Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

На правах рукописи

Сапарбаева Баян Талгатовна

Коммутирующие дифференциальные операторы и гамильтоново минимальные лагранжевы поверхности

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д. ф.–м. н., профессор РАН А. Е. Миронов

Новосибирск — 2016

Содержание

Введение

Диссертация посвящена изучению коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга два и алгебро-геометрических операторов Шрёдингера, связанных с гамильтоново минимальными лагранжевыми поверхностями в $\mathbb{C}P^2$. В диссертационной работе доказано, что для любой эллиптической спектральной кривой существуют обыкновенные коммутирующие несамосопряженные дифференциальные операторы Кричевера–Новикова ранга 2 порядков 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. В диссертации найдена связь между собственными функциями одномерных операторов Шрёдингера с полиномиальными потенциалами 3 и 4 степени и совместными собственными функциями некоторых коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2. Построены примеры конечнозонных на одном уровне энергии двумерных операторов Шрёдингера, коэффициенты которых выражены через $\wp$-функцию Вейерштрасса, при этом спектральные кривые операторов имеют род больше 1. Изучен двумерный оператор Шрёдингера, связанный с одним семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$.

Первая глава посвящена изучению операторов Кричевера–Новикова порядков 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами.

Напомним некоторые основные результаты теории коммутирующих дифференциальных операторов. В 1905 году Шуром [1] была доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть L_n, L_m и L_k — дифференциальные операторы порядков n, m и k соответственно ($n \geq 1$). Если $L_nL_m = L_mL_n$ и $L_nL_k = L_kL_n$, то $L_mL_k = L_kL_m$.*

Позже в 1923 году Бурхналл и Чаунди в [2] получили следующий важный результат.

Лемма. *Если $L_nL_m = L_mL_n$, то существует ненулевой полином $R(z,w)$, такой что $R(L_n, L_m) = 0$.*

Полином $R(z,w)$ определяет *спектральную кривую*

$$\Gamma = \{(z,w) : R(z,w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Если ψ — совместная собственная функция операторов L_n и L_m

$$L_n\psi = z\psi, \qquad L_m\psi = w\psi,$$

то точка с координатами (z,w) принадлежит спектральной кривой

Г. *Рангом* пары L_n, L_m называется размерность пространства совместных собственных функций

$$l = \dim\{\psi : L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi\},$$

где (z, w) — точка общего положения на Г.

Если коммутирующие операторы имеют ранг один, то их совместные собственные функции (*функции Бейкера–Ахиезера*) и коэффициенты операторов выражаются явно через тэта–функцию многообразия Якоби спектральной кривой с помощью конструкции Кричевера [3]. В случае ранга $l > 1$, Кричевером [4] показано, что нахождение функции Бейкера–Ахиезера сводится к решению интегрального уравнения, точное решение которого получить не удается.

Кричевер и Новиков [5] предложили метод деформации параметров Тюрина для нахождения коммутирующих операторов ранга больше 1, который не нуждается в нахождении функции Бейкера–Ахиезера. С помощью этого метода в [5] найдены операторы ранга два отвечающие эллиптическим спектральным кривым. При этом оператор порядка 4 имеет вид

$$L_{KN} = (\partial_x^2 + V_1(x))^2 + V_2(x)\partial_x + \partial_x V_2(x) + V_3(x),$$

где

$$
\begin{aligned}
V_1(x) &= -\frac{1}{4c_x^2}+\frac{c_{xx}^2}{4c_x^2}-\frac{c_{xxx}}{2c_x}\\
&\quad +2\big(\zeta(\gamma_0+c)-\zeta(2c)-\zeta(\gamma_0-c)\big)c_x\\
&\quad +c_x^2\big(2\wp(2c)-\wp(\gamma_0+c)-\wp(\gamma_0-c)\\
&\quad -(\zeta(\gamma_0+c)-\zeta(2c)-\zeta(\gamma_0-c))^2\big),\\
V_2(x) &= c_x\big(\wp(\gamma_0-c(x))-\wp(\gamma_0+c(x))\big),\\
V_3(x) &= -\big(\wp(\gamma_0-c(x))+\wp(\gamma_0+c(x))\big),
\end{aligned}
$$

$\wp(z),\zeta(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольная функция, γ_0 — постоянная. Оператор L_{KN} коммутирует с оператором $\tilde{L}_{KN}$ порядка 6. Эти операторы (операторы Кричевера–Новикова) удовлетворяют тождеству

$$\tilde{L}_{KN}^2=4L_{KN}^3+g_2L_{KN}+g_3,\qquad g_2,g_3\in\mathbb{C}.$$

Примечательно, что операторы Кричевера–Новикова могут иметь полиномиальные коэффициенты. Первые примеры таких операторов были найдены Диксмье [6]

$$L_D=\left(\partial_x^2-x^3-a\right)^2-2x,$$
$$\tilde{L}_D=\left(\partial_x^2-x^3-a\right)^3-\frac{3}{2}\big(x\left(\partial_x^2-x^3-a\right)+\left(\partial_x^2-x^3-a\right)x\big),$$

при этом $\tilde{L}_D^2=L_D^3+a$. Гриневич [7] выделил среди операторов Кричевера–Новикова операторы с рациональными коэффициентами.

В первой главе мы доказываем что для любой фиксированной спектральной кривой вида

$$w^2 = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

существуют коммутирующие несамосопряженные операторы Кричевера–Новикова порядков 4 и 6 ранга 2 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. Имеет место теорема.

Теорема 1.1 ([1*]). *Для произвольной спектральной кривой* Γ*, заданной уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

произвольных $(z_0, w_0) \in \Gamma, w_0 \neq 0$ *и произвольного целого* $n \geq 1$ *существуют полиномы*

$$R = \delta_{2n+2} x^{2n+2} + \ldots + \delta_0, \quad P = \beta_n x^n + \ldots + \beta_0,$$

с $\delta_{2n+2} \neq 0$*,* $\beta_n \neq 0$*, такие что оператор*

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + R\right)^2 + (4w_0 P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0 P_x) - 16F(z_0)P^2$$
$$+4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0$$

коммутирует с оператором L_6 *порядка 6 с полиномиальными коэффициентами. Спектральной кривой операторов* L_4, L_6 *является* Γ.

Отметим, что операторы ранга три в случае эллиптических спектральных кривых были найдены Моховым [8].

Во второй главе указана связь между одномерными операторами Шрёдингера с полиномиальными потенциалами третьей и четвертой степени и обыкновенными коммутирующими дифференциальными операторами ранга 2.

В работе [9] предложен метод нахождения примеров операторов ранга два, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым рода $g > 1$ (см. также [10]–[15]). В частности, в [9] доказано, что

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 g(g+1)x$$

коммутирует с оператором порядка $4g+2$. Обозначим через $\varphi^\sharp$ решения уравнения

$$\big(\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0\big)\varphi^\sharp = 0.$$

Имеет место теорема.

Теорема 2.1 ([2*]). *1. Пусть $g = 2$, z — решение уравнения*

$$z^2 + 4\alpha_2 z + 12\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

Тогда

$$L_4^\sharp \psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\sharp, p(x) = 6\alpha_3 x + z + 4\alpha_2$.

2. Пусть $g = 4$, z — решение уравнения

$$z^3 + 20\alpha_2 z^2 + 16(4\alpha_2^2 + 13\alpha_1\alpha_3)z + 320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2) = 0.$$

Тогда

$$L_4^\sharp\psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\sharp$, $p(x) = 280\alpha_3^2x^2 + 20\alpha_3(z+16\alpha_2)x + z^2 + 20\alpha_2 z + 64\alpha_2^2 + 168\alpha_1\alpha_3$.

