_k, L_s

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | F(z, w) = 0\}.$$

Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа, если

$$L_k \psi = z\psi, \qquad L_s \psi = w\psi,$$

то $(z, w) \in \Gamma$. *Рангом* пары L_k, L_s называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных собственных числах

$$l = \dim\{\psi : L_k \psi = z\psi, \quad L_s \psi = w\psi\},$$

при этом предполагается, что точка $(z, w) \in \Gamma$ находится в общем положении. Таким образом, спектральная кривая и ранг определяются точно также, как и в случае коммутирующих дифференциальных операторов. В целом, между теориями коммутирующих дифференциальных и разностных операторов существует много общего, но есть и существенные различия, которые мы упомянем ниже.

Коммутирующие разностные и дифференциальные операторы имеют важные приложения в солитонных уравнениях. В частности, И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [4, 5] открыт замечательный класс точных решений солитонных уравнений — алгебро–геометрических решений ранга $l > 1$. Этот класс выделяется следующим условием. Совместные собственные функции вспомогательных коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов или их разностных аналогов образуют векторное расслоение ранга l над спектральной кривой Γ. В случае спектральной кривой рода $g = 1$ в [4, 5] найдены решения ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили и $2D$–цепочки Тоды. Основной трудностью при построении таких решений является задача построения коммутирующих операторов высокого ранга и их деформаций. Задача классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $l > 1$ решена в [6], а задача классификация коммутирующих разностных операторов существенно развита в работах [4, 5, 7]. Нахождение операторов ранга $l > 1$ в общем случае является открытой проблемой.

Прежде чем продолжить обсуждение разностных операторов, остановимся на дифференциальных операторах. И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [4], с помощью предложенного ими метода деформации параметров Тюрина, найдены операторы ранга два при $g = 1$. Эти операторы изучались в [8]–[14] (см. также [15], [16]). При $l = 3,\ g = 1$ операторы найдены О.И. Моховым [17] (см. также [18]). Операторы ранга l с периодическими коэффициентами изучались в [19]. В последнее время было получено много интересных результатов об операторах ранга $l > 1$ при $g > 1$ [20]–[36].

Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_k и L_s, изоморфно кольцу мероморфных функций на некоторой алгебраической кривой с полюсами в выделенных точках $q_1, \dots, q_m$ (см. [4]). Такие операторы называются m–точечными. Отметим, что любое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с единственным полюсом. В этом заключается одно из основных отличий коммутирующих дифференциальных и разностных операторов. Совместные собственные функции (функции Бейкера–Ахиезера) строятся по спектральным данным. Спектральные данные для двухточечных разностных коммутирующих операторов ранга 1 найдены И.М. Кричевером [3] (см. также [37]). Собственные функции таких операторов явно находятся через тэта–

функции спектральных кривых. Классификация m–точечных операторов ранга l существенно развита в [4]. В частности, в этой работе найдены спектральные данные для одноточечных операторов ранга $l > 1$. При этом, в случае ранга $l > 1$ собственные функции не могут быть найдены явно и нахождение таких операторов — открытая проблема. Одноточечные операторы ранга два, отвечающие эллиптической спектральной кривой, найдены в [4], операторы с полиномиальными коэффициентами среди этих операторов найдены в [38]. В случае спектральных кривых рода $g > 1$ и ранга l ранее не было известно примеров одноточечных коммутирующих разностных операторов до работы [1*].

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы насчитывает 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

Основные результаты **главы 1** заключаются в следующем.

В настоящей главе рассматриваются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга два $L_4,\ L_{4g+2}$, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой Γ рода g, заданной уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + \ldots + c_0, \qquad (1)$$

при этом

$$L_4 = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \quad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i, \quad u_2 = v_{2g+1} = 1, \qquad (2)$$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n, P), \quad P = (z, w) \in \Gamma. \qquad (3)$$

Совместные собственные функции L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют уравнению (см. [4])

$$\psi(n+1, P) = \chi_1(n, P)\psi(n-1, P) + \chi_2(n, P)\psi(n, P), \qquad (4)$$

функции $\chi_1(n, P)$ и $\chi_2(n, P)$ рациональны на Γ и имеют $2g$ простых полюсов, зависящих от n. Функция $\chi_2(n, P)$ дополнительно имеет простой полюс в бесконечно удаленной точке q. Для того, чтобы найти L_4 и L_{4g+2} достаточно найти χ_1 и χ_2. Пусть σ — инволюция на Γ, $\sigma(z, w) = (z, -w)$. Основные результаты этой главы — теоремы 1.1–1.6.

Теорема 1.1 ([1*]). *Если*

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)), \qquad (5)$$

то L_4 имеет вид

$$L_4 = (T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n, \qquad (6)$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \qquad \chi_2 = \frac{w}{Q_n} + \frac{S_n}{Q_n}, \qquad (7)$$

где

$$S_n(z) = -U_n z^g + \beta_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \beta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции U_n, V_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + \qquad (8)$$

$$Q_{n+1}(z-U_n^2-V_n-V_{n+1}-W_n)).$$

В теореме 1.1 и далее мы используем обозначение U_n, V_n, W_n вместо $U(n), V(n), W(n)$. Замечательно, что уравнение (8) линеаризуется.

Следствие 1.1 ([1*]). *Функции* $S_n(z), U_n, V_n, W_n$ *удовлетворяют уравнению*

$$(S_n-S_{n+1})(U_n+U_{n+1})-Q_{n-1}V_n-Q_n(z-U_n^2-V_n-V_{n+1}-W_n)+$$

$$Q_{n+2}(z-U_{n+1}^2-V_{n+1}-V_{n+2}-W_{n+1})+Q_{n+3}V_{n+2}=0. \qquad (9)$$

Если $S_n(z)$ удовлетворяет уравнению (9), то $S_n(z)$ удовлетворяет уравнению (8) для некоторого $F_g(z)$.

В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (8) позволяет выразить U_n, V_n, W_n через два произвольных функциональных параметра γ_n, ϑ_n.

Следствие 1.2 ([1*]). *Оператор*

$$L_4=(T+U_n+V_nT^{-1})^2+W_n,$$

где

$$U_n=-\frac{\vartheta_n+\vartheta_{n+1}}{\gamma_n-\gamma_{n+1}}, \qquad W_n=-c_2-\gamma_n-\gamma_{n+1}, \qquad (10)$$

$$V_n=\frac{\vartheta_n^2-F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n-\gamma_{n-1})(\gamma_n-\gamma_{n+1})}, \qquad F_1(z)=z^3+c_2z^2+c_1z+c_0$$

коммутирует с оператором

$$L_6=T^3+(U_n+U_{n+1}+U_{n+2})T^2+$$

$$(V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2} + U_n^2 + U_n U_{n+1} + U_{n+1}^2)T+$$

$$(U_n^3 + U_{n-1}V_n + U_{n+1}V_{n+1} + U_n(2(V_n + V_{n+1}) + W_n) - \vartheta_n - \gamma_n U_n)+$$

$$+V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1} + U_{n-1}^2 + U_{n-1}U_n + U_n^2)T^{-1}+$$

$$(U_{n-2} + U_{n-1} + U_n)V_{n-1}V_n T^{-2} + V_{n-2}V_{n-1}V_n T^{-3}.$$

Спектральная кривая пары L_4, L_6 *задается уравнением* $w^2 = F_1(z)$.

Если в теореме 1.1 положить $\vartheta_n = 0$, то мы получим оператор вида

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1.2 ([1*]). *Если*

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)), \qquad \chi_2(n, P) = -\chi_2(n, \sigma(P)), \tag{11}$$

то L_4 *имеет вид*

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n, \tag{12}$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \qquad \chi_2 = \frac{w}{Q_n}, \tag{13}$$

где

$$Q_n(z) = z^g + \alpha_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(n).$$

Функции V_n, W_n, Q_n *удовлетворяют уравнению*

$$F_g(z) = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + Q_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n)). \tag{14}$$

Уравнение (14) линеаризуется. А именно, если в (14) заменить n на $n+1$ и от полученного уравнения отнять (14), то результат делится на $Q_{n+1}(z)$. В итоге приходим к линейному уравнению на $Q_n(z)$.

Следствие 1.3 ([1*]). *Функции $Q_n(z), V_n, W_n$ удовлетворяют уравнению*

$$Q_{n-1}V_n + Q_n(z - V_n - V_{n+1} - W_n) -$$

$$- Q_{n+2}(z - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) - Q_{n+3}V_{n+2} = 0. \qquad (15)$$

Если $Q_n(z)$ удовлетворяет уравнению (15), то $Q_n(z)$ удовлетворяет уравнению (14) для некоторого $F_g(z)$.

В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (14) позволяет выразить V_n, W_n через произвольный функциональный параметр γ_n.

Следствие 1.4 ([1*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + V_nT^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$V_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \qquad (16)$$

$$F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2})T +$$

$$+V_n(V_{n-1}+V_n+V_{n+1}+W_n-\gamma_{n-1})T^{-1}+V_{n-2}V_{n-1}V_nT^{-3}.$$

Спектральная кривая пары L_4, L_6 *задается уравнением* $w^2 = F_1(z)$.

Теорема 1.2 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих разностных операторов.

Теорема 1.3 ([1*]). *Оператор*

$$L_4=(T+(r_3n^3+r_2n^2+r_1n+r_0)T^{-1})^2+g(g+1)r_3n, \quad r_3\neq 0$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}.

Теорема 1.4 ([1*]). *Оператор*

$$L_4=(T+(r_1a^n+r_0)T^{-1})^2+r_1(a^{2g+1}-a^{g+1}-a^g+1)a^{n-g}, \quad r_1\neq 0, a\neq 0,$$

где $a^{2g+1}-a^{g+1}-a^g+1\neq 0$, *коммутирует с разностным оператором* L_{4g+2}.

Теорема 1.5 ([1*]). *Оператор*

$$L_4=(T+(r_1\cos(n)+r_0)T^{-1})^2-4r_1\sin(\frac{g}{2})\sin(\frac{g+1}{2})\cos(n+\frac{1}{2}), \quad r_1\neq 0$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}.

Рассмотрим следующую систему дифференциально–разностных уравнений на функции $V_n(t), W_n(t)$

$$\dot{V}_n=V_n(W_{n-1}-W_n+V_{n-1}-V_{n+1}), \tag{17}$$

$$\dot{W}_n = (W_n - W_{n-1})V_n + (W_{n+1} - W_n)V_{n+1}, \tag{18}$$

Из (17), (18) вытекает, что функция $\varphi_n(t)$, где $e^{\varphi_n(t)} = V_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\varphi}_n = e^{\varphi_{n-2}+\varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n-1}+\varphi_n} - e^{\varphi_n+\varphi_{n+1}} + e^{\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}}.$$

Также из (17), (18) следует, что

$$[L_4, \partial_t - V_{n-1}V_nT^{-2}] = 0, \tag{19}$$

где

$$L_4 = (T + V_n(t)T^{-1})^2 + W_n(t).$$

Предположим, что $V_n(t), W_n(t)$ — решение ранга два системы (17), (18), т.е. предположим, что дополнительно к (19) выполнено $[L_4, L_{4g+2}] = 0$. Найдем эволюционное уравнение на полином Q_n, ассоциированный с L_4 (см. теорему 1.2).

Теорема 1.6 ([1*]). *Предположим, что потенциалы $V_n(t), W_n(t)$ оператора $L_4 = (T + V_n(t)T^{-1})^2 + W_n(t)$ удовлетворяют системе (17), (18). Тогда полином*

$$Q_n = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(n),$$

отвечающий L_4, удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\dot{Q}_n = V_n(Q_{n+1} - Q_{n-1}). \tag{20}$$

Уравнение (20) задает симметрию уравнения (14). При $g = 1$ функции $V_n(t), W_n(t)$ выражаются через функциональный параметр

$\gamma_n(t)$ по формулам (16). В этом случае система (17), (18) и уравнение (20) сводится к одному уравнению

$$\dot{\gamma}_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_{n-1}-\gamma_n)(\gamma_n-\gamma_{n+1})}(\gamma_{n-1}-\gamma_{n+1}),$$

где $F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$ определяет спектральную кривую пары $L_4, L_{4g+2} : w^2 = F_1(z)$. Это уравнение является дискретным аналогом уравнения Кричевера–Новикова

$$W_{t_1} = \frac{48F_1(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) - W_{xx}^2 + 2W_x W_{xxx}}{8W_x}, \tag{21}$$

которое возникает в теории решений ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили [5]. Уравнение (21) имеет следующие представление Лакса

$$[\mathcal{L}_4, \partial_t - A] = 0, \tag{22}$$

где $\mathcal{L}_4 = (\partial_x^2 + V(x,t))^2 + W(x,t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x,t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x,t)$ и $V = \frac{-16F_1(\frac{1}{2}(-c_2-W)) - W_{xx}^2 + 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}$. Уравнение (22) является аналогом (19).