При $g = 2, 4$ обозначим через $\tilde{L}_4^\sharp$, $\tilde{L}_{4g+2}^\sharp$ операторы, которые получаются из $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ сопряжением, т.е.

$$\tilde{L}_4^\sharp = p^{-1}L_4^\sharp p, \qquad \tilde{L}_{4g+2}^\sharp = p^{-1}L_{4g+2}^\sharp p$$

(функция $p(x)$ указана в теореме 2.1).

Следствие. *При $g = 2, 4$ операторы $\tilde{L}_4^\sharp$, $\tilde{L}_{4g+2}^\sharp$, $L_2^\sharp$ образуют коммутативное кольцо по модулю $L_2^\sharp$, т.е.*

$$[\tilde{L}_4^\sharp, L_2^\sharp] = B_1L_2^\sharp, \qquad [\tilde{L}_{4g+2}^\sharp, L_2^\sharp] = B_2L_2^\sharp, \tag{1}$$

где B_1, B_2 — некоторые операторы.

Непосредственной проверкой мы установили, что при $g = 1, 2$, если выполняется условие

$$\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_4^2 = 0,\ \alpha_4 \neq 0, \tag{2}$$

то оператор

$$L_4^\flat = (\partial_x^2 + \alpha_4x^4 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2 + 2g(g+1)x(\alpha_3 + 2\alpha_4x)$$

коммутирует с оператором порядка $4g + 2$. По-видимому, это верно для любых g. При $\alpha_3 = \alpha_1 = 0$ это доказано в [16]. Обозначим через

$\varphi^\flat$ решение уравнения

$$(\partial_x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\varphi^\flat = L_2^\flat \psi^\flat = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ удовлетворяют уравнению (2).

Теорема 2.2 ([2*])**.** *1. Пусть $g = 1$, $z = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_4} - 4\alpha_2$. Тогда $L_4^\flat \psi = z\psi$, где $\psi = p\varphi^\flat, p(x) = 4\alpha_4 x + \alpha_3$.*

2. Пусть $g = 2$, z — решение уравнения

$$z^2 - \left(\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_4} - 16\alpha_2\right)z + 24\alpha_1\alpha_3 + 192\alpha_0\alpha_4 = 0.$$

Тогда

$$L_4^\flat \psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\flat$, $p(x) = 24\alpha_4^2 x^2 + 12\alpha_3\alpha_4 x - 3\alpha_3^2 + \alpha_4(z + 16\alpha_2)$.

Также по схеме [9] в [15] найден оператор

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)e^x,$$

который коммутирует с оператором порядка $4g+2$. Обозначим через $\varphi^\natural$ решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0 + \frac{1}{4}(g+\varepsilon)^2\right)\varphi^\natural = 0.$$

Доказана следующая теорема

Теорема 2.3 ([2*])**.** *1. Пусть $\varepsilon = 0$, тогда*

$$L_4^\natural \psi = -\frac{1}{4}g^2(4\alpha_0 + g^2)\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\natural$, $p(x) = e^{gx/2}$.

2. Пусть $\varepsilon = 1$, *тогда*

$$L_4^\natural \psi = -\frac{1}{4}(g+1)^2(4\alpha_0 + (g+1)^2)\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\natural$, $p(x) = e^{-(g+1)x/2}$.

В Главе 3 рассматриваются двумерные конечнозонные (алгебро-геометрические) на одном уровне энергии операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами, которые отвечают спектральным кривым рода больше 1.

Двумерный оператор Шрёдингера

$$L = \partial_z \partial_{\bar{z}} + \nu(z, \bar{z})\partial_{\bar{z}} + u(z, \bar{z}) \tag{3}$$

называется *конечнозонным* на одном уровне энергии, если блоховские функции (совместные собственные функции L и операторов трансляций — операторов сдвига на периоды) оператора L на одном уровне энергии параметризуются римановой поверхностью Γ конечного рода. Конечнозонные на одном уровне энергии двумерные операторы Шрёдингера введены Дубровиным, Кричевером и Новиковым [17]. Такие операторы восстанавливаются по спектральным данным $\{\Gamma, q_1, q_2, \gamma\}$, где Γ — риманова поверхность, q_1, q_2 — выделенные точки на Γ, γ — неспециальный дивизор степени g, g — род Γ. Блоховская функция (двухточечная функция Бейкера–Ахиезера) имеет вид

$$\psi(z,\bar z,P)=\exp\left\{z\int_Q^P\Omega_1+\bar z\int_Q^P\Omega_2\right\}\frac{\theta(U_1z+U_2\bar z+f(P)+W)\theta(W)}{\theta(f(P)+W)\theta(U_1z+U_2\bar z+W)},$$

где θ — тэта-функция многообразия Якоби спектральной кривой Γ, Ω_i — нормированный мероморфный дифференциал с полюсом второго порядка в q_i, $f(P)$ — отображение Абеля, U_i, V_i, W — некоторые векторы, определяемые спектральными данными, Q — фиксированная точка на Γ (см. в [17]). При этом

$$\begin{aligned}\nu(z,\bar z)&=-\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\theta(U_1z+U_2\bar z+V_1+W)}{\theta(U_1z+U_2\bar z+V_2+W)},\\ u(z,\bar z)&=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\ln\theta(U_1z+U_2\bar z+W).\end{aligned}\tag{4}$$

Пусть f_1, f_2 — мероморфные функции на Γ с полюсом в q_1, а g_1, g_2 — мероморфные функции с полюсом в q_2. Тогда существуют единственные дифференциальные операторы $L(f_i)$ и $\widetilde L(g_i)$ такие, что

$$L(f_i)\psi=f_i\psi,\qquad \widetilde L(g_i)\psi=g_i\psi$$

$$[L(f_1),L(f_2)]=0,\qquad [\widetilde L(g_1),\widetilde L(g_2)]=0.$$

Оператор Шрёдингера L удовлетворяет тождеству

$$[L,L(f_i)]=B_iL,\qquad [L,\widetilde L(g_i)]=\widetilde B_iL,$$

где B_i и $\widetilde B_i$ — некоторые операторы.

Основные результаты этой главы — следующие теоремы.

Теорема 3.1 ([3*]). *Оператор Шрёдингера*

$$L=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}+a\left(\frac{\sqrt{g_0}-\wp'(az+b\bar z)}{2\wp(az+b\bar z)}\right)\frac{\partial}{\partial\bar z}+\frac{bg(g+1)\wp(az+b\bar z)}{2a}\tag{5}$$

является конечнозонным, где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$(\wp'(z))^2 = -\frac{2g(g+1)}{a^2}\wp(z)^3 + g_2\wp(z)^2 + g_1\wp(z) + g_0.$$

Спектральная кривая оператора H — гиперэллиптическая кривая рода g.

Таким образом, для оператора L тэта-функциональные формулы (4) для (3) редуцируются к более простым формулам (5).

Теорема 3.2 ([3*]). *Оператор Шрёдингера*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{7a\wp'(az+b\bar{z})}{20g_2a^2 - 14\wp(az+b\bar{z})}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{b\wp(az+b\bar{z})}{2a}$$

является конечнозонным, где $\wp$ удовлетворяет уравнению

$$(\wp'(z))^2 = -\frac{1}{2a^2}\wp(z)^3 + g_2\wp(z)^2 - \left(\frac{7g_0}{10g_2a^2} + \frac{20g_2^2a^2}{49}\right)\wp(z) + g_0.$$

Оператор L из теоремы 3.2 коммутирует с самосопряженным оператором L_4 по модулю L

$$[L, L_4] = BL,$$

где

$$L_4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \wp(az+b\bar{z})\right)^2 - \frac{15}{14}g_2a^2\wp(az+b\bar{z}) + \frac{3}{8}\wp(az+b\bar{z})^2.$$

В главе 4 рассматривается двумерный оператор Шрёдингера, связанный с одним семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$.

Двумерный оператор Шрёдингера возникает во многих задачах дифференциальной геометрии. В частности к этому классу задач относится построение минимальных и гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$.

Подмногообразие $M \subset \mathbb{C}P^n$ (погруженное или вложенное), $\dim_{\mathbb{R}} M = n$, называется *лагранжевым,* если ограничение формы Фубини–Штуди на M равно нулю. Подмногообразие M называется *гамильтоново минимальным* (H-минимальным), если вариации объема M вдоль всех гамильтоновых полей равны 0. В [18] были построены первые примеры гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}P^n$ (отличных от минимальных). С другой стороны, в [19] было показано, что с каждой лагранжевой поверхностью в $\mathbb{C}P^2$ связан естественным образом двумерный оператор Шрёдингера. Цель этой работы — изучить оператор Шрёдингера, связанный с гамильтоново минимальными лагранжевыми поверхностями, построенными в [18].

Будем задавать конформное лагранжево погружение области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}P^2$ через композицию $r : \Omega \to S^5 \subset \mathbb{C}^3$ и проекцию расслоения Хопфа $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$, где $r = (r_1, r_2, r_3)$, r_i — комплекснозначная функция. Имеет место лемма (см. [19]).

Лемма. *Компоненты r_j вектор-функции r удовлетворяют урав-*

нению Шрёдингера

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0,$$

где $2e^v(dx^2 + dy^2)$ *— индуцированная метрика на поверхности, а* $\beta(x, y)$ *— лагранжев угол, определяемый равенством*

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 *— координаты в* $\mathbb{C}^3, x, y$ *— координаты на* Ω, σ *— репер образованный векторами* $r, \frac{r_x}{|r_x|}, \frac{r_y}{|r_y|}$.

Напомним конструкцию построения гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ из [18]. Возьмем двумерный конус $K \subset \mathbb{R}^3$, заданный уравнением

$$mu_1^2 + nu_2^2 + ku_3^2 = 0, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}, \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим пересечение $\tilde{K}$ конуса K с единичной сферой $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Через T^1 обозначим окружность в $\mathbb{C}^3$

$$T^1 = \{(e^{\pi i m y}, e^{\pi i n y}, e^{\pi i k y}),\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Нам понадобится решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}$, которая порождена числами m, n, k, т.е.

$$\Lambda = \{mp_1 + np_2 + kp_3,\ p_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R} | \lambda\lambda^* \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}$ — двойственная решетка к Λ. Обозначим через G следующую фактор-группу $G = \Lambda^*/2\Lambda^* \simeq \mathbb{Z}_2$. Группа G свободно действует на $\tilde{K} \times T^1$, а именно, если $\gamma \in G$, то

$$\gamma(u_1,\ u_2,\ u_3,\ y) = (u_1 \cos(\pi m\gamma),\ u_2 \cos(\pi n\gamma),\ u_3 \cos(\pi k\gamma),\ y + \gamma),$$

Отметим, что $\cos(\pi m\gamma)$, $\cos(\pi n\gamma)$, $\cos(\pi k\gamma)$ равны ± 1. Фактор-многообразие $\tilde{K} \times T^1/G$ диффеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна.

В [18] показано, что образ многообразия $\tilde{K} \times T^1/G$ при композиции отображений $\mathcal{H} \circ \omega$, где

$$\omega : \tilde{K} \times S^1/G \to S^5, \quad \omega(u,\ y) = (u_1 e^{\pi i m y}, u_2 e^{\pi i n y}, u_3 e^{\pi i k y}),$$

является H-минимальной лагранжевой бутылкой Клейна, либо тором.

Обозначим полученную поверхность через $\Sigma = \mathcal{H} \circ \omega(\tilde{K} \times T^1/G)$. Предположим без ограничения общности, что $m < n < 0 < k$. Имеет место теорема.

Теорема 4.1 ([9*]). *Поверхность Σ является образом композиции отображений $\mathcal{H} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, где $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$,*

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &= \sqrt{\frac{k}{k-m}} \mathrm{cn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi m y}, \\
\psi_2(x, y) &= \sqrt{\frac{k}{k-n}} \mathrm{sn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi n y}, \\
\psi_3(x, y) &= \sqrt{\frac{k(n-m)\mathrm{cn}^2(\nu x, \kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}} e^{i\pi k y},
\end{aligned}$$

$\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi,\ \kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}},\ \ \mathrm{sn}(\nu x,\kappa), \mathrm{cn}(\nu x,\kappa)$ — *эллиптические функции Якоби. Индуцированная метрика на Σ имеет вид* $ds^2 = 2e^v(dx^2+dy^2),$ *где*

$$2e^v = k\pi^2\Big((m-n)\ \mathrm{sn}(\nu x,\kappa)^2 - m\Big).$$

Функции ψ_i удовлетворяют уравнению Шрёдингера $L\psi_i = 0$, где

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y + 2k\pi^2\big((m-n)\ \mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m\big).$$

В четвертой главе мы указываем некоторые свойства оператора L, полученного в теореме 4.1.

Результаты главы 1 получены в неразделимом соавторстве с А.Е. Мироновым и А.Б. Жегловым, а результаты главы 2 получены в неразделимом соавторстве с А.Е. Мироновым. Результаты глав 3, 4 получены автором самостоятельно.

Полученные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных и электронных изданиях [1*] – [9*], три из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1*] – [3*], шесть — в тезисах докладов и материалах конференций [4*] – [9*]. Результаты работ [1*], [8*] получены в неразделимом соавторстве с А.Е. Мироновым и А.Б. Жегловым, а результаты работ [2*], [7*] получены в неразделимом соавторстве с А.Е. Мироновым.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д. ф.–м. н. Андрею Евгеньевичу Миронову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку; а также д. ф–м. н. Александру Борисовичу Жеглову за интерес к работе и ценные замечания.

1 Коммутирующие дифференциальные операторы Кричевера–Новикова с полиномиальными коэффициентами

В этой главе мы изучаем пары коммутирующих дифференциальных операторов порядков 4 и 6 ранга два. Общий вид таких операторов в терминах специальных функций на эллиптической кривой был найден Кричевером и Новиковым [5]. Оператор порядка 4 имеет вид

$$L_{KN} = (\partial_x^2 + V_1(x))^2 + V_2(x)\partial_x + \partial_x V_2(x) + V_3(x), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{c_{xx}^2}{4c_x^2} - \frac{c_{xxx}}{2c_x} \\
&\quad +2\big(\zeta(\gamma_0+c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0-c)\big)c_x \\
&\quad +c_x^2\big(2\wp(2c) - \wp(\gamma_0+c) - \wp(\gamma_0-c) \\
&\quad -(\zeta(\gamma_0+c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0-c))^2\big), \\
V_2(x) &= c_x\big(\wp(\gamma_0-c(x)) - \wp(\gamma_0+c(x))\big), \\
V_3(x) &= -\big(\wp(\gamma_0-c(x)) + \wp(\gamma_0+c(x))\big),
\end{aligned}$$

$\wp(z), \zeta(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольная функция, γ_0 — постоянная. Оператор L_{KN} коммутирует с оператором $\tilde{L}_{KN}$ порядка 6. Эти операторы удовлетворяют тождеству

$$\tilde{L}_{KN}^2 = 4L_{KN}^3 + g_2 L_{KN} + g_3, \qquad g_2, g_3 \in \mathbb{C}.$$

Совместные собственные функции L_{KN} и $\tilde{L}_{KN}$ образуют векторное расслоение ранга два над аффинной алгебраической (спектральной) кривой

$$w^2 = 4z^3 + g_2 z + g_3$$

(общую теорию операторов ранга больше 1 см. в [4]). Операторы $L_{KN}, \tilde{L}_{KN}$ изучались в [7], [8], [20]–[31]. Примечательно, что операторы Кричевера–Новикова могут иметь полиномиальные коэффициенты. Первые примеры таких операторов были найдены Диксмье [6]

$$L_D = \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)^2 - 2x,$$
$$\tilde{L}_D = \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\partial_x^2 - x^3 - a\right) + \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)x\right),$$

при этом $\tilde{L}_D^2 = L_D^3 + a$.