Основные результаты **главы 2** заключаются в следующем.

В данной главе изучаются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1. Коэффициенты таких операторов зависят от одного функционального параметра, а операторы сдвига входят в разностные операторы только с положительными степенями. Мы изучаем эти операторы в случае гиперэллиптических спектральных кривых, когда выделенная точка совпадает с бесконечно удаленной точкой ветвления. Отметим, что все другие классы коммутативных колец разностных операторов, исследованные ранее (см. [4], [3], [37]–[38], [1*]), содержат операторы, в которые оператор сдвига входит как с положительными, так и с отрицательными степенями.

Рассмотрим следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g, q, k^{-1}, P_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ ($\gamma_1, \dots, \gamma_g$ — в общем положении), $q \in \Gamma$ — выделенная точка, k^{-1} — локальный параметр около q, $P_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$ — набор точек в общем положении (т.е. если $n > 0$, то точки $(P_1, \dots, P_n)$ принадлежат некоторому всюду плотному подмножеству в $\Gamma^n = \Gamma \times \dots \times \Gamma$ и аналогично при $n < 0$).

Теорема 2.1 ([2*]). *Существует единственная функция $\psi(n, P)$, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.*

1. *Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид*

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + P_1 + \dots + P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq,$$

если $n \geq 0$ и имеет вид

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - P_{-1} - \dots - P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq,$$

если $n < 0$.

2. *В окрестности q функция ψ имеет разложение*

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

3. $\psi(0, P) = 1$.

Функцию $\psi(n, P)$ назовем функцией Бейкера–Ахиезера. Для мероморфной функции $f(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка m в q с разложением $f = k^m + O(k^{m-1})$ существует единственный оператор вида

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \ldots + u_0(n),$$

такой, что $L_m\psi(n, P) = f(P)\psi(n, P)$. Оператор L_m лежит в коммутативном кольце разностных операторов, изоморфном кольцу мероморфных функций на Γ с полюсом в q.

Замечание 1. *Спектральные данные, в которых появляется дополнительный набор точек P_n (аналогично нашей конструкции), рассматривались И.М. Кричевером [39] в случае двумерного дискретного оператора Шредингера.*

Отметим, что дивизор $\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n)$ определяется по спектральным данным однозначно. Отметим также, что в частном случае, когда все точки P_n совпадают, мы получаем двухточечные операторы И.М. Кричевера [3] ранга один.

Двухточечные операторы ранга один, в которые операторы сдвига входят только с отрицательными степенями, рассматривались в работе [40].

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ, заданную уравнением (1), в качестве выделенной точки выберем $q = \infty$. Пусть $\psi(n,P)$ — соответствующая функция Бейкера–Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы L_2, L_{2g+1} такие, что

$$L_2\psi = ((T+U_n)^2 + W_n)\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi. \tag{23}$$

Теорема 2.2 ([2*]). *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi(n,P))(T - \chi(n,P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1,P)}{\psi(n,P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n}, \tag{24}$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1}+S_n}{U_{n-1}+U_n}.$$

Функции U_n, W_n, S_n *удовлетворяют уравнению*

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n)Q_nQ_{n+1}. \tag{25}$$

Уравнение (25) так же, как и уравнение (14) может быть линеаризовано.

Следствие 2.1 ([2*]). *Функции* $S_n(z), U_n, W_n$ *удовлетворяют уравнению*

$$(S_n - S_{n+1})(U_n + U_{n+1}) - (z - U_n^2 - W_n)Q_n +$$

$$(z - U_{n+1}^2 - W_{n+1})Q_{n+2} = 0. \tag{26}$$

Следствие 2.2 ([2*]). *В случае эллиптической спектральной кривой* Γ, *заданной уравнением*

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

оператор

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n, \tag{27}$$

где

$$U_n = -\frac{\mu_1\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \mu_2\sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \tag{28}$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$, γ_n — *произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором* L_3.

Отметим, что данные операторы могут быть получены из одноточечных операторов Кричевера–Новикова ранга два (см. [4]). Продемонстрируем это при $g = 1$. Если в следствии 1.2 возьмем $\vartheta_n = \pm\sqrt{F_1(\gamma_n)}$, то мы получаем операторы из следствии 2.2.

Теорема 2.2 позволяет строить явные примеры.

Теорема 2.3 ([2*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + r_1\cos(n))^2 + \frac{1}{2}r_1^2\sec^2(g + \frac{1}{2})\sin(g)\sin(g+1)\cos(2n),$$

$r_1 \neq 0$ *коммутирует с оператором* L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

Теорема 2.4 ([2*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0$$

коммутирует с оператором L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

Основные результаты **главы 3** заключаются в следующем.

В этой главе мы будем изучать алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие ε–разностные операторы ранга 1 вида

$$L_m = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \ldots + u_0(x,\varepsilon),$$

где T_ε — оператор сдвига на ε, $T_\varepsilon\varphi(x) = \varphi(x+\varepsilon)$. Пусть Γ — гиперэллиптическая спектральная кривая, удовлетворяющая уравнению (1) и $q = \infty$. Предположим, что оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x,\varepsilon)$$

коммутирует с оператором L_{2g+1}. Аналогами теоремы 2.2 и следствия 2.2 из [2*] являются следующие теорема и следствие.

Теорема 3.1 ([3*])**.** *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = \Big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + A(x,\varepsilon) + \chi(x+\varepsilon,\varepsilon,z)\Big)\Big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,\varepsilon,z)\Big),$$

где

$$\chi = \frac{S(x,\varepsilon,z)}{Q(x,\varepsilon,z)} + \frac{w}{Q(x,\varepsilon,z)},$$

$$S(x,\varepsilon,z) = -\delta_g(x,\varepsilon)z^g + \delta_{g-1}(x,\varepsilon)z^{g-1} + \ldots + \delta_0(x,\varepsilon),$$

$$A(x,\varepsilon) = \delta_g(x,\varepsilon) + \delta_g(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$Q(x,\varepsilon,z) = -\frac{S(x-\varepsilon,\varepsilon,z) + S(x,\varepsilon,z)}{A(x-\varepsilon,\varepsilon)}.$$

Функции A, B, S, Q удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S^2(x,\varepsilon,z) + Q(x,\varepsilon,z)Q(x+\varepsilon,\varepsilon,z)(z - B(x,\varepsilon)). \qquad (29)$$

Отметим, что уравнение (29) может быть линеаризовано. Функции A, B, S, Q удовлетворяют уравнению

$$(S(x,\varepsilon,z) - S(x+\varepsilon,\varepsilon,z))A(x,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon,z)(z - B(x,\varepsilon)) +$$

$$Q(x+2\varepsilon,\varepsilon,z)(z - B(x+\varepsilon,\varepsilon)) = 0. \qquad (30)$$

Если $S(x,\varepsilon,z)$ удовлетворяет уравнению (30), то $S(x,\varepsilon,z)$ удовлетворяет уравнению (29) для некоторого $F_g(z)$.

Теорема 3.1 позволяет построить явный пример алгебро–геометрических коммутирующих одноточечных ε–разностных операторов в случае эллиптической спектральной кривой.

Следствие 3.1 ([3*]). *Оператор*

$$L_2 = (\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \delta_1(x,\varepsilon))^2 + W(x,\varepsilon),$$

где

$$\delta_1(x,\varepsilon) = -\frac{\mu_1\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))} + \mu_2\sqrt{F_1(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon))}}{\tilde\gamma(x,\varepsilon) - \tilde\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)},$$

$$W(x,\varepsilon) = -c_2 - \gamma(x,\varepsilon) - \gamma(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$, $\gamma(x,\varepsilon)$ *— произвольный функциональный параметр, коммутирует с оператором*

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + \big(\delta_1(x,\varepsilon) + \delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon) + \delta_1(x+2\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} +$$

$$\big(\delta_1^2(x,\varepsilon) + \delta_1^2(x+\varepsilon,\varepsilon) + \delta_1(x,\varepsilon)\delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon) + W(x,\varepsilon) - \gamma(x+2\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} +$$

$$\big(\mp\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))} + \delta_1(x,\varepsilon)(\delta_1^2(x,\varepsilon) + W(x,\varepsilon) - \gamma(x,\varepsilon))\big).$$

Спектральная кривая пары $L_2,\ L_3$ задается уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

При $g > 1$ решить уравнение (29) очень трудно, более того, даже нахождение примеров является сложной задачей.

Отметим, что в теории обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов возникают уравнения аналогичные уравнениям (29) и (30). Сделаем сопоставление дискретных уравнений (29) и (30) с их гладкими аналогами. Напомним сначала некоторые известные факты об одномерных конечнозонных операторах Шредингера $H = \partial_x^2 + u(x)$. Теория таких операторов тесно связана с теорией периодических и квазипериодических решений уравнения Кортевега–де Фриза (см. [41]–[43]). Оператор H коммутирует с некоторым дифференциальным оператором M порядка $2g+1$

$$M = \partial_x^{2g+1} + v_{2g}(x)\partial_x^{2g} + \ldots + v_0(x).$$

Спектральная кривая Γ пары $H,\ M$ задается уравнением вида $w^2 = F_g(z)$, при этом для совместной собственной функции $\psi(x)$

$$H\psi(x) = z\psi(x), \quad M\psi(x) = w\psi(x),$$

имеем $(z, w) \in \Gamma$. Справедливо разложение (см. [44])

$$H - z = (\partial_x + \chi_0(x))(\partial_x - \chi_0(x)),$$

где

$$\chi_0 = \frac{R_x}{2R} + \frac{w}{R}, \quad R(x,z) = z^g + \alpha_{g-1}(x) z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(x).$$

Полином R удовлетворяет уравнению

$$F_g(z) = R^2(z-u) + \frac{R_x^2}{4} - \frac{RR_{xx}}{2}.$$

Известным примером конечнозонного оператора Шредингера является оператор Ламе

$$\partial_x^2 - g(g+1)\wp(x).$$

где $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет уравнению $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp(x) + g_3$.

Предположим, что для ε–разностного оператора L_2 выполнены следующие разложения (см. теорему 3.1)

$$S(x,\varepsilon,z) = \frac{R(x,z)}{\varepsilon} + Q_0(x,z) + Q_1(x,z)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$
$$A(x,\varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + u(x)\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad B(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^2),$$

тогда

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) + O(\varepsilon).$$

Из (29) вытекает равенство

$$F_g(z) = R^2(z-u) + \frac{R_x^2}{4} - \frac{RR_{xx}}{2} + O(\varepsilon).$$

В следствии 3.1 положим функциональный параметр равным

$$\gamma(x,\varepsilon) = \wp(x-\varepsilon),$$

тогда

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \big(-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

где $\zeta(x)$ — функция Вейерштрасса.

Основной результат этой главы — следующая теорема.

Теорема 3.2 ([3*]). *Оператор*

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \big(-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

коммутирует с оператором

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + \big(-3\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+2\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} +$$

$$\big((\zeta(\varepsilon) + \zeta(x-\varepsilon) - \zeta(x))(\zeta(\varepsilon) + \zeta(x) - \zeta(x+\varepsilon)) +$$

$$2\wp(\varepsilon) + \wp(x)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\wp'(\varepsilon).$$

При этом

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon), \quad L_3 = \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x) + O(\varepsilon).$$

Отметим, что спектральная кривая пары коммутирующих дифференциальных операторов (т.е. кривая, заданная уравнением $w^2 = F_1(z)$)

$$\partial_x^2 - 2\wp(x), \qquad \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x)$$

такая же как и для ε–разностных операторов $L_2,\ L_3$. Таким образом, теорема 3.2 дает замечательную дискретизацию оператора Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Более того, в работе [3*] мы нашли дискретизацию оператора Ламе для произвольного рода g. Но, поскольку доказательство достаточно длинное, данный результат мы не включили в диссертационную работу (см. замечание 3.1).

Отметим, что другая дискретизация оператора Ламе в рамках двухточечной конструкции рассматривалась в работе [45].