Гриневич [7] нашел условия, когда операторы Кричевера–Новикова имеют рациональные коэффициенты.

Теорема 1. ([7]) *Пара коммутирующих операторов $L_{KN}, \tilde{L}_{KN}$ с неособой алгебраической кривой Γ, определяемой уравнением $w^2 = P(z) = 4z^3 + g_2 z + g_3$, имеет рациональные коэффициенты тогда и только тогда, когда*

$$c(x) = \int_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где $q(x)$ — произвольная рациональная функция. Если $\gamma_0 = 0, q(x) = x$, и $P(z) = 4z^3 + 4a$, то $L_{KN}, 1/2\tilde{L}_{KN}$ совпадают с операторами Диксмье $L_D, \tilde{L}_D$.

Формально самосопряженные операторы с полиномиальными коэффициентами изучались в [28]. В этой главе мы изучаем общий (несамосопряженный) случай. Мы показываем, что для любой эллиптической спектральной кривой существуют несамосопряженные операторы порядка 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.1 ([1*])**.** *Для произвольной спектральной кривой* Γ*, заданной уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

произвольных $(z_0, w_0) \in \Gamma, w_0 \neq 0$ *и произвольного целого* $n \geq 1$ *существуют полиномы*

$$R = \delta_{2n+2} x^{2n+2} + \ldots + \delta_0, \quad P = \beta_n x^n + \ldots + \beta_0,$$

с $\delta_{2n+2} \neq 0$*,* $\beta_n \neq 0$*, такие что оператор*

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + R\right)^2 + (4w_0 P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0 P_x) - 16F(z_0)P^2 +$$

$$+4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0$$

коммутирует с оператором L_6 *порядка 6 с полиномиальными коэффициентами. Спектральной кривой операторов* L_4, L_6 *является* Γ.

Отметим, что операторы ранга три в случае эллиптических спектральных кривых были найдены Моховым [8]. Было бы интересно найти среди этих операторов операторы с полиномиальными коэффициентами. Отметим также, что недавно были получены новые результаты о коммутирующих операторах ранга больше 1 в случае спектральных кривых рода больше единицы (см. [8], [16], [28]–[33]).

Доказательство Теоремы 1.1

Коэффициенты оператора L_{KN} выражены через функциональный параметр $c(x)$ с помощью функций Вейерштрасса (см. (6)). Такая параметризация не очень удобна для изучения операторов с полиномиальными коэффициентами. Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится другая параметризация через функциональный параметр коэффициентов L_{KN}.

Лемма. *Пусть* Γ *— кривая, заданная уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Тогда оператор

$$\begin{aligned} L_4 = &\left(\partial_x^2 + R\right)^2 + (4w_0 P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0 P_x) - \\ &- 16F(z_0)P^2 + 4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $(z_0, w_0) \in \Gamma$, $P(x) = \frac{1}{W(x)+2z_0+c_2}$,

$$\begin{aligned} R(x) = &\frac{1}{4P_x^2}\big(2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) + 8F'(z_0)P^3(x) - \\ &2F''(z_0)P^2(x) + P_{xx}^2 - 2P_x P_{xxx}\big), \end{aligned} \tag{8}$$

$W(x)$ — *произвольная гладкая функция, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка* L_6. *При этом спектральной кривой* L_4 *и* L_6 *является* Γ.

Доказательство. Рассмотрим коммутирующие формально самосопряженные операторы $\tilde{L}_4, \tilde{L}_6$ порядков 4 и 6 со спектральной кривой Γ. Оператор $\tilde{L}_4$ может быть записан в виде

$$\tilde{L}_4 = \big(\partial_x^2 + V(x)\big)^2 + W(x).$$

Тогда $V(x)$ выражается через $W(x)$ следующим образом

$$V(x) = \frac{-16F\big(-\frac{1}{2}(c_2 + W)\big) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}$$

(см., например, [9] или [21]). Оператор $\tilde{L}_4 - z_0$ разлагается на множители (см. [9])

$$\tilde{L}_4 - z_0 = \big(\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_2\big)\big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big), \tag{9}$$

где

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q}, \qquad \chi_2 = \frac{3Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - \frac{Q_x^2}{Q^2} + V,$$
$$Q = z_0 + \frac{1}{2}(W + c_2).$$

При этом

$$\tilde{L}_6 - w_0 = l_4\big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big), \tag{10}$$

где l_4 — некоторый оператор четвертого порядка. По теореме Лазама–Превиато [23, следствие 2] несамосопряженные операторы Кричевера–Новикова могут быть получены из формально самосопряженных операторов $\tilde{L}_4 - z_0$ и $\tilde{L}_6 - w_0$ с помощью преобразования Дарбу, т.е. перестановкой множителей в (9) и (10)

$$\begin{aligned} L_4 &= \left(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\right)\left(\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_2\right) + z_0, \\ L_6 &= \left(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\right)l_4 + w_0. \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что L_4 принимает вид (7). □

Далее мы предполагаем, что $w_0 \neq 0$ (иначе L_4 является формально самосопряженным).

Лемма. *Оператор L_4 имеет полиномиальные коэффициенты тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $R(x)$ — полиномы.*

Доказательство. Если P и R полиномы, то очевидно, что L_4 имеет полиномиальные коэффициенты. Покажем обратное утверждение. Для этого перепишем L_4 в следующем виде

$$L_4 = \partial_x^4 + a_2(x)\partial_x^2 + a_1(x)\partial_x + a_0(x),$$

где из (7) следует, что

$$\begin{aligned} a_2 &= 2R = \frac{1}{2P_x^2}\big(2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) \\ &\qquad +8F'(z_0)P^3(x) - 2F''(z_0)P^2(x) \\ &\qquad +P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}\big), \\ a_1 &= 2R_x + 8w_0P_x. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_{2x} - a_1 = 8w_0P_x$. Таким образом, если a_1 и a_2 полиномы, то и P_x — полином, а, следовательно, и P — полином. □

Из (8) следует

$$
\begin{aligned}
4P_x^2R = &2P - 16F(z_0)P^4 + 8F'(z_0)P^3 \\
&- 2F''(z_0)P^2 + P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Далее мы предполагаем что P, R — полиномы вида

$$
\begin{gathered}
R = \alpha_{2n+2}^2 x^{2n+2} + \ldots + \alpha_0^2, \quad P = \beta_n x^n + \ldots + \beta_0, \\
\alpha_{2n+2} \neq 0, \quad \beta_n \neq 0.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Теорема 2. *Для любого* $n > 0$ *существует решение уравнения* (11) *в форме* (12).

Доказательство. Продифференцируем обе части (11) по x, а затем разделим на P_x. Получим

$$
\begin{aligned}
&P_{xxxx} + 4RP_{xx} + 2R_xP_x + 32F(z_0)P^3 \\
&\quad - 12F'(z_0)P^2 + 2F''(z_0)P - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Уравнение (11) эквивалентно системе уравнений: уравнению (13) и уравнению на свободный член в (11)

$$
2\alpha_0^2\beta_1^2 = \beta_0 - 8F(z_0)\beta_0^4 + 4F'(z_0)\beta_0^3 - F''(z_0)\beta_0^2 + 2\beta_2^2 - 6\beta_1\beta_3. \tag{14}
$$

Уравнение (13) эквивалентно системе из $3n+1$ уравнений с $3n+4$ переменными α_i, β_j. Заметим, что все уравнения имеют степень 3 и множество их решений состоит из точек в $\mathbb{C}^{3n+4}$ (с координатами α_i, β_j), которые лежат в пересечении $3n+1$ кубик заданных этими уравнениями. По теореме [34, глава 1, теорема 7.2] пересечение X этих кубик с квартикой (14) в $\mathbb{P}^{3n+4}$ (с однородными координатами

$\alpha_i, \beta_j, u)$ непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную 2. По этой же причине пересечение X с гиперплоскостью $Z = \{u = 0\}$ на бесконечности непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную 1.

Для доказательства утверждения достаточно доказать, что для любого фиксированного $n > 0$ существует одномерная неприводимая компонента $X \cap Z$. Из этого факта мы можем заключить, что аффинная часть пересечения X непуста (на самом деле, мы увидим, что эта аффинная часть содержит точку с ненулевыми координатами α_{2n+2} и β_n).

Однородные части наших уравнений в $\mathbb{P}^{3n+4}$, которые не зависят от u, могут быть легко записаны: для уравнения (13) это в точности коэффициенты при x^i уравнения

$$KP^3 + 4RP_{xx} + 2R_xP_x = 0, \tag{15}$$

где $K = 32F(z_0)$, и для уравнения (14) — это

$$\alpha_0^2\beta_1^2 + 4F(z_0)\beta_0^4 = 0. \tag{16}$$

Следующим наблюдением является то, что уравнения (15) всегда имеют решения вида

$$O = (\alpha_{2n+2} \neq 0 : \beta_n \neq 0 : 0 : \ldots : 0),$$

т.е. $R = \alpha_{2n+2}^2 x^{2n+2}, \quad P = \beta_n x^n$ для любого $n > 0$. Поэтому мы можем положить, например, $\beta_n = 1$, $\alpha_{2n+2} = i\sqrt{K}/(\sqrt{8}n)$.

Докажем, что для любого фиксированного $n > 0$ любая неприводимая компонента $X \cap Z$, содержащая O, имеет размерность 1. Рассмотрим открытую аффинную окрестность O: $\beta_n = 1$. И рассмотрим пересечение $X \cap Z$ с аффинной гиперплоскостью $\beta_0 = 0$. Так как пересечение содержит ту же точку O, оно непусто и поэтому каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную нулю. Докажем что это пересечение содержит в точности две точки: O и $O' = (-\alpha_{2n+2} : 1 : 0 \ldots : 0)$ (а, следовательно, все неприводимые компоненты $X \cap Z$, содержащие O, имеют размерность один).

Заметим, что из (16) следует, что либо $\alpha_0 = 0$, либо $\beta_1 = 0$. Если $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то из уравнения (15) следует, что $\alpha_0 = 0$. С другой стороны, мы можем рассмотреть (15) как обыкновенное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами на функцию $R(x)$. Решением этого уравнения является

$$R = \frac{-KP^4/8 + C}{P_x^2}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Так как $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то постоянная C должна быть нулем. Но тогда P должно делиться на P_x, т.е. $P = x^n$, так как $\beta_n = 1$ и $\beta_0 = 0$. Поэтому имеется только одно решение (P, R) у (15) и только два решения O, O' у соответствующих однородных уравнений.

Это означает что имеется точка в аффинной карте $u \neq 0$ в X, которая близка к O, т.е. ее координаты α_{2n+2} и β_n ненулевые. $\square$

2 Собственные функции одномерного оператора Шрёдингера с полиномиальными потенциалами

В этой главе мы укажем связь между собственными функциями одномерных операторов Шрёдингера, с полиномиальными потенциалами 3 и 4 степени, и собственными функциями обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов ранга два (функциями Бейкера–Ахиезера ранга два).

Совместной собственной функцией обыкновенных коммутирующих операторов ранга 2 является функция Бейкера–Ахиезера ранга 2 [5]. Она строится по следующему набору спектральных данных

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, ..., \gamma_{2g}, \beta_1, ..., \beta_{2g}\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $q \in \Gamma$ — выделенная точка с локальным параметром k^{-1} в ее окрестности, $\gamma_1, ..., \gamma_{2g} \in \Gamma$ — набор точек и β_j — набор констант. *Функцией Бейкера–Ахиезера* ранга 2 $\psi(x, P) = (\psi_0, \psi_1), P \in \Gamma$, называется функция, которая обладает свойствами:

1. на $\Gamma \setminus \{q\}$ функция ψ имеет простые полюсы в γ_i и

$$\mathrm{res}_{\gamma_i} \psi_0(x, P) = \beta_i \, \mathrm{res}_{\gamma_i} \psi_1(x, P),$$

2. в окрестности q функция $\psi(x,P)$ имеет вид

$$\psi(x,P)=\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i(x)k_j^{-i}\Big)\Psi(x,k),$$

где $\Psi(x,P)$ — решение уравнения

$$\Psi_x=A\Psi,\qquad A=\left(\begin{array}{cc}0&1\\ k+\omega(x)&0\end{array}\right),$$

$\omega(x)$ — функциональный параметр.

Для спектральных данных общего положения функция Бейкера–Ахиезера существует и единственна. При этом, для любой мероморфной функции $f(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка n в q существует единственный оператор L_f порядка $2n$ такой, что

$$L_f\psi=f(P)\psi.$$

Для различных f и g операторы L_f и L_g коммутируют. В случае операторов ранга больше 1 совместную собственную функцию ψ нельзя найти явно. Тем не менее, Кричевером и Новиковым был предложен метод деформации параметров Тюрина [5], с помощью которого можно находить операторы ранга больше 1.

С помощью этого метода в [5] найдены операторы ранга два отвечающие эллиптическим спектральным кривым.

В [9] разработан метод, который позволяет построить примеры коммутирующих операторов L_4 и L_{4g+2}, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым

$$\Gamma:w^2=F_{2g+1}(z)=z^{2g+1}+c_{2g}z^{2g}+\dots+c_0.$$

Одномерные операторы Шрёдингера с потенциалами третьей и четвертой степени возникают во многих областях математической физики (см., например, [35]–[37]). В этой главе указана связь между собственными функциями таких операторов и функциями Бейкера–Ахиезера ранга два.

В [9] доказано, что

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 g(g+1)x$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\sharp$. Операторы $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ задают коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля. Оказывается, что собственные функции $L_4^\sharp$ при $g = 2, 4$ в некоторых точках спектральных кривых связаны между собой и с функциями из ядра оператора

$$L_2^\sharp = \partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Обозначим через $\varphi^\sharp$ решение уравнения $L_2^\sharp \varphi^\sharp = 0$.

Теорема 2.1 ([2*]). *1. Пусть $g = 2$, z — решение уравнения*

$$z^2 + 4\alpha_2 z + 12\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

Тогда

$$L_4^\sharp \psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\sharp, p(x) = 6\alpha_3 x + z + 4\alpha_2$.