Полученные результаты опубликованы в 7 научных изданиях [1*] — [7*], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1*] — [3*], 4 — в тезисах докладов и материалах конференций [4*] — [7*]. Все сформулированные результаты являются новыми. Все результаты были получены совместно с А.Е. Мироновым. Вклад авторов равноправен и неделим.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Е. Миронову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

Глава 1

Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 2

1.1 Уравнения Кричевера–Новикова на параметры Тюрина

Как уже упоминалось, в случае операторов ранга один в рамках двухточечной конструкции собственные функции находятся явно через тэта–функцию многообразии Якоби спектральной кривой. Приведем простейший пример. Пусть Γ — эллиптическая кривая $\Gamma = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\}, \tau \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\tau > 0$, $\theta(z)$ — тэта–функция $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2\tau + 2\pi i n z)$. Тогда функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(n,z) = \frac{\theta(z+c+nh)}{\theta(z)}\left(\frac{\theta(z-h)}{\theta(z)}\right)^n, \qquad c,h \notin \{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\}. \quad (31)$$

Для любой мероморфной функции вида $\lambda = \frac{\theta(z-a_1)\dots(z-a_k)}{\theta^k(z)}$, $a_1+\ldots+a_k=0$ существует единственный оператор

$$L(\lambda) = v_k(n)T^k + \ldots + v_0(n)$$

такой, что

$$L(\lambda)\psi = \lambda\psi.$$

Операторы $L(\lambda)$ и $L(\mu)$ коммутируют. Отметим, что функция вида (31) обобщается на случай главно поляризованных абелевых многообразий произвольной размерности. Это обобщения позволяет построить коммутирующие разностные операторы от многих дискретных переменных с матричными коэффициентами (см. [46]).

При $l > 1$ совместные собственные функции не удается найти. Это является основной трудностью при построении коммутирующих операторов высокого ранга. Напомним необходимые нам результаты из [4]. Одноточечные коммутирующие операторы ранга l имеют вид

$$L = \sum_{i=-Nr_-}^{Nr_+} u_i(n)T^i, \quad A = \sum_{i=-Mr_-}^{Mr_+} v_i(n)T^i,$$

где $l = r_+ + r_-$, $(N, M) = 1$ [4]. Рассмотрим пространство $U(z)$ решений уравнения $Ly = zy$,

$$\dim U(z) = N(r_+ + r_-).$$

Из коммутируемости L и A следует, что оператор A определяет линейный оператор $A(z)$ на пространстве $U(z)$. Выберем базис $\varphi^i(n)$ в пространстве $U(z)$, удовлетворяющий условию нормировки

$$\varphi^i(n) = \delta_{in}, \quad -Nr_- \leq i, n < Nr_+.$$

В базисе $\varphi^i(n)$ компоненты матрицы $A(z)$ — полиномы по z. В рассматриваемом случае характеристический полином матрицы $A(z)$ имеет вид

$$\det(w - A(z)) = R^l(w, z).$$

Полином R определяет спектральную кривую Γ, параметризующую совместные собственные числа L и A

$$L\psi = z\psi, \qquad A\psi = w\psi, \qquad R(z, w) = 0.$$

Совместные собственные функции образуют векторное расслоение ранга l над аффинной частью спектральной кривой. Для каждой точки $P = (z, w) \in \Gamma$ выберем базис в пространстве совместных собственных функций, удовлетворяющий требованиям

$$\psi_n^i(P) = \delta_{i,n}, \quad -r_- \leq i, n < r_+.$$

В аффинной части спектральной кривой функции $\psi_n^i(P)$ имеют дивизор полюсов γ степени lg

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{lg},$$

не зависящий от n. В точках γ_i выполнены соотношения

$$\alpha_s^j Res_{\gamma_s} \psi_n^i(P) = \alpha_s^i Res_{\gamma_s} \psi_n^j(P),$$

α_s^i не зависят от n. Набор данных (γ, α_s), $\alpha_s = \{\alpha_s^i\}$ называется *параметрами Тюрина.* Эти данные определяют оснащенное полустабильное расслоение ранга l степени lg над Γ.

Обозначим через $\Psi(n, P)$ матрицу Вронского

$$\Psi^{ij}(n, P) = \psi^i_{n+j}(P), \quad -r_- \le i, j < r_+.$$

Функция $\det\Psi(n, P)$ голоморфна в окрестности бесконечности, ее дивизор полюсов совпадает с дивизором γ, а дивизор нулей зависит от n

$$\gamma(n) = \gamma_1(n) + \ldots + \gamma_{lg}(n),$$

при этом $\gamma(0) = \gamma$. Рассмотрим матричную функцию

$$\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P),$$

$$\chi(n, P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \chi_{-r_-}(n, P) & \chi_{-r_-+1}(n, P) & \chi_{-r_-+2}(n, P) & \ldots & \chi_{r_+-1}(n, P) \end{pmatrix}.$$

Ее компоненты в окрестности бесконечности q имеют вид

$$\chi_i(n, k) = k^{-1}\delta_{i,0} - f_i(n, k),$$

где k — локальный параметр около q, $f_i(n, k)$ — аналитическая функция в окрестности q. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *(И.М. Кричевер, С.П. Новиков)*

Матричная функция $\chi(n,P)$ *имеет на* Γ *простые полюсы в точках* $\gamma_j(n)$. *Имеют место соотношения на вычеты матричных элементов*

$$\alpha_s^j Res_{\gamma_s(n)}\chi_i(n,P)=\alpha_s^i Res_{\gamma_s(n)}\chi_j(n,P). \tag{32}$$

Точки $\gamma_s(n+1)$ *являются нулями определителя матрицы* $\chi(n,P)$, *т.е.*

$$\det\chi(n,\gamma_s(n+1))=0. \tag{33}$$

Вектор $\alpha_j(n+1)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\alpha_j(n+1)\chi(n,\gamma_j(n+1))=0. \tag{34}$$

Уравнения (32)—(34) определяют дискретную динамику параметров Тюрина. И.М. Кричевер и С.П. Новиков нашли решения уравнений (32)—(34) и коммутирующие операторы в случае, когда ранг равен двум, а спектральная кривая является эллиптической кривой. В простейшем случае эти операторы имеют вид

$$L=L_2^2-\wp(\gamma_n)-\wp(\gamma_{n-1}),$$

где L_2 — разностный оператор Шредингера

$$L_2=T+v_n+c_nT^{-1}$$

с коэффициентами

$$c_n=\frac{1}{4}(s_{n-1}^2-1)F(\gamma_n,\gamma_{n-1})F(\gamma_{n-2},\gamma_{n-1}),$$

$$v_n = \frac{1}{2}\left(s_{n-1}F(\gamma_n,\gamma_{n-1}) - s_nF(\gamma_{n-1},\gamma_n)\right),$$

$$F(u,v) = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v).$$

Здесь $\wp(u)$, $\zeta(u)$ — функции Вейерштрасса, s_n, γ_n — функциональные параметры.

1.2 Примеры одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 2

В данном параграфе приведем доказательства теорем 1.1–1.6.

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть Γ — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1). L_4, L_{4g+2} — операторы вида (2), для которых выполнено (3). Матрица $\chi(n,P) = \Psi(n+1,P)\Psi^{-1}(n,P)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n,P) & \chi_2(n,P) \end{pmatrix}.$$

Функции χ_1 и χ_2 имеют следующие разложения в окрестности точки $q=\infty$ [4]

$$\chi_1(n) = b_0(n)+b_1(n)k+\ldots, \quad \chi_2(n) = \frac{1}{k}+e_0(n)+e_1(n)k+\ldots, \qquad (35)$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Коэффициенты оператора L_4 выражаются через $b_i(n), e_i(n)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Оператор*

$$L_4 = T^2 + u_1(n)T + u_0(n) + u_{-1}(n)T^{-1} + u_{-2}(n)T^{-2}$$

имеет следующие коэффициенты:

$$u_1(n) = -e_0(n) - e_0(n+1),$$

$$u_0(n) = -b_0(n) - b_0(n+1) + e_0^2(n) + e_1(n) - e_1(n+1),$$

$$u_{-1}(n) = -b_1(n) + b_0(n)\left(e_0(n) + e_0(n-1) - \frac{b_1(n-1)}{b_0(n-1)}\right),$$

$$u_{-2}(n) = b_0(n)b_0(n-1).$$

Если $b_1(n) = 0$, *то* L_4 *представим в виде*

$$L_4 = (T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -e_0(n), \quad V_n = -b_0(n), \quad W_n = -e_1(n) - e_1(n+1).$$

Доказательство. Пользуясь тождеством (4), выразим $\psi_{n+2}(P)$ и $\psi_{n-2}(P)$ через $\psi_{n-1}(P)$, $\psi_n(P)$, $\chi_1(n,P)$ и $\chi_2(n,P)$, а именно

$$\psi_{n+2} = \psi_{n-1}\chi_1(n)\chi_2(n+1) + \psi_n(\chi_1(n+1) + \chi_2(n)\chi_2(n+1)),$$

$$\psi_{n-2} = -\psi_{n-1}\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)} + \frac{\psi_n}{\chi_1(n-1)}.$$

Теперь заменим ψ_{n+2} и ψ_{n-2} в равенстве $L_4\psi_n = z\psi_n$ на соответствующие выражения. Получим

$$P_1(n,P)\psi_n(P) + P_2(n,P)\psi_{n-1}(P) = z\psi_n(P),$$

где

$$P_1(n) = \chi_1(n+1) + \chi_2(n+1)\chi_2(n) + u_1(n)\chi_2(n) + u_0(n) + \frac{u_{-2}(n)}{\chi_1(n-1)},$$

$$P_2(n) = \chi_2(n+1)\chi_1(n) + u_1(n)\chi_1(n) + u_{-1}(n) - u_{-2}(n)\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)}.$$

Следовательно, имеем тождества

$$P_1 = z = \frac{1}{k^2}, \qquad P_2 = 0. \tag{36}$$

Подставив (35) в (36) получим

$$P_1 - \frac{1}{k^2} = \frac{e_0(n) + e_0(n+1) + u_1(n)}{k} + (b_0(n+1) + e_0(n)e_0(n+1) +$$

$$e_1(n) + e_1(n+1) + u_0(n) + e_0(n)u_1(n) + \frac{u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}\Big) + O(k) = 0,$$

$$P_2 = \frac{b_0(n) - \frac{u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}}{k} + (b_1(n) + b_0(n)e_0(n+1) + b_0(n)u_1(n) +$$

$$u_{-1}(n) + \frac{b_1(n-1)u_{-2}(n)}{b_0^2(n-1)} - \frac{e_0(n-1)u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}\Big) + O(k) = 0.$$

Отсюда находим коэффициенты оператора L_4. Из полученных формул следует, что если $b_1(n) = 0$, то L_4 имеет вид (6). Лемма 1.1 доказана.

Таким образом, если χ_1 и χ_2 удовлетворяют условию (5), то $b_1(n) = 0$, следовательно, L_4 представим в виде (6).

Операторы $L_4 - z$ и $L_{4g+2} - w$ имеют общий правый делитель

$$T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1},$$

$$L_4 - z = l_1(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}), \;\; L_{4g+2} - z = l_2(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$

где l_1 и l_2 — некоторые операторы порядков 2 и $4g$.

Предположим, что выполнено условие (5). Тогда

$$(T + U_n + V_nT^{-1})^2 + W_n - z = (T + A_n + B_nT^{-1})(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$

где

$$A_n = U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1), \qquad B_n = -\frac{V_{n-1}V_n}{\chi_1(n-1)},$$

при этом χ_1 и χ_2 удовлетворяют уравнениям

$$V_{n-1}V_n + \chi_1(n-1)(U_n^2 + V_n + V_{n+1} - z +$$

$$W_n + \chi_1(n+1) + \chi_2(n)(U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1))) = 0, \tag{37}$$

$$(U_{n-1} + U_n)V_n\chi_1(n-1) - V_{n-1}V_n\chi_2(n-1) +$$

$$\chi_1(n-1)\chi_1(n)(U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1)) = 0. \tag{38}$$

Имеем равенства

$$\det\chi(n,P) = -\chi_1(n,P) = \det\Psi(n+1,P)(\det\Psi(n,P))^{-1}.$$

Степень дивизора нулей γ_n функции $\det\Psi(n,P)$ равна $2g$. В силу то, что функция χ_1 инвариантна относительно инволюции σ, дивизор γ_n имеет вид

$$\gamma_n = \gamma_1(n) + \sigma\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) + \sigma\gamma_g(n).$$

Пусть $\gamma_i(n)$ имеет координаты $(\delta_i(n), w(\delta_i(n)))$. Обозначим через Q_n полином степени g по z

$$Q_n = (z - \delta_1(n))\ldots(z - \delta_g(n)).$$

Тогда

$$\chi_1(n,P) = b_0(n)\frac{Q_{n+1}}{Q_n},$$

где $b_0(n)$ — некоторая функция. В окрестности q имеем разложение

$$\chi_1 = b_0(n) + b_2(n)k^2 + O(k^4),$$

По лемме 1.1 $V_n = -b_0(n)$. Окончательно получаем

$$\chi_1(n, P) = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Далее, положим

$$S_n = -U_n(z - \nu_1(n)) \dots (z - \nu_g(n)),$$

и пусть S_n и Q_n удовлетворяют соотношению

$$Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Так как дивизор полюсов $\chi_2(n, P)$ равен γ_n, а в окрестности q имеет место разложение (35), то

$$\chi_2(n, P) = \frac{w}{Q_n} + \frac{S_n}{Q_n}.$$

При таких χ_1 и χ_2 уравнение (38) выполнено тождественно, а (37) сводится к уравнению (8) на Q_n, U_n, V_n, W_n. Теорема 1.1 доказана.