2. Пусть $g = 4$, z — решение уравнения

$$z^3 + 20\alpha_2 z^2 + 16(4\alpha_2^2 + 13\alpha_1\alpha_3)z + 320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2) = 0.$$

Тогда

$$L_4^\sharp \psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\sharp$, $p(x) = 280\alpha_3^2 x^2 + 20\alpha_3(z+16\alpha_2)x + z^2 + 20\alpha_2 z + 64\alpha_2^2 + 168\alpha_1\alpha_3$.

Доказательство. Оператор $L_4^\sharp - z$ разлагается на множители следующим образом (см. [9])

$$L_4^\sharp - z = (\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_2)(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0). \tag{17}$$

где

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q}, \qquad \chi_2 = \frac{3Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - \frac{Q_x^2}{Q^2} + V,$$

$$Q = (z - \gamma_1(x))\dots(z-\gamma_g(x)),$$

$$W = \alpha_3 g(g+1)x, \qquad V = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} 4F_{2g+1}(z) =& 4(z-W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx} + \\ &+ 2Q\big(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим оператор

$$L_2 = \partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0.$$

Имеем

$$p^{-1}L_2 p = \partial_x^2 + \left(\frac{2p_x}{p} - \frac{Q_x}{Q}\right)\partial_x + \frac{2Qp_{xx} - 2Q_xp_x + (Q_{xx} + 2VQ - 2w)p}{2pQ}.$$

Тогда при $Q = p^2$

$$p^{-1}L_2 p = \partial_x^2 + V + \frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2}.$$

Таким образом, получаем что

$$p^{-1}L_2p = L_2^\sharp$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w+p_x^2}{p^2} = 0. \tag{19}$$

Поэтому p является либо квадратичной функцией от x, либо линейной функцией от x.

1. Положим $p = p_1(z)x + p_0(z)$. Тогда из (19)

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w+p_x^2}{p^2} = -\frac{w+p_1^2}{\big(p_1x+p_0\big)^2} = 0.$$

Поэтому $w = -p_1^2$. Следовательно, $w^2 = F_{2g+1}(z) = p_1^4$. Получаем из (18)

$$F_{2g+1} - p_1^4 = (p_1x+p_0)^3\big((z-W)(p_1x+p_0) + 2V_xp_1\big) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\alpha_3p_1(6-g^2-g)x^2 - (\alpha_3g(g+1)p_0 + (4\alpha_2+z)p_1)x + zp_0 + 2\alpha_1p_1 = 0.$$

Следовательно, $g = 2$, $p_0(z) = \frac{1}{6\alpha_3}(z+4\alpha_2)p_1(z)$ и z удовлетворяет уравнению

$$z^2 + 4\alpha_2z + 12\alpha_1\alpha_3 = 0. \tag{20}$$

Положим $p_1 = 6\alpha_3$.

Таким образом, мы показали, что, если $p(x) = 6\alpha_3x + z + 4\alpha_2$, где z удовлетворяет уравнению (20), то

$$\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0 = p(\partial_x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)p^{-1},$$

при этом функции χ_0 и χ_1 при $g=2$ для оператора $L_4^\sharp$ имеют вид

$$\chi_0 = \frac{w-9\alpha_3^2}{z^2+(3\alpha_3 x+5\alpha_2)z+9\alpha_3^2x^2+12\alpha_2\alpha_3x+9\alpha_1\alpha_3+4\alpha_2^2} -$$

$$(\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0),$$

$$\chi_0 = \frac{3\alpha_3(z+6\alpha_3x+4\alpha_2)}{z^2+(3\alpha_3 x+5\alpha_2)z+9\alpha_3^2x^2+12\alpha_2\alpha_3x+9\alpha_1\alpha_3+4\alpha_2^2}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\varphi^\sharp = 0,$$

то функция $\psi = p\varphi^\sharp$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0)\psi = 0,$$

а значит, из (17) получим

$$L_4^\sharp\psi = z\psi.$$

Первый пункт теоремы 2.1 доказан. Второй пункт этой теоремы доказывается аналогично.

2. Если $p = p_2(z)x^2+p_1(z)x+p_0(z)$. Тогда из (19)

$$\frac{2p_{xx}}{p}-\frac{w+p_x^2}{p^2} = -\frac{w+p_1^2-4p_0p_2}{\big(p_2x^2+p_1x+p_0\big)^2} = 0.$$

Поэтому $w = 4p_0p_2-p_1^2$. Следовательно, $w^2 = F_{2g+1}(z) = (4p_0p_2-p_1^2)^2$. Получаем из (18)

$$F_{2g+1}(z)-(4p_0p_2-p_1^2)^2 =$$

$$(p_2x^2+p_1x+p_0)^3\Big((p_2x^2+p_1x+p_0)(W-z)-2(2p_2x+p_1)V_x-8Vp_2\Big) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\alpha_3 p_2(20-g^2-g)x^3+\big(\alpha_3(6-g^2-g)p_1+(z+16\alpha_2)p_2\big)x^2+$$

$$\big(-\alpha_3 g(g+1)p_0+(z+4\alpha_2)p_1+12\alpha_1 p_2\big)x+zp_0+2\alpha_1 p_1+8\alpha_0 p_2=0.$$

Следовательно, $g=4$, $p_1(z)=\frac{1}{14\alpha_3}(z+16\alpha_2)p_2(z)$, $p_0(z)=\frac{1}{280\alpha_3^2}(z^2+20\alpha_2 z+168\alpha_1\alpha_3+64\alpha_2^2)p_2(z)$ и z удовлетворяет равенству

$$z^3+20\alpha_2 z^2+16(\alpha_1\alpha_3+4\alpha_2^2)z+320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2)=0. \qquad (21)$$

Положим $p_2=280\alpha_3^2$.

Таким образом, мы показали, что, если $p(x)=280\alpha_3^2x^2+20\alpha_3(z+16\alpha_2)x+z^2+20\alpha_2 z+64\alpha_2^2+168\alpha_1\alpha_3$, где z удовлетворяет уравнению (21), то

$$\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0=p(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)p^{-1}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\varphi^\sharp=0,$$

то функция $\psi=p\varphi^\sharp$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0)\psi=0,$$

а значит, из (17) получим

$$L_4^\sharp\psi=z\psi.$$

Второй пункт теоремы 2.1 доказан.

□

При $g = 2,4$ обозначим через $\tilde{L}_4^\sharp$, $\tilde{L}_{4g+2}^\sharp$ операторы, которые получаются из $L_4^\sharp$, $L_{4g+2}^\sharp$ сопряжением, т.е.

$$\tilde{L}_4^\sharp = p^{-1} L_4^\sharp p, \qquad \tilde{L}_{4g+2}^\sharp = p^{-1} L_{4g+2}^\sharp p$$

(функция $p(x)$ указана в теореме 2.1).

Следствие. *При $g = 2,4$ операторы $\tilde{L}_4^\sharp$, $\tilde{L}_{4g+2}^\sharp$, $L_2^\sharp$ образуют коммутативное кольцо по модулю $L_2^\sharp$, т.е.*

$$[\tilde{L}_4^\sharp, L_2^\sharp] = B_1 L_2^\sharp, \qquad [\tilde{L}_{4g+2}^\sharp, L_2^\sharp] = B_2 L_2^\sharp,$$

где B_1, B_2 — некоторые операторы.

Непосредственной проверкой мы установили, что при $g = 1,2$, если выполняется условие

$$\alpha_3^3 - 4\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_4^2 = 0, \;\; \alpha_4 \neq 0, \tag{22}$$

то оператор

$$L_4^\flat = (\partial_x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + 2g(g+1)x(\alpha_3 + 2\alpha_4 x)$$

коммутирует с оператором порядка $4g+2$. По-видимому, это верно для любых g. При $\alpha_3 = \alpha_1 = 0$ это доказано в [16]. Обозначим через $\varphi^\flat$ решение уравнения

$$(\partial_x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\varphi^\flat = L_2^\flat \psi^\flat = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ удовлетворяют уравнению (22).

Теорема 2.2 ([2*]). *1. Пусть* $g=1$, $z=\frac{\alpha_3^2}{\alpha_4}-4\alpha_2$. *Тогда*
$L_4^\flat\psi=z\psi$, *где* $\psi=p\varphi^\flat, p(x)=4\alpha_4x+\alpha_3$.

2. Пусть $g=2$, z *— решение уравнения*

$$z^2-\left(\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_4}-16\alpha_2\right)z+24\alpha_1\alpha_3+192\alpha_0\alpha_4=0.$$

Тогда

$$L_4^\flat\psi=z\psi,$$

где $\psi=p\varphi^\flat$, $p(x)=24\alpha_4^2x^2+12\alpha_3\alpha_4x-3\alpha_3^2+\alpha_4(z+16\alpha_2)$.

Доказательство. Оператор $L_4^\flat-z$ разлагается на множители следующим образом (см. [9])

$$L_4^\flat-z=(\partial_x^2+\chi_1\partial_x+\chi_2)(\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0). \tag{23}$$

где

$$\chi_0=-\frac{Q_{xx}}{2Q}+\frac{w}{Q}-V,\qquad \chi_1=\frac{Q_x}{Q},\qquad \chi_2=\frac{3Q_{xx}}{2Q}+\frac{w}{Q}-\frac{Q_x^2}{Q^2}+V,$$
$$Q=(z-\gamma_1(x))\dots(z-\gamma_g(x)),$$

$$W=2g(g+1)(2\alpha_4x+\alpha_3)x,\qquad V=\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0.$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}4F_{2g+1}(z)=&4(z-W)Q^2-4V(Q_x)^2+(Q_{xx})^2-2Q_xQ_{xxx}+\\&+2Q\big(2V_xQ_x+4VQ_{xx}+Q_{xxxx}\big).\end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим оператор

$$L_2=\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0.$$

Имеем

$$p^{-1}L_2p = \partial_x^2 + \left(\frac{2p_x}{p} - \frac{Q_x}{Q}\right)\partial_x + \frac{2Qp_{xx} - 2Q_xp_x + (Q_{xx} + 2VQ - 2w)p}{2pQ}.$$

Тогда при $Q = p^2$

$$p^{-1}L_2p = \partial_x^2 + V + \frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2}.$$

Таким образом, получаем что

$$p^{-1}L_2p = L_2^\flat$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2} = 0. \tag{25}$$

Поэтому p является либо квадратичной функцией от x, либо линейной функцией от x.

1. Положим $p = p_1(z)x + p_0(z)$. Тогда из (25)

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2} = -\frac{w + p_1^2}{\left(p_1x + p_0\right)^2} = 0.$$

Поэтому $w = -p_1^2$. Следовательно, $w^2 = F_{2g+1}(z) = p_1^4$. Получаем из (24)

$$F_{2g+1} - p_1^4 = (p_1x + p_0)^3\big((z - W)(p_1x + p_0) + 2V_xp_1\big) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$4\alpha_4p_1(2 - g^2 - g)x^3 - 2\big(2\alpha_4g(g+1)p_0 + \alpha_3p_1(-3 + g + g^2)\big)x^2 -$$

$$(2\alpha_3g(g+1)p_0 + (z + 4\alpha_2)p_1)x + zp_0 + 2\alpha_1p_1 = 0.$$

Следовательно, $g=1$, $p_0(z)=\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}p_1(z)$ и $z=\frac{\alpha_3^2}{2\alpha_4}-2\alpha_2$. Положим $p_1=4\alpha_4$.

Таким образом, мы показали, что, если $p(x)=4\alpha_4 x+\alpha_3$, то

$$\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0=p(\partial_x^2+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)p^{-1},$$

при этом функции χ_0 и χ_1 при $g=2$ для оператора $L_4^\flat$ имеют вид

$$\chi_0=\frac{4\alpha_4(w-4\alpha_4)}{4\alpha_4z+16\alpha_4^2x^2+8\alpha_3\alpha_4x+16\alpha_2\alpha_4-3\alpha_3^2}-$$

$$(\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0),$$

$$\chi_0=\frac{8\alpha_4(4\alpha_4x+\alpha_3)}{4\alpha_4z+16\alpha_4^2x^2+8\alpha_3\alpha_4x+16\alpha_2\alpha_4-3\alpha_3^2}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2+\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\varphi^\flat=0,$$

то функция $\psi=p\varphi^\flat$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2-\chi_1\partial_x-\chi_0)\psi=0,$$

а значит, из (23) получим

$$L_4^\flat\psi=\left(\frac{\alpha_3^2}{2\alpha_4}-2\alpha_2\right)\psi.$$

Первый пункт теоремы 2.2 доказан. Второй пункт этой теоремы доказывается аналогично.

2. Если $p=p_2(z)x^2+p_1(z)x+p_0(z)$. Тогда из (25)

$$\frac{2p_{xx}}{p}-\frac{w+p_x^2}{p^2}=-\frac{w+p_1^2-4p_0p_2}{\left(p_2x^2+p_1x+p_0\right)^2}=0.$$

Поэтому $w = 4p_0p_2 - p_1^2$. Следовательно, $w^2 = F_{2g+1}(z) = (4p_0p_2 - p_1^2)^2$. Получаем из (24)

$$F_{2g+1}(z) - (4p_0p_2 - p_1^2)^2 =$$

$$(p_2x^2+p_1x+p_0)^3\Big((p_2x^2+p_1x+p_0)(W-z)-2(2p_2x+p_1)V_x-8Vp_2\Big) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$4\alpha_4p_2(6-g^2-g)x^4 + 2\big(2\alpha_4(2-g^2-g)p_1 + \alpha_3(10-g^2-g)p_2\big)x^3-$$

$$\big(4\alpha_4g(g+1)p_0 + 2\alpha_3(3-g^2-g)p_1 + (z+16\alpha_2)p_2\big)x^2-$$

$$-\big(2\alpha_3g(g+1)p_0 + (z+4\alpha_2) + 12\alpha_1p_2\big)x + zp_0 + 2\alpha_1p_1 + 8\alpha_0p_2.$$

Следовательно, $g = 2$, $p_1(z) = \frac{\alpha_3}{2\alpha_4}p_2(z)$, $p_0(z) = \frac{1}{24\alpha_4^2}(\alpha_4z - 3\alpha_3^2 + 16\alpha_2\alpha_4)p_2(z)$ и z удовлетворяет тождеству

$$z^2 - \left(\frac{3\alpha_3^2}{\alpha_4} - 16\alpha_2\right)z + 24\alpha_1\alpha_3 + 192\alpha_0\alpha_4 = 0. \qquad (26)$$

Положим $p_2 = 24\alpha_4^2$.

Таким образом, мы показали, что, если $p(x) = 24\alpha_4^2x^2 + 12\alpha_3\alpha_4x - 3\alpha_3^2 + \alpha_4(z+16\alpha_2)$, где, z удовлетворяет уравнению (26), то

$$\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0 = p(\partial_x^2 + \alpha_4x^4 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)p^{-1}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2 + \alpha_4x^4 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)\varphi^\flat = 0,$$

то функция $\psi = p\varphi^\flat$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0)\psi = 0,$$

а значит, из (23) получим

$$L_4^\flat \psi = z\psi.$$

Второй пункт теоремы 2.2 доказан.