Несложно проверить, что если χ_1 и χ_2 имеют вид (7), а S_n удовлетворяет уравнению (8), то выполняются уравнения Кричевера–Новикова (32)—(34).

Доказательство теоремы 1.2.

Пусть Γ — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1). L_4, L_{4g+2} — операторы вида (2), для которых выполнено (3). Матрица $\chi(n,P)=\Psi(n+1,P)\Psi^{-1}(n,P)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n,P) & \chi_2(n,P) \end{pmatrix}.$$

Функции χ_1 и χ_2 удовлетворяют разложению (35). Коэффициенты оператора L_4 выражаются через $b_i(n), e_i(n)$. Если в лемме 1.1 дополнительно выполнено $e_0(n)=0$, то L_4 имеет вид (12). Таким образом, если χ_1 и χ_2 удовлетворяют условию (11), то $b_1(n)=e_0(n)=0$, и следовательно, L_4 представим в виде (12).

Операторы L_4-z и $L_{4g+2}-w$ также имеют общий правый делитель

$$T-\chi_2(n)-\chi_1(n)T^{-1},$$

$$L_4-z=l_1(T-\chi_2(n)-\chi_1(n)T^{-1}),\ \ L_{4g+2}-z=l_2(T-\chi_2(n)-\chi_1(n)T^{-1}),$$

где l_1 и l_2 — некоторые операторы порядков 2 и $4g$.

Предположим, что выполнено условие (11). Тогда

$$(T+V_nT^{-1})^2+W_n-z=(T+A_n+B_nT^{-1})(T-\chi_2(n)-\chi_1(n)T^{-1}),$$

где

$$A_n=\chi_2(n+1), \quad B_n=-\frac{V_{n-1}V_n}{\chi_1(n-1)},$$

при этом χ_1 и χ_2 удовлетворяют уравнениям

$$V_{n-1}V_n+\chi_1(n-1)(V_n+V_{n+1}-z+$$

$$W_n+\chi_1(n+1)+\chi_2(n)\chi_2(n+1))=0, \qquad (39)$$

$$-V_{n-1}V_n\chi_2(n-1)+\chi_1(n-1)\chi_1(n)\chi_2(n+1)=0. \qquad (40)$$

Имеем равенства

$$\det\chi(n,P)=-\chi_1(n,P)=\det\Psi(n+1,P)(\det\Psi(n,P))^{-1}.$$

Степень дивизора нулей γ_n функции $\det\Psi(n,P)$ равна $2g$. В силу то, что функция χ_1 инвариантна относительно инволюции σ, дивизор γ_n имеет вид

$$\gamma_n=\gamma_1(n)+\sigma\gamma_1(n)+\ldots+\gamma_g(n)+\sigma\gamma_g(n).$$

Пусть $\gamma_i(n)$ имеет координаты $(\delta_i(n),w(\delta_i(n)))$. Обозначим через Q_n полином степени g по z

$$Q_n=(z-\delta_1(n))\ldots(z-\delta_g(n)).$$

Тогда

$$\chi_1(n,P)=b_0(n)\frac{Q_{n+1}}{Q_n},$$

где $b_0(n)$ — некоторая функция. В окрестности q имеем разложение

$$\chi_1=b_0(n)+b_2(n)k^2+O(k^4),$$

По лемме 1.1 $V_n=-b_0(n)$. Окончательно получаем

$$\chi_1(n,P)=-V_n\frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Так как дивизор полюсов $\chi_2(n,P)$ равен γ_n, а в окрестности q имеет место разложение (35), то

$$\chi_2(n,P)=\frac{w}{Q_n}.$$

При таких χ_1 и χ_2 уравнение (40) выполнено тождественно, а (39) сводится к уравнению (14) на Q_n, V_n, W_n. Теорема 1.2 доказана.

Несложно проверить, что если χ_1 и χ_2 имеют вид (13), а Q_n удовлетворяет уравнению (14), то выполняются уравнения Кричевера–Новикова (32)—(34).

Перейдем к доказательству теорем 1.3–1.5.

Нам достаточно доказать, что для потенциалов V_n, W_n, указанных в теоремах 1.3–1.5, найдутся полиномы $Q_n(z)$ степени g по z, которые удовлетворяют уравнению (15).

Доказательство теоремы 1.3.

Пусть

$$V_n = r_3n^3 + r_2n^2 + r_1n + r_0, \quad W_n = g(g+1)r_3n.$$

Уравнение (15) принимает вид

$$\begin{gathered}
Q_{n-1}\big(n^3r_3 + n^2r_2 + nr_1 + r_0\big) + Q_n\big(z - 2n^3r_3 - n^2(2r_2 + 3r_3) - \\
n(2r_1 + 2r_2 + 3r_3 + g(g+1)r_3) - (2r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\big) - \\
Q_{n+2}\big(z - 2n^3r_3 - n^2(2r_2 + 9r_3) - n(2r_1 + 6r_2 + 15r_3 + g(1+g)r_3) - \\
(2r_0 + 3r_1 + 5r_2 + 9r_3 + g(g+1)r_3)\big) - \qquad (41) \\
Q_{n+3}\big(n^3r_3 + n^2(r_2 + 6r_3) + n(r_1 + 4r_2 + 12r_3) + r_0 + 2r_1 + 4r_2 + 8r_3\big) = 0.
\end{gathered}$$

Полином $Q_n(z)$, удовлетворяющий (41), будем искать в виде полинома степени g по n

$$Q_n = \delta_gn^g + \ldots + \delta_1n + \delta_0, \qquad \delta_i = \delta_i(z).$$

При подстановке полинома Q_n в (41) в левой части получаем полином степени $(g+3)$ по n

$$\beta_{g+3}(z)n^{g+3}+\beta_{g+2}(z)n^{g+2}+\ldots+\beta_0(z).$$

Удивительным свойством потенциалов $V_n,\ W_n$ является то, что на самом деле

$$\beta_g=\beta_{g+1}=\beta_{g+2}=\beta_{g+3}=0$$

(это проверяется прямыми вычислениями). Из (41) находим β_s

$$\beta_s=r_3(2s+1)(g(g+1)-s(s+1))\delta_s+\sum_{m=1}^{g}\Big((-1)^m\left(\mathrm{C}_{s+m}^{m}r_0-\mathrm{C}_{s+m}^{m+1}r_1+\right.$$

$$\left.\mathrm{C}_{s+m}^{m+2}r_2-\mathrm{C}_{s+m}^{m+3}r_3\right)+2^m\left(\mathrm{C}_{s+m}^{m}(2r_0+3r_1+5r_2+9r_3+g(g+1)r_3-z)+\right.$$

$$\left.2\mathrm{C}_{s+m}^{m+1}(2r_1+6r_2+15r_3+g(g+1)r_3)+4\mathrm{C}_{s+m}^{m+2}(2r_2+9r_3)+16\mathrm{C}_{s+m}^{m+3}r_3\right)-$$

$$3^m\left(\mathrm{C}_{s+m}^{m}(r_0+2r_1+4r_2+8r_3)+3\mathrm{C}_{s+m}^{m+1}(r_1+4r_2+12r_3)+\right.$$

$$\left.9\mathrm{C}_{s+m}^{m+2}(r_2+6r_3)+27\mathrm{C}_{s+m}^{m+3}r_3\right)\Big)\,\delta_{s+m},$$

где $0\le s<g-1$, $\mathrm{C}_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)}$ при $m\ge k$, $\mathrm{C}_m^k=0$ при $m<k$, δ_g — некоторая константа и $\delta_s=0$, если $s>g$. Из равенства $\beta_s=0$ выражаем δ_s через $\delta_{s+1},\ldots,\delta_g$. В частности,

$$\delta_{g-1}=\frac{\delta_g(2g^2r_2+g(g+1)r_3+2z)}{2(2g-1)r_3}.$$

Далее выберем δ_g таким образом, чтобы $Q_n(z)$ принял вид

$$Q_n=z^g+\alpha_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\alpha_0(n).$$

Мы показали, что существует Q_n, удовлетворяющий (15). Теорема 1.3 доказана.

В [26] доказано, что оператор

$$\mathcal{L}_4^\sharp = (\partial_x^2 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0)^2 + g(g+1)r_3x$$

коммутирует с оператором $\mathcal{L}_{4g+2}^\sharp$ порядка $4g+2$. Оператор L_4 из теоремы 1.3 является дискретным аналогом оператора $\mathcal{L}_4^\sharp$. При $g = 1$ операторы $\mathcal{L}_4^\sharp, \mathcal{L}_6^\sharp$ найдены Дж. Диксмье [15], операторы $\mathcal{L}_4^\sharp$, $\mathcal{L}_6^\sharp$ задают коммутативную подалгебру в алгебре Вейля.

Доказательство теоремы 1.4.

Пусть

$$V_n = r_1a^n + r_0, \qquad W_n = (a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)r_1a^{n-g}.$$

Тогда (15) принимает вид

$$Q_{n-1}\left(r_0 + a^nr_1\right) + Q_n\left(z - 2r_0 - a^{n-g}r_1 - a^{n+g+1}r_1\right) +$$

$$Q_{n+2}\left(2r_0 + a^{n+1-g}r_1 + a^{n+g+2}r_1 - z\right) - Q_{n+3}\left(r_0 + a^{n+2}r_1\right) = 0. \quad (42)$$

Будем искать решение уравнения (42) в следующем виде

$$Q_n = B_ga^{gn} + B_{g-1}a^{(g-1)n} + \ldots + B_1a^n + B_0, \qquad B_i = B_i(z).$$

Положим для удобства $y = a^n$. Тогда $Q_n = B_gy^g + \cdots + B_0$. При подстановке Q_n в (42) получаем

$$\sum_{s=0}^{g}\left(B_s\left(a^{-g-s}(a^g - a^s)(a^{g+s+1} - 1)(a^{2s+1} - 1)r_1y^{s+1} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-a^{-s}(a^{2s} - 1)((a^s - 1)^2r_0 + a^sz)y^s\right)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{g}\left(y^s\left(B_sa^{-s}(1 - a^{2s})((a^s - 1)^2r_0 + a^sz) +\right.\right.$$

$$+B_{s-1}a^{1-g-s}(a^g-a^{s-1})(a^{g+s}-1)(a^{2s-1}-1)r_1\big)\big)=0.$$

Отсюда получаем

$$B_{s-1}=B_s\frac{a^{-s}(a^{2s}-1)((a^s-1)^2r_0+a^sz)}{a^{1-g-s}(a^g-a^{s-1})(a^{g+s}-1)(a^{2s-1}-1)r_1},\quad s=1,\dots,g.$$

Таким образом, мы нашли полином Q_n, удовлетворяющий (15). Теорема 1.4 доказана.

Этот оператор является дискретным аналогом оператора

$$(\partial_x^2+r_1a^x+r_0)^2+g(g+1)r_1a^x$$

из [29], который коммутирует с оператором порядка $4g+2$.

Доказательство теоремы 1.5.

Пусть

$$V_n=r_1\cos(n)+r_0,\qquad W_n=-4r_1\sin(\frac{g}{2})\sin(\frac{g+1}{2})\cos(n+\frac{1}{2}).$$

Уравнение (15) принимает вид

$$Q_{n-1}\big(r_0+r_1\cos(n)\big)+Q_n\big(z-2r_0-2r_1\cos(g+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})\big)-$$
$$Q_{n+2}\big(z-2r_0-2r_1\cos(g+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{3}{2})\big)-$$
$$Q_{n+3}\big(r_0+r_1\cos(n+2)\big)=0. \tag{43}$$

Будем искать решение уравнения (43) в виде

$$Q_n=A_g\cos(gn)+A_{g-1}\cos((g-1)n)+\ldots+A_1\cos(n)+A_0,\qquad A_i=A_i(z).$$

При подстановке Q_n в (43) после преобразований получаем

$$\sum_{s=0}^{g}A_s\big(2r_1(\cos(s+\frac{1}{2})-\cos(g+\frac{1}{2}))\sin(s+\frac{1}{2})\sin((n+1)(s+1))+$$

$$+2(z-2r_0+2r_0\cos(s))\sin(s)\sin((n+1)s)+$$

$$+2r_1(\cos(s-\frac{1}{2})-\cos(g+\frac{1}{2}))\sin((n+1)(s-1))\sin(s-\frac{1}{2})\big)=$$

$$=\sum_{s=2}^{g}\sin((n+1)s)\big(2A_{s-1}r_1(\cos(s-\frac{1}{2})-\cos(g+\frac{1}{2}))\sin(s-\frac{1}{2})+$$

$$+2A_s(z-2r_0+2r_0\cos(s))\sin(s)+2A_{s+1}r_1(\cos(s-\frac{3}{2})-$$

$$\cos(g+\frac{1}{2})\sin(s-\frac{3}{2})\big)+\sin(n+1)2\big(2A_0r_1(\cos(\frac{1}{2})-$$

$$\cos(g+\frac{1}{2}))\sin(\frac{1}{2})+A_1(z-2r_0+2r_0\cos(1))\sin(1)\big)=0,$$

где $A_s=0$ при $s>g$. При $g=1$ в предыдущей формуле суммирование по s нужно отбросить. Отсюда получаем

$$A_0=A_1\frac{(z-2r_0+2r_0\cos(1))\sin(1)}{2r_1(\cos(g+\frac{1}{2})-\cos(\frac{1}{2}))\sin(\frac{1}{2})},$$

$$A_{s-1}=A_s\frac{(z-2r_0+2r_0\cos(s))\sin(s)}{r_1((\cos(g+\frac{1}{2})-\cos(s-\frac{1}{2}))\sin(s-\frac{1}{2})}+$$

$$+A_{s+1}\frac{(\cos(s-\frac{3}{2})-\cos(g+\frac{1}{2}))\sin(s-\frac{3}{2})}{(\cos(g+\frac{1}{2})-\cos(s-\frac{1}{2}))\sin(s-\frac{1}{2})},\qquad 2\le s\le g,$$

A_g — подходящая константа. Мы нашли Q_n, удовлетворяющий уравнению (15). Теорема 1.5 доказана.

Этот оператор является аналогом оператора

$$(\partial_x^2+r_1cos(x)+r_0)^2+g(g+1)r_1cos(x)$$

из работы [28], который коммутирует с оператором порядка $4g+2$.

Приведем несколько примеров операторов L_{4g+2} из теорем 1.3–1.5 при $g=1,2$.

Пример 1.1. Введем для удобства обозначение $f(n) = r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0$. Оператор

$$L_4 = (T + f(n)T^{-1})^2 + 2r_3 n$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + 3(f(n) + f'(n) + f''(n) + 4r_3)T + 3(f(n) + 3r_3 n + r_2)T^{-1} +$$

$$(f(n-2)f'(n) + 2f''(n) - 8r_3)(f(n) - f'(n) + 3r_3 n - r_3 + r_2)f(n)T^{-3},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 + (2r_2 + 3r_3)z^2 + (r_1 r_3 + (r_2 + r_3)(r_2 + 3r_3))z +$$

$$r_3((r_2 + r_3)(r_1 + r_2 + r_3) - r_0 r_3).$$

Пример 1.2. При $g = 2$ положим для простоты формул $r_1 = r_2 = 0, r_3 = 1$. Оператор

$$L_4 = (T + (n^3 + r_0)T^{-1})^2 + 6n,$$

коммутирует с оператором

$$L_{10} = T^5 + 5\left(n^3 + 6n^2 + 21n + r_0 + 26\right)T^3 + 5\left(2n^6 + 12n^5 + 60n^4 +\right.$$

$$\left. 4n^3(r_0 + 40) + 3n^2(4r_0 + 93) + 3n(11r_0 + 90) + 2r_0^2 + 25r_0 + 108\right)T +$$

$$5(n^3 + r_0)(2n^6 + 30n^4 + 4n^3 r_0 + 69n^2 + 21nr_0 + 2r_0^2 + 7)T^{-1} +$$

$$+5((n-2)^3 + r_0)((n-1)^3 + r_0)(n^3 + r_0)(n^3 - 3n^2 + 12n - 10)T^{-3} +$$

$$+((n-4)^3 + r_0)((n-3)^3 + r_0)((n-2)^3 + r_0)((n-1)^3 + r_0)(n^3 + r_0)T^{-5},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = (z^2 + 6z + 12)((z+3)^3 + 27r_0).$$

Пример 1.3. Оператор

$$L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^3 - a^2 - a + 1)a^{n-1}$$

коммутирует с

$$L_6 = T^3 + \left(r_0(a + 1 + a^{-1}) + r_1 a^{n-1}(a^4 + a^2 + 1)\right) T +$$

$$+(a + 1 + a^{-1})(r_1 a^n + r_0)(r_1 a^{n+1} - r_1 a^n + r_1 a^{n-1} + r_0)T^{-1} +$$

$$+(r_1 a^n + r_0)(r_1 a^{n-1} + r_0)(r_1 a^{n-2} + r_0)T^{-3},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 + \frac{2r_0(a-1)^2}{a} z^2 + \frac{r_0^2(a-1)^4}{a^2} z.$$

Пример 1.4. Оператор

$$L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin(\frac{1}{2}) \sin(1) \cos(n + \frac{1}{2})$$

коммутирует с

$$L_6 = T^3 + (2\cos(1) + 1)(r_1(2\cos(1) - 1)\cos(n+1) + r_0)\, T +$$

$$(2\cos(1) + 1)(r_1 \cos(n) + r_0)(r_1(2\cos(1) - 1)\cos(n) + r_0)T^{-1} +$$

$$(r_1 \cos(n-1) + r_0)(r_1 \cos(n-2) + r_0)(r_1 \cos(n) + r_0)T^{-3},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 - 8r_0 \sin^2(\frac{1}{2}) z^2 - 8(r_1^2(\cos(1) + 1) - 2r_0^2)\sin^4(\frac{1}{2}) z.$$

Доказательство теоремы 1.6.

Пользуясь

$$(\partial_t - V_{n-1}V_nT^{-2})\psi_n = 0,$$

и равенством (4), выразим $\dot\psi_{n-1}, \dot\psi_n, \dot\psi_{n+1}, \psi_{n-2}, \psi_{n-3}$ через $\psi_{n-1}, \psi_n, \chi_1(n), \chi_2(n)$

$$\dot\psi_{n-1} = V_{n-2}V_{n-1}\psi_{n-3}, \quad \dot\psi_n = V_{n-1}V_n\psi_{n-2}, \quad \dot\psi_{n+1} = V_nV_{n+1}\psi_{n-1},$$

$$\psi_{n-2} = -\psi_{n-1}\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)} + \frac{\psi_n}{\chi_1(n-1)}.$$

$$\psi_{n-3} = \psi_{n-1}\frac{\chi_1(n-1) + \chi_2(n-2)\chi_1(n-1)}{\chi_1(n-2)\chi_1(n-1)} - \psi_n\frac{\chi_2(n-2)}{\chi_1(n-2)\chi_1(n-1)}.$$

Продифференцируем тождество (4) по t, получим

$$\dot\psi_{n+1} - \chi_1(n)\dot\psi_{n-1} - \dot\chi_1(n)\psi_{n-1} - \chi_2(n)\dot\psi_n - \dot\chi_2(n)\psi_n = A_n\psi_n + B_n\psi_{n-1} = 0,$$

где

$$A_n = V_{n-2}V_{n-1}\chi_1(n)\chi_2(n-2) - \chi_1(n-2)(V_{n-1}V_n\chi_2(n) + \chi_1(n-1)\dot\chi_2(n)),$$

$$B_n = V_{n-2}V_{n-1}\chi_1(n)\left(\chi_1(n-1) + \chi_2(n-2)\chi_2(n-1)\right) + +V_n\chi_1(n-2)\times$$

$$(V_{n+1}\chi_1(n-1) + V_{n-1}\chi_2(n-1)\chi_2(n)) - \chi_1(n-2)\chi_1(n-1)\dot\chi_1(n).$$

Следовательно, имеем тождества

$$A_n = 0, \qquad B_n = 0. \tag{44}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что из (14) и (44) следует, что Q_n удовлетворяет уравнению (20). Теорема 1.6 доказана.

Глава 2

Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1

2.1 Основные результаты

В данном параграфе приведем доказательства теорем 2.1.–2.4.

Доказательство теоремы 2.1.

Рассмотрим случай $n > 0$ (случай $n < 0$ рассматривается аналогично). По теореме Римана–Роха размерность пространства мероморфных функции на Γ с дивизором полюсов $\gamma_1 + \ldots + \gamma_g + nq$ равна

$$l(\gamma_1 + \ldots + \gamma_g + nq) = n + 1.$$

Требование, что финкция из этого пространства зануляется в точках $P_1, \ldots, P_n$ выделяет в нем одномерное подпространство. Условие (2) дает нам единственную функцию. Теорема 2.1 доказана.

Покажем, что для любой мероморфной функции $f(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка m в точке q существует единственный оператор вида

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \ldots + u_0(n)$$

такой, что

$$L_m\psi = f(P)\psi.$$

Рассмотрим случай $n > 0$ (случай $n < 0$ рассматривается аналогично). Заметим, что для любых $u_j(n)$ дивизор полюсов функции

$$\varphi_n(P) = L_m\psi - f(P)\psi$$

имеет вид

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_g + (m + n - 1)q.$$

При этом функция $\varphi_n(P)$ имеет нули в точках $P_1, \ldots, P_n$. Следовательно, мы можем выбрать функции $u_{m-1}(n), \ldots, u_0(n)$ так, чтобы функция $\varphi_n(P)$ имела нули в точках $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{m+n}$. Тогда по теореме Римана–Роха $\varphi_n(P) = 0$. Аналогично для мероморфной функции $g(P)$ существует оператор L_s такой, что $L_s\psi = g(P)\psi$. Операторы L_m и L_s коммутируют.

Доказательство теоремы 2.2.

Пусть Γ — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1). Функция $\psi_n(P)$ — соответствующая функция

Бейкера–Ахиезера. L_2, L_{2g+1} — операторы вида

$$L_2 = \sum_{j=0}^{2} u_j(n)T^j, \qquad L_{2g+1} = \sum_{j=0}^{2g+1} v_j(n)T^j, \quad u_2(n) = v_{2g+1}(n) = 1,$$

для которых выполнено (23). Функция $\psi_n(P)$ также удовлетворяет уравнению

$$\chi_n(P) = \frac{\psi_{n+1}(P)}{\psi_n(P)},$$

где $\chi_n(P)$ — рациональная функция на Γ с $2g+1$ простыми полюсами, зависящих от n. Отсюда следует, что функция $\chi_n(P)$ имеет следующее разложение в окрестности точки $q = \infty$

$$\chi_n = \frac{1}{k} + e_0(n) + e_1(n)k + \ldots, \tag{45}$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Коэффициенты оператора L_2 выражаются через $e_i(n)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Оператор*

$$L_2 = T^2 + u_1(n)T + u_0(n)$$

имеет следующие коэффициенты:

$$u_1(n) = -e_0(n) - e_0(n+1), \quad u_0(n) = e_0^2(n) - e_1(n) - e_1(n+1),$$

и представим в виде

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -e_0(n), \quad W_n = -e_1(n) - e_1(n+1).$$

Доказательство. Пользуясь тождеством (24), выразим $\psi_{n+2}(P)$ через $\psi_n(P)$, и $\chi(n,P)$, а именно

$$\psi_{n+2} = \psi_n \chi_2(n)\chi_2(n+1).$$

Теперь заменим $\psi_{n+1},\ \psi_{n+2}$ в равенстве $L_2\psi_n = z\psi_n$. Получим

$$P_1(n,P)\psi_n(P) = z\psi_n(P),$$

где

$$P_1(n) = \chi_2(n+1)\chi_2(n) + u_1(n)\chi_2(n) + u_0(n).$$

Следовательно, имеем тождество

$$P_1 = z = \frac{1}{k^2}. \tag{46}$$

Подставив (45) в (46) получим

$$P_1 - \frac{1}{k^2} = \frac{e_0(n) + e_0(n+1) + u_1(n)}{k} + (e_0(n)e_0(n+1) + e_1(n) +$$

$$e_1(n+1) + u_0(n) + e_0(n)u_1(n)) + O(k) = 0.$$

Отсюда находим коэффициенты оператора L_2. Из полученных формул следует, что L_2 имеет вид (27). Лемма 2.1 доказана.

Операторы $L_2 - z$ и $L_{2g+1} - w$ имеют общий правый делитель

$$T - \chi_n,$$

$$L_2 - z = l_1(T - \chi_n), \quad L_{2g+1} - w = l_2(T - \chi_n),$$

где l_1 и l_2 — некоторые операторы порядков 1 и $2g$.

Предположим, что имеет место равенство

$$(T+U_n)^2+W_n-z=(T+U_n+U_{n+1}+\chi_{n+1})(T-\chi_n),$$

при этом χ_n удовлетворяет уравнению

$$-z+U_n^2+W_n+\chi_n(U_n+U_{n+1}+\chi_{n+1})=0. \tag{47}$$

Обозначим через Q_n и S_n соответствующие полиномы степени g по z

$$Q_n=(z-\delta_1(n))\dots(z-\delta_g(n)),$$

$$S_n=-U_n(z-\lambda_1(n))\dots(z-\lambda_g(n)).$$

Также предположим, что коэффициенты Q_n и S_n связаны соотношением

$$Q_n=-\frac{S_{n-1}+S_n}{U_{n-1}+U_n}.$$

Тогда $\chi(n,P)$ можно переписать в виде

$$\chi(n,P)=\frac{w}{Q_n}+\frac{S_n}{Q_n}.$$

В этом случае уравнение (47) сводится к уравнению (25) на S_n,U_n,W_n. Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3.

Пусть

$$U_n=r_1cos(n),\qquad W_n=\frac{r_1^2\sin(g)\sin(g+1)}{2\cos^2(g+\frac{1}{2})}\cos(2n).$$

Уравнение (26) принимает вид

$$-\frac{1}{2}r_1(S_{n-1}+S_n)(\cos(n+1)+\cos(n+2))\big(-2z+r_1^2(2\cos^2(n)+$$

$$\frac{\sin(g)\sin(g+1)}{\cos^2(g+\frac{1}{2})}\cos(2n))\big)+8r_1^3(S_n-S_{n+1})\cos^3(\frac{1}{2})\cos(\frac{1}{2}-n)\times$$

$$\cos(\frac{1}{2}+n)\cos(\frac{3}{2}+n)+(S_{n+1}+S_{n+2})\Bigg(\frac{1}{2}r_1(\cos(1-n)+\cos(n))\big(-2z+$$

$$r_1^2(2\cos^2(n+1)+\cos(2(n+1))\sec^2(g+\frac{1}{2})\sin(g)\sin(g+1))\big)\Bigg). \quad (48)$$

Будем искать решение уравнения (48) в виде

$$S_n=A_{2g+1}\cos((2g+1)n)+A_{2g-1}\cos((2g-1)n)+\ldots+A_1\cos(n),$$

где $A_i = A_i(z)$. При подстановке S_n в (48) после преобразований получаем

$$B_s=8r_1^2A_{s-3}\cos^2(\frac{1}{2})(\cos(2g+1)-\cos(3-s))\sin(\frac{3-s}{2})+$$

$$A_{s-1}\Bigg(-r_1^2\sin(\frac{1-3s}{2})-4r_1^2\sin(\frac{5-3s}{2})+8z\sin(\frac{5-3s}{2})+$$

$$4r_1^2\sin(\frac{1-s}{2})+8z\sin(\frac{3-s}{2})+4r_1^2\sin(\frac{5-s}{2})+2r_1^2\sin(\frac{7-s}{2})+$$

$$2\sin(1)\sin(2g)(-2(2z+r_1^2(-1+\cos(1)+\cos(2)))\cos(\frac{s}{2})\sin(\frac{3}{2})+$$

$$2(r_1^2-2z))\cos(\frac{3s}{2})\sin(\frac{5}{2})+2\cos(\frac{3}{2})(2z+r_1^2(1+3\cos(1)+$$

$$\cos(2)))\sin(\frac{s}{2})-2(r_1^2-2z))\cos(\frac{5}{2})\sin(\frac{3s}{2}))+$$

$$2\cos(1)\cos(2g)(2(2z+r_1^2(-1+\cos(1)+\cos(2)))\cos(\frac{s}{2})\sin(\frac{3}{2})-$$

$$2(r_1^2-2z)\cos(\frac{3s}{2})\sin(\frac{5}{2})-2\cos(\frac{3}{2})(2z+r_1^2(1+3\cos(1)+$$

$$\cos(2)))\sin(\frac{s}{2})+2(r_1^2-2z)\cos(\frac{5}{2})\sin(\frac{3s}{2}))-3r_1^2\sin(\frac{1+s}{2})+$$

$$r_1^2\sin(\frac{3(1+s)}{2})-2r_1^2\sin(\frac{3+s}{2})-r_1^2\sin(\frac{5+s}{2})+2r_1^2\sin(\frac{1+3s}{2})\Bigg)-$$

$$A_{s+1}\Bigg(2r_1^2\sin(\frac{1-3s}{2})+r_1^2\sin(\frac{3}{2}-\frac{3s}{2})-3r_1^2\sin(\frac{1-s}{2})-2r_1^2\sin(\frac{3-s}{2})-$$

$$r_1^2\sin(\frac{5-s}{2})+2\cos(1)\cos(2g)(2(2z+r_1^2(-1+\cos(1)+\cos(2)))\cos(\frac{s}{2})\sin(\frac{3}{2})-$$
$$2(r_1^2-2z)\cos(\frac{3s}{2})\sin(\frac{5}{2})+2\cos(\frac{3}{2})(2z+r_1^2(1+3\cos(1)+$$
$$\cos(2)))\sin(\frac{s}{2})-2(r_1^2-2z)\cos(\frac{5}{2})\sin(\frac{3s}{2}))+2\sin(1)\sin(2g)(-2(2z+$$
$$r_1^2(-1+\cos(1)+\cos(2)))\cos(\frac{s}{2})\sin(\frac{3}{2})+2(r_1^2-$$
$$2z)\cos(\frac{3s}{2})\sin(\frac{5}{2}-2\cos(\frac{3}{2})(2z+r_1^2(1+3\cos(1)+\cos(2)))\sin(\frac{s}{2}+$$
$$2(r_1^2-2z)\cos(\frac{5}{2})\sin(\frac{3s}{2}))+4r_1^2\sin(\frac{1+s}{2})+8z\sin(\frac{3+s}{2})+$$
$$4r_1^2\sin(\frac{5+s}{2})+2r_1^2\sin(\frac{7+s}{2})-r_1^2\sin(\frac{1+3s}{2})-4r_1^2\sin(\frac{5+3s}{2})+$$
$$8z\sin(\frac{5+3s}{2}))+8r_1^2A_{s+3}\cos^2(\frac{1}{2})(-\cos(1+2g)+\cos(3+s))\sin(\frac{3+s}{2})$$

Из равенства $B_s=0$ находим A_i. Далее выберем A_g таким образом, чтобы $S_n(z)$ принял вид

$$S_n=-U_nz^g+\delta_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\delta_0(n).$$

Мы нашли S_n, удовлетворяющий уравнению (26). Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4.

Пусть

$$U_n=a_2n^2+a_0,\quad W_n=-g(g+1)a_2^2n^2.$$

Уравнение (26) принимает вид

$$\big(S_{n-1}+S_n\big)\big(2a_0+a_2(5+6n+2n^2)\big)\big(a_2^2g(1+g)n^2+z-$$

$$(a_0+a_2n^2)^2\big)+\big(S_n-S_{n+1}\big)\big(2a_0+a_2-2a_2n+2a_2n^2\big)\big(2a_0+a_2+$$

$$2a_2n+2a_2n^2\big)\big(2a_0+a_2(5+6n+2n^2)\big)-\big(S_{n+1}+S_{n+2}\big)\big(2a_0+a_2-2a_2n+$$

$$2a_2n^2\big)\big(a_2^2g(1+g)(1+n)^2-(a_0+a_2(1+n)^2)^2+z\big)=0. \tag{49}$$

Полином $S_n(z)$, удовлетворяющий (49), будем искать в виде полинома четной степени $2g+2$ по n

$$S_n = A_{2g+2}n^{2g+2}+A_{2g}n^{2g}+\ldots+A_2n^2+A_0, \qquad A_i=A_i(z).$$

При подстановке полинома S_n в (49) в левой части получаем полином степени $(2g+8)$ по n

$$\beta_{2g+8}(n,z)n^{2g+8}+\beta_{2g+7}(n,z)n^{2g+7}+\ldots+\beta_0(n,z).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\beta_{2g+5}=\beta_{2g+6}=\beta_{2g+7}=\beta_{2g+8}=0.$$

Из (49) находим β_s

$$\beta_s = A_{s-3}\big(-2a_2^3(5+2g-s)(s-4)(2g+s-3)\big)+$$

$$A_{s-2}\big(a_2^3(-4g(g+1)+(s-4)(s-2))(s-3)(s+1)\big)+$$

$$A_{s-1}\big(\frac{1}{6}a_2^2(-12a_0(6+s(-29+4g(g+1)-3(s-6)s))+$$

$$a_2(-4g(s-1)(27+s(5s-22))-4g^2(s-1)(27+s(5s-22))+$$

$$3(s-3)(8+(s-3)s(8+(s-3)s))))-8a_2(s-3)z\big)+$$

$$A_s\big(-\frac{1}{6}(a_2(s+1)(6a_0a_2(4g(1+s)-8+4g^2(1+s)-s(2+3(s-3)s))+$$

$$a_2^2(-(s-2)(-6+(s-3)(s-1)^2s)+2g(6+s(9+4(s-4)s))+$$

$$2g^2(6+s(9+4(s-4)s)))+24(s-2)z)\Big)+$$

$$\sum_{m=1}^{2g+5}\Bigg((-1)^m\big(C_{s+m}^{m}(-(2a_0+5a_2)(a_0^2-z))+C_{s+m}^{m+1}(6a_2(a_0^2-z))+$$

$$+C_{s+m}^{m+2}(a_2(-6a_0^2+5a_2^2g(1+g)+2a_0a_2(-5+g+g^2)+2z))+$$

$$C_{s+m}^{m+3}(-6a_2^2(-2a_0+a-2g(1+g)))+C_{s+m}^{m+4}(a_2^2(-6a_0+a_2(-5+2g(1+g))))+$$

$$C_{s+m}^{m+5}(6a_2^3)-C_{s+m}^{m+6}(2a_2^3)\big)+\big(C_{s+m}^{m}((-2a_0-a_2)(a_2^2(4+g+g^2)+3a_0^2+$$

$$10a_0a_2+z))+C_{s+m}^{m+1}(-2a_2(9a_0^2+2a_2^2+2a_0a_2(4+g+g^2)-z))+$$

$$C_{s+m}^{m+2}(a_2(-18a_0^2+a_2^2(-2+g+g^2)-2a_0a_2(19+g+g^2)-2z))+$$

$$C_{s+m}^{m+3}(-2a_2^2(18a_0+a_2g(1+g)))+C_{s+m}^{m+4}(-a_2^2(18a_0+a_2(15+2g(1+g))))-$$

$$C_{s+m}^{m+5}(18a_2^3)-C_{s+m}^{m+6}(6a_2^3)\big)+2^m\big(C_{s+m}^{m}((2a_0+a_2)(a_0^2+$$

$$2a_0a_2-a_2^2(-1+g+g^2)-z))-C_{s+m}^{m+1}(4a_2(3a_0^2+a_2^2-2a_0a_2(-2+g+g^2)+z))-$$

$$C_{s+m}^{m+2}(4a_2(6a_0^2+a_2^2g(1+g)-2a_0a_2(-5+g+g^2)-2z))+C_{s+m}^{m+3}(-16a_2^2(-6a_0+$$

$$a_2g(1+g)))+C_{s+m}^{m+4}(16a_2^2(6a_0+a_2(5-2g(1+g))))+$$

$$C_{s+m}^{m+5}(192a_2^3)+C_{s+m}^{m+6}(128a_2^3)\big)\Bigg)A_{s+m},$$

где $0\le s<2g+4$, $\mathrm{C}_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)}$ при $m\ge k$, $\mathrm{C}_m^k=0$ при $m<k$, A_g — некоторая константа и $A_s=0$, если $s>2g+4$. Из равенства $\beta_s=0$ найдем A_i. A_g — подходящая константа. Мы показали, что существует S_n, удовлетворяющий (26). Теорема 2.4 доказана.

Замечание 2. *Можно непосредственно проверить, что при* $g=1,\dots,5$ *оператор*

$$L_2=(T+\alpha_2n^2+\alpha_1n+\alpha_0)^2-g(g+1)\alpha_2n(\alpha_2n+\alpha_1),\quad \alpha_2\ne 0$$

коммутирует с L_{2g+1}. По–видимому, это верно для любого g.

Приведем несколько примеров операторов L_{2g+1} из теорем 2.3–2.4 при $g = 1, 2$.

Пример 2.1. При $g = 1$ оператор

$$L_2 = (T + a_2n^2 + a_0)^2 - 2a_2^2n^2$$

коммутирует с оператором L_3

$$L_3 = T^3 + (a_2(3n^2 + 6n + 5) + 3a_0)T^2 +$$
$$\frac{1}{4}(a_2(2n^2 + 2n + 1) + 2a_0)(a_2(6n^2 + 6n - 1) + 6a_0)T +$$
$$\frac{1}{4}(a_2(2n^2 - 2n - 1) + 2a_0)(a_2(n^2 - 1) + a_0)(a_2(2n^2 + 2n - 1) + 2a_0).$$

Спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = \frac{1}{16}(z + a_2^2 - 2a_0a_2)(4z + a_2^2 - 4a_0a_2)^2.$$

Пример 2.2. При $g = 2$ положим для простоты формул $a_0 = -a_2$. Оператор

$$L_2 = (T + a_2(n^2 - 1))^2 - 6a_2^2n^2$$

коммутирует с оператором

$$L_5 = T^5 + 5a_2(n^2+4n+5)T^4 + \frac{5}{4}a_2^2(8n^4+48n^3+108n^2+108n+39)T^3 +$$
$$\frac{1}{4}a_2^3(40n^6 + 240n^5 + 240n^3 - 125n^2 + 460n^4 - 90n - 19)T^2 +$$
$$\frac{1}{4}a_2^4(20n^8+80n^7-60n^6-460n^5-15n^4+830n^3+17n^2-488n+139)T +$$
$$\frac{1}{4}a_2^5(4n^{10} - 80n^8 + 577n^6 - 1804n^4 + 2276n^2 - 784),$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = -\frac{1}{16}(4z + 45a_2^2)^2(z + 15a_2^2)(z + 3a_2^2)^2.$$

Пример 2.3. При $g = 1$ потенциалы $U,\ W$ примут вид

$$U_n = r_1 cos(n), \qquad W_n = \frac{r_1^2 \sin(1)\sin(2)}{2\cos^2(\frac{3}{2})}\cos(2n).$$

Тогда полином

$$S_n = A_3(z)\cos(3n) + A_1(z)\cos(n),$$
$$A_3(z) = \frac{r_1^3 \sin^2(\frac{1}{2})}{(2\cos(1) - 1)^3},$$
$$A_1(z) = \frac{r_1(2z(1 - 2\cos(1))^2 + r_1^2(5\cos(1) - 2\cos(2) - 3))}{2(1 - 2\cos(1))^2}.$$

При этом спектральная кривая

$$w^2 = \big(z - \frac{4r_1^2 \sin^4(\frac{1}{2})}{(1 - 2\cos(1))^2}\big)^2\big(z - \frac{r_1^2(1 - 2\cos(1) + \cos(2))}{(1 - 2\cos(1))^2}\big).$$

2.2 Вложение разностных операторов с полиномиальными коэффициентами в первую алгебру Вейля

Так как

$$[T, n] = T, \qquad [x, (-x\partial_x)] = x,$$

то замена $T \to x,\ n \to (-x\partial_x)$ в операторах

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2 n(\alpha_2 n + \alpha_1)$$

и L_{2g+1} дает пару коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, при этом оператору L_2 соответствует оператор

$$(x + \alpha_2(x\partial_x)^2 - \alpha_1(x\partial_x) + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2(x\partial_x)(\alpha_2(x\partial_x) - \alpha_1).$$

Таким образом, мы получаем коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля $A_1 = \mathbb{C}[x][\partial_x]$. Алгебра A_1 обладает следующими автоморфизмами $\varphi_j : A_1 \to A_1,\ j = 1, 2, 3.$

$$\varphi_1(x) = \alpha x + \beta\partial_x,\ \varphi_1(\partial_x) = \gamma x + \delta\partial_x,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$\varphi_2(x) = x + P_1(\partial_x), \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x,$$

$$\varphi_3(x) = x, \quad \varphi_3(\partial_x) = \partial_x + P_2(x),$$

где P_1, P_2 — произвольные полиномы. Диксмье [15] доказал, что группа автоморфизмов $Aut(A_1)$ порождается автоморфизмами вида φ_j. Если к $x, -x\partial_x \in A_1$ применить $\varphi \in Aut(A_1)$, то мы получим элементы $A = \varphi(x),\ B = \varphi(-x\partial_x)$, которые удовлетворяют уравнению $[A, B] = A$. Если заменить $T \to A,\ n \to B$ в L_2 и L_{2g+1}, то мы получим коммутирующие элементы в A_1. Таким образом, возникает следующая важная задача. Описать решения уравнения

$$[A, B] = A, \quad A, B \in A_1$$

с точностью до действия автоморфизмов $Aut(A_1)$. Каждое такое решение позволяет строить по коммутирующим элементам в кольце разностных операторов с полиномиальными коэффициентами $W_1 = \mathbb{C}[n][T]$, коммутирующие элементы в A_1. Как нам сообщил П.С. Колесников группа автоморфизмов $Aut(W_1)$ порождается элементами вида $\varphi : W_1 \to W_1$,

$$\varphi(T) = T, \qquad \varphi(n) = n + P(T),$$

где P — полином. Таким образом, с помощью $Aut(W_1)$ и $Aut(A_1)$ мы можем получать из коммутирующих разностных операторов коммутирующие дифференциальные операторы, причем с одной и той же спектральной кривой. Интересной задачей является задача описания всех коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами с фиксированной спектральной кривой, которые могут быть получены из коммутирующих разностных операторов с помощью указанной процедуры. Этот круг вопросов связан с гипотезой Диксмье. Эта гипотеза утверждает, что $End(A_1) = Aut(A_1)$ или по–другому, если имеется решение уравнения струны

$$[A, B] = 1, \qquad A, B \in A_1,$$

то операторы A и B могут быть получены из ∂_x и x с помощью некоторого автоморфизма $Aut(A_1)$, т.е.

$$A = \varphi(\partial_x), \quad B = \varphi(x), \quad \varphi \in Aut(A_1).$$

Общая гипотеза Диксмье стабильно эквивалентна гипотезе о Якобиане [47]. В недавней работе [48] было показано, что множество орбит действия группы $Aut(A_1)$ на множестве коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами с фиксированной спектральной кривой вида (1) всегда бесконечно при $g = 1$ и для любого g существует $F_g(z)$ с бесконечным числом орбит. Если удастся описать какой–то класс коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами (например, полученный из разностных операторов) с точностью до действия $Aut(A_1)$ с фиксированной спектральной кривой, то это даст шанс сравнить $Aut(A_1)$ и $End(A_1)$.

Глава 3

Связь одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с конечнозонными операторами Шредингера

В данной главе приведем доказательства теорем 3.1–3.2.

Доказательство теоремы 3.1.

Функция $\psi(x,P)$, удовлетворяющая уравнениям

$$L_2\psi = z\psi, \qquad L_{2g+1}\psi = w\psi,$$

также удовлетворяет уравнению

$$\chi(x,P) = \frac{\psi(x+\varepsilon,P)}{\psi(x,P)},$$

где $\chi(x,P)$ — рациональная функция на Γ с $2g+1$ простыми полюсами, зависящих от x. Отсюда следует, что $\chi(x,P)$ имеет следующее разложение в окрестности q

$$\chi(x,P) = \frac{1}{k} + e_0(x,\varepsilon) + e_1(x,\varepsilon)k + \dots, \qquad k = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Для того, чтобы найти $L_2,\ L_{2g+1}$ достаточно найти $\chi(x,P)$.

Операторы $L_2 - z$ и $L_{2g+1} - w$ имеют общий правый делитель

$$\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,P),$$

$$L_2 - z = l_1\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,P)\big), \qquad L_{2g+1} - w = l_2\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,P)\big),$$

где l_1 и l_2 — некоторые операторы порядков 1 и $2g$.

Предположим, что имеет место равенство

$$\big(\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x,\varepsilon)\big) - z =$$

$$\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + A(x,\varepsilon) + \chi(x+\varepsilon,P)\big)\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,P)\big),$$

при этом $\chi(x,P)$ удовлетворяет уравнению

$$-z + B(x,\varepsilon) + \chi(x,P)(A(x,\varepsilon) + \chi(x+\varepsilon,P)) = 0. \qquad (50)$$

Обозначим через $Q(x,\varepsilon,z)$ и $S(x,\varepsilon,z)$ соответствующие полиномы степени g по z

$$Q(x,\varepsilon,z) = (z - \beta_1(x,\varepsilon))\dots(z - \beta_g(x,\varepsilon)),$$

$$S(x,\varepsilon,z) = -\delta_g(x,\varepsilon)(z - \lambda_1(x,\varepsilon))\dots(z - \lambda_g(x,\varepsilon)).$$

Предположим, что коэффициенты Q и S связаны соотношением

$$Q(x,\varepsilon,z) = -\frac{S(x-\varepsilon,\varepsilon,z) + S(x,\varepsilon,z)}{A(x-\varepsilon,\varepsilon)}.$$

Тогда $\chi(x,P)$ можно переписать в виде

$$\chi(x,\varepsilon,z) = \frac{w}{Q(x,\varepsilon,z)} + \frac{S(x,\varepsilon,z)}{Q(x,\varepsilon,z)}.$$

В этом случае уравнение (50) сводится к уравнению (29) на $S(x,\varepsilon,z)$. Теорема 3.1 доказана.

При $g=1$ получаем следующие операторы

$$L_2=\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}+A(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}+B(x,\varepsilon),$$

$$L_3=\frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3}+\big(A(x,\varepsilon)+\delta_1(x+2\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}+$$

$$\big(\delta_1(x,\varepsilon)\delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon)+B(x,\varepsilon)+B(x+\varepsilon,\varepsilon)+c_2+\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}+$$

$$\big(-\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))}+\delta_1(x,\varepsilon)(B(x,\varepsilon)-\gamma(x,\varepsilon))\big),$$

где

$$A(x,\varepsilon)=\delta_1(x,\varepsilon)+\delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$B(x,\varepsilon)=\delta_1^2(x,\varepsilon)-c_2-\gamma(x,\varepsilon)-\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$\delta_1(x,\varepsilon)=-\frac{\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))}+\sqrt{F_1(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon))}}{\gamma(x,\varepsilon)-\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)},$$

$\gamma(x,\varepsilon)$ — произвольный функциональный параметр. Спектральная кривая пары $L_2,\ L_3$ задается уравнением $w^2=F_1(z)=z^3+c_2z^2+c_1z+c_0$. При этом

$$Q(x,\varepsilon,z)=z-\gamma(x,\varepsilon),$$

$$S(x,\varepsilon,z)=-\delta_1(x,\varepsilon)z+\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))}+\gamma(x,\varepsilon)\delta_1(x,\varepsilon).$$

Доказательство теоремы 3.2.

Пусть $F_1(z)=z^3+\frac{g_2}{4}z+\frac{g_3}{4}$ и пусть $\gamma(x,\varepsilon)=\wp(x-\varepsilon)$. Напомним, что $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $(\wp'(x))^2=4F_1(\wp(x))$. Тогда

$$A(x,\varepsilon)=\frac{1}{2}\frac{\wp'(x-\varepsilon,\varepsilon)+\wp'(x,\varepsilon)}{\wp(x-\varepsilon,\varepsilon)-\wp(x,\varepsilon)}+\frac{1}{2}\frac{\wp'(x,\varepsilon)+\wp'(x+\varepsilon,\varepsilon)}{\wp(x,\varepsilon)-\wp(x+\varepsilon,\varepsilon)},$$

$$B(x,\varepsilon)=\frac{1}{4}\biggl(\frac{\wp'(x-\varepsilon,\varepsilon)+\wp'(x,\varepsilon)}{\wp(x-\varepsilon,\varepsilon)-\wp(x,\varepsilon)}\biggr)^2-c_2-\wp(x-\varepsilon,\varepsilon)-\wp(x,\varepsilon).$$

Далее воспользуемся формулами

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)+\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}=\zeta(z-y)-\zeta(z)+\zeta(y),$$

$$\bigl(\zeta(v)+\zeta(y)+\zeta(z)\bigr)^2+\zeta'(v)+\zeta'(y)+\zeta'(z)=0,$$

которые верны, если $v+y+z=0$. Здесь $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса, а именно, $\zeta'(z)=-\wp(z)$, тогда

$$L_2=\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}+\bigl(-2\zeta(\varepsilon)-\zeta(x-\varepsilon)+\zeta(x+\varepsilon)\bigr)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}+\wp(\varepsilon),$$

$$L_3=\frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3}+\bigl(-3\zeta(\varepsilon)-\zeta(x-\varepsilon)+\zeta(x+2\varepsilon)\bigr)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}+$$

$$\bigl((\zeta(\varepsilon)+\zeta(x-\varepsilon)-\zeta(x))(\zeta(\varepsilon)+\zeta(x)-\zeta(x+\varepsilon))+2\wp(\varepsilon)+\wp(x)\bigr)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\wp'(\varepsilon),$$

$$Q(x,\varepsilon,z)=z-\wp(x-\varepsilon),$$

$$S(x,\varepsilon,z)=(\zeta(\varepsilon)+\zeta(x-\varepsilon)-\zeta(x))z-\frac{1}{2}\wp'(x)-\wp(x-\varepsilon)(\zeta(\varepsilon)+\zeta(x-\varepsilon)-\zeta(x)).$$

Имеет место разложение

$$A=-\frac{2}{\varepsilon}-2\wp(x)\varepsilon-\frac{1}{3}\wp''(x)\varepsilon^3+O(\varepsilon^5).$$

$$\tilde S=\frac{z-\wp(x)}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\wp'(x)+(z-\wp(x))\wp(x)\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

Тогда

$$L_2=\partial_x^2-2\wp(x)+O(\varepsilon),\quad L_3=\partial_x^3-3\wp(x)\partial_x-\frac{3}{2}\wp'(x)+O(\varepsilon).$$

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.1. *В работе [3*] построена дискретизация оператора Ламе для произвольного рода g. А именно, определим $A_g(x,\varepsilon)$ следующим образом. Положим*

$$A_1 = -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon),$$

$$A_2 = -\frac{3}{2}(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x-2\varepsilon) - \zeta(x+2\varepsilon),$$

где $\zeta(x)$ — функция Вейерштрасса. Далее, при нечетном $g = 2g_1+1$ положим

$$A_g = A_1 \prod_{k=1}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x-(2k+1)\varepsilon) - \zeta(x+(2k+1)\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k+1)\varepsilon)}\right),$$

при четном $g = 2g_1$

$$A_g = A_2 \prod_{k=2}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x-2k\varepsilon) - \zeta(x+2k\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k-1)\varepsilon)}\right).$$

Тогда оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A_g(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon) \tag{51}$$

коммутирует с оператором L_{2g+1}. Имеет место разложение

$$L_2 = \partial_x^2 - g(g+1)\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Мы проверили, что при $g = 1, 2$ (для $g = 1$ см. теорема 3.2), а также численно проверили, что при $g = 3, \ldots, 5$ спектральная кривая не зависит от параметра ε и совпадает со спектральной кривой оператора Ламе. По–видимому спектральная кривая не зависит от ε для любого g. Таким образом, оператор (51) *дает замечательную дискретизацию оператора Ламе с сохранением всех интегрируемых свойств.*

Заключение

В диссертационной работе изучаются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы рангов 1 и 2, отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой произвольного рода.

В работе получены следующие основные результаты.

1) В случае ранга 2 получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода.

2) Открыт новый класс операторов, а именно алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один, где оператор сдвига входит в эти операторы только с положительными степенями. Найдены спектральные данные и построены примеры таких операторов в случае гиперэллиптических

спектральных кривых.

3) Установлена связь алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с одномерными конечнозонными операторами Шредингера, в частности, получена дискретизация конечнозонных операторов Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Результаты этой работы могут быть использованы при дальнейшем исследовании одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, а также при построении решений рангов 1 и 2 солитонных уравнений.

Список литературы

[1] Wallenberg, G. *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke.* / G. Wallenberg // Arch. Math. Phys. bd. — 1909. — V. 15. P. 151–157.

[2] Burchnall, J. L., Chaundy, I. W. *Commutative ordinary differential operators.* / J. L. Burchnall, I. W. Chaundy // Proc.Lond.Math.Soc.Ser. — 1923. — V. 21, № 2. P. 420–440.

[3] Кричевер, И. М. *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.* /И. М. Кричевер // Успехи математических наук. — 1978. — Т. 33, № 4. С. 215–216.

[4] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Двумеризованная цепочка тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, № 3. — С. 51–88.

[5] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 6(216). — С. 47–68.

[6] Кричевер, И. М. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. С. 20–31.

[7] Кричевер, И. М. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 15–31.

[8] Гриневич, П. Г., Новиков, С. П. *О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами.* / П. Г. Гриневич, С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. С. 25–26.

[9] Гриневич, П. Г. *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов.* / П. Г. Гриневич // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. С. 19–24.

[10] Grunbaum, F. *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six.* / F. Grunbaum // Phys. D. — 1988. — V. 31, № 3. P. 424–433.

[11] Latham, G. *Rank* 2 *commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV.* / G. Latham // Appl. Math. Lett. — 1995. — V. 8, № 6. P. 73–78.

[12] Latham, G., Previato, E. *Darboux transformations for higher–rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations.* / G. Latham, E. Previato // Acta Appl. Math. — 1995. — V. 39. P. 405–433.

[13] Previato, E., Wilson, G. *Differential operators and rank* 2 *bundles over elliptic curves.* / E. Previato, G. Wilson // Compositio Math. — 1992. — V. 81,№ 1. P. 107 – 119.

[14] Dehornoy, P. *Opérateurs différentiels et courbes elliptiques.* / P. Dehornoy // Compositio Math. — 1981. — V. 43, № 1. P. 71 – 99.

[15] Dixmier, J. *Sur les algèbres de Weyl.* / J. Dixmier // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — V. 96. P. 209 – 242.

[16] Дринфельд, В. Г. *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутаивных колец.* / В. Г. Дринфельд // Функц. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. С. 11 – 14.

[17] Мохов, О. И. *Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой.* / О. И. Мохов // Успехи математических наук. — 1982. Т. 37, № 4(226). С. 169 – 170.

[18] Мохов, О. И. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.* / О. И. Мохов // Известия АН СССР, серия математическая. — 1989. Т. 53, № 6. С. 1291 – 1315.

[19] С. П. Новиков, *Коммутирующие операторы ранга* $l > 1$ *с периодическими коэффициентами.* / С. П. Новиков // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 6. С. 1311 – 1314.

[20] Миронов, А. Е. *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 5. С. 103 – 114.

[21] Миронов, А. Е. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2.* / А. Е. Миронов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2009. — Т. 6. С. 533 – 536.

[22] Миронов, А. Е. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2.* / А. Е. Миронов // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 3. С. 91 — 94.

[23] Zuo, D. *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2.* / D. Zuo //, SIGMA. — 2012. — V. 8, № 044. P. 1 – 11.

[24] Mokhov, O. I. *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients.* / O. I. Mokhov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — № 234. — P. 323 – 336.

[25] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода.* / О. И. Мохов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 2. С. 314 – 316.

[26] Mironov, A. E. *Self–adjoint commuting differential operators.* / A. E. Mironov // Inventiones mathematicae. — 2014. — V. 197, № 2. P. 417 – 431.

[27] Mironov, A. E. *Commuting higher rank ordinary differential operators.* / A. E. Mironov // Proceedings of 6th European Congress of Mathematics. — July 2012. — Kraków, Poland — Europ. Math. Soc. Publ. House, 2013. — P. 459 – 473.

[28] Mironov, A. E. *Periodic and rapid decay rank two self–adjoint commuting differential operators.* / A. E. Mironov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — № 234. — P. 309 – 321.

[29] Давлетшина, В. Н. *О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* / В. Н. Давлетшина // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — Т. 10. С. 109 – 112.

[30] Давлетшина, В. Н., Шамаев, Э. И. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* / В. Н. Давлетшина, Э. И. Шамаев // Сиб. матем. журнал. — 2014. — Т. Т. 55, № 4. С. 744 – 749.

[31] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // Успехи математических наук — 2015. — 70, № 1(421). С. 179 – 180.

[32] Миронов, А. Е. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два.* / А. Е. Миронов // Успехи математических наук. — 2016. — Т. 71, № 4(430). С. 155 – 184.

[33] Оганесян, В. С. *Об операторах вида* $?_x^4 + u(x)$ *из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g.* / В. С. Оганесян // Успехи математических наук — 2016. — 71, № 3(429). С. 201 – 202.

[34] Оганесян, В. С. *Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2.* / В. С. Оганесян // Матем. заметки — 2016. — 99, № 2. С. 283 – 287.

[35] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // Функц. анализ и его прил. — 2016. — 50, № 1. С. 67 – 75.

[36] Давлетшина, В. Н. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации заданные солитонными уравнениями.* / В. Н. Давлетшина // Матем. заметки — 2015. — 97, № 3. С. 350 – 358.

[37] Mumford, D. *An algebro–geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non–linear equations.* / D. Mumford // Proceedings of the International Symposium on Algebraic

Geometry. — Kyoto Univ., Kyoto. 1977. — Kinokuniya, Tokyo — 1978. — P. 115 – 153.

[38] Миронов, А. Е. *Дискретные аналоги операторов Диксмье.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, № 10. 57 – 66.

[39] Кричевер, И. М. *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* / И. М. Кричевер // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, №1. С. 31 – 36.

[40] Кричевер, И. М. *Коммутирующие разностные операторы и комбинаторное преобразование Гэйла* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 3. С. 22 – 40.

[41] Новиков, С. П. *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза.* / С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. С. 54 – 66.

[42] Дубровин, Б. А. *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.* / Б. А. Дубровин // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 3. С. 41 – 51.

[43] Итс, А. Р., Матвеев, В. Б. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N–солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса.* / А. Р. Итс, В. Б. Матвеев // ТМФ. — 1975. — Т. 23, № 1. С. 51 – 68.

[44] Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.* / Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 1976. — Т. 31, № 1(187). С. 55 – 136.

[45] Кричевер, И. М., Забродин, А. Б. *Спиновое обобщение модели Рейсенарса–Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина* / И. М. Кричевер, А. Б. Забродин // УМН. — 1995. — Т. 50, № 6(306). С. 3 – 56.

[46] Миронов, А. Е., Накаяшики, А. *Дискретизация модулей Бейкера–Ахиезера и коммутирующие разностные операторы нескольких дискретных переменных.* / А. Е. Миронов, А. Накаяшики // Тр. ММО. — 2013. — Т. 74, № 2. С. 317 – 338.

[47] Kanel–Belov, A. Ya., Kontsevich, M. L. *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture* / A. Ya. Kanel–Belov, M. L. Kontsevich // Mosc. Math. J. — 2007. — V. 7, № 2. P. 209 – 218.

[48] Mironov, A. E., Zheglov, A. B. *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra.* / A. E. Mironov, A. B. Zheglov, // International Math. Research Notices. — 2016. — V. 2016, № 10. P. 2974 – 2993.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *О коммутирующих разностных операторах ранга 2.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Успехи математических наук. — 2015. —Т. 70, № 3(423). — С. 181–182.

[2*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. С. 399–401.

[3*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один и их связь с конечнозонными операторами Шредингера.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 478, № 4. С. 392–394.

[4*] Маулешова, Г. С. *Коммутирующие разностные операторы, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым* / Г. С. Маулешова // Сборник трудов международной научно–практической конференции, посвященной научно–педагогической деятельности академика А. Д. Тайманова «Современная математика: проблемы и приложения »:/ Кызылор-

динский гос. ун–т. имени Коркыт Ата, Алматы: "Гылым ордасы". — 2013. — С. 218 – 222.

[5*] Mauleshova, G. S., Mironov, A. E. *Discrete Dynamics of the Tyurin Parameters and Commuting Difference Operators* [Электронный ресурс] / Gulnara S. Mauleshova, Andrey E. Mironov // International Youth Conference «Geometry and Control », Moscow, April 14–18, 2014: Abstracts. — Moscow: Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences. — 2014. — P. 34 – 35. — Режим доступа: http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf.

[6*] Mauleshova, G. S., Mironov, A. E. *On Commuting Difference Operators of Rank One* [Электронный ресурс] / Gulnara Mauleshova, Andrey Mironov // Международная конференция «Динамика в Сибири », Новосибирск. -— 2016. — 1 с. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/ds/2016/pdfs/mauleshova.pdf

[7*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Дискретизация конечнозонных операторов Ламе* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Сборник материалов международной научно–практической конференции, посвященной 100–летию доктора физико–математических наук, академика А. Д. Тайманова «Тайма-

новские чтения — 2017 »: Математика / Западно–Казахстанский гос. ун–т. имени М. Утемисова, Уральск. — 2017. — С. 44.