$\square$

Оператор $L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)e^x$ коммутирует с оператором порядка $4g+2$ [15]. Обозначим через $\varphi^\natural$ решение уравнения

$$\left(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0 + \frac{1}{4}(g+\varepsilon)^2\right)\varphi^\natural = L_2^\natural \psi^\natural = 0.$$

Теорема 2.3 ([2*])**.** *1. Пусть $\varepsilon = 0$, тогда*

$$L_4^\natural \psi = -\frac{1}{4} g^2 (4\alpha_0 + g^2)\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\natural$, $p(x) = e^{gx/2}$.

2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$L_4^\natural \psi = -\frac{1}{4}(g+1)^2(4\alpha_0 + (g+1)^2)\psi,$$

где $\psi = p\varphi^\natural$, $p(x) = e^{-(g+1)x/2}$.

Доказательство. Оператор $L_4^\natural - z$ разлагается на множители следующим образом (см. [9])

$$L_4^\natural - z = (\partial_x^2 + \chi_1 \partial_x + \chi_2)(\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0). \tag{27}$$

где

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q}, \qquad \chi_2 = \frac{3Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - \frac{Q_x^2}{Q^2} + V,$$

$$Q = (z - \gamma_1(x)) \dots (z - \gamma_g(x)),$$

$$W = \alpha_1 g(g+1)e^x, \qquad V = \alpha_1 e^x + \alpha_0.$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} 4F_{2g+1}(z) = & 4(z-W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx} + \\ & + 2Q\big(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q_{xxxx}\big). \end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим оператор

$$L_2 = \partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0.$$

Имеем

$$p^{-1}L_2p = \partial_x^2 + \left(\frac{2p_x}{p} - \frac{Q_x}{Q}\right)\partial_x + \frac{2Qp_{xx} - 2Q_xp_x + (Q_{xx} + 2VQ - 2w)p}{2pQ}.$$

Тогда при $Q = p^2$

$$p^{-1}L_2p = \partial_x^2 + V + \frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2}.$$

Таким образом, получаем что

$$p^{-1}L_2p = \partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0 + c^2$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2} = c^2. \tag{29}$$

Поэтому $p = p_2(z)e^{cx+b(z)} + p_1(z) + p_0(z)e^{-cx-b(z)}$. Тогда из (29)

$$\frac{2p_{xx}}{p} - \frac{w + p_x^2}{p^2} - c^2 = -\frac{w + c^2(p_1^2 - 4p_0p_2)}{p^2}.$$

Следовательно, $w = c^2(4p_0p_2 - p_1^2)$. Тогда $w^2 = F_{2g+1}(z) = c^4(4p_0p_2 - p_1^2)^2$. Получаем из (28)

$$F_{2g+1}(z) - c^4(4p_0p_2 - p_1^2)^2 = \\ p^3\big((z - W + 4c^4)p + 2(V' + 2cV)p_x + 8c^2p_0Ve^{-cx} - 5c^4p_1\big) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\alpha_1p_2\big(2c + 4c^2 - g(1+g)\big)(e^x)^{2c+1} + p_2(z + 4c^4 + 4\alpha_0c^2)(e^x)^{2c} - \\ \alpha_1g(g+1)p_1(e^x)^{c+1} + (z - c^4)p_1(e^x)^c + \\ \Big(\big(4\alpha_1c^2 - 2\alpha_1c - \alpha 1g(g+1)\big)e^x + z + 4c^4 + 4\alpha_0c^2\Big)p_0 = 0.$$

Заметим, что левая часть последнего равенства является полиномом от e^x степени $2c+1$. Следовательно, $p_0 = 0$, $p_1 = 0$, $z = -4c^2(c^2+\alpha_0)$, а c равно либо $\frac{1}{2}g$, либо $-\frac{1}{2}(g+1)$. Положим $p_2 = 1$.

1. Пусть $c = \frac{1}{2}g$. Таким образом, мы показали, что, если $p(x) = e^{gx/2}$, то

$$\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0 = p(\partial_x^2 + \alpha_1e^x + \alpha_0)p^{-1}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2 + \alpha_1e^x + \alpha_0)\varphi^\natural = 0,$$

то функция $\psi = p\varphi^\natural$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0)\psi = 0,$$

а значит, из (27) получим

$$L_4^\natural\psi = z\psi = -4c^2(c^2 + \alpha_0)\psi = -\frac{1}{4}g^2(4\alpha_0 + g^2)\psi.$$

Первый пункт теоремы 2.3 доказан. Второй пункт этой теоремы доказывается аналогично.

2. Пусть $c = -\frac{1}{2}(g+1)$. Таким образом, мы показали, что, если $p(x) = e^{-(g+1)x/2}$, то

$$\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0 = p(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)p^{-1}.$$

Следовательно, если

$$(\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)\varphi^\natural = 0,$$

то функция $\psi = p\varphi^\natural$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0)\psi = 0,$$

а значит, из (27) получим

$$L_4^\natural\psi = z\psi = -4c^2(c^2+\alpha_0)\psi = -\frac{1}{4}(g+1)^2\big(4\alpha_0 + (g+1)^2\big)\psi.$$

Второй пункт теоремы 2.3 доказан.

$\square$

Заметим, что решения уравнения $(\partial_x^2+\alpha_1 e^x+\alpha_0)\varphi = 0$ выражаются через функцию Бесселя, а именно, замена переменной $x = \ln\left(\frac{y^2}{4\alpha_1}\right)$ сводит это уравнение к $(y^2\partial_y^2 + y\partial_y + (y^2+4\alpha_0))\varphi = 0$.

3 Двумерные конечнозонные операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами

В данной главе мы строим примеры конечнозонных на одном уровне энергии двумерных операторов Шрёдингера, коэффициенты которых выражены через $\wp$-функцию Вейерштрасса, при этом спектральные кривые операторов имеют род больше 1.

Конечнозонные на одном уровне энергии двумерные операторы Шрёдингера введены Дубровиным, Кричевером и Новиковым [17]. Такие операторы восстанавливаются по спектральным данным $\{\Gamma, q_1, q_2, \gamma\}$, где Γ — риманова поверхность, q_1, q_2 — выделенные точки на Γ, γ — неспециальный дивизор степени g, g — род Γ. Существует единственная функция $\psi(z, \bar{z}, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами:

1. в окрестностях q_1 q_2
$$\begin{aligned} \psi &= e^{k_1 z}\left(1 + \frac{\xi_1(z,\bar{z})}{k_1} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right)\right), \\ \psi &= e^{k_2 \bar{z}}\left(\zeta_0(z,\bar{z}) + \frac{\zeta_1(z,\bar{z})}{k_2} + O\left(\frac{1}{k_2^2}\right)\right), \end{aligned}$$
где k_1^{-1} и k_2^{-1} — локальные координаты в окрестностях q_1 и q_2,

2. на $\Gamma \setminus \{q_1, q_2\}$ функция ψ имеет дивизор полюсов γ.

Функция ψ называется *двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера* (блоховская функция). Функция ψ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$L\psi = \Big(\partial_{z\bar{z}} + \nu(z,\bar{z})\partial_{\bar{z}} + u(z,\bar{z})\Big)\psi = E\psi,$$

где $\nu(z,\bar{z}) = -\partial_z(\ln\zeta_0), u = -\partial_{\bar{z}}(\xi_1)$. Функция Бейкера-Ахиезера имеет вид

$$\psi(z,\bar{z},P) = \exp\left(z\int_Q^P \Omega_1 + \bar{z}\int_Q^P \Omega_2\right)\frac{\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + f(P) + W)\theta(W)}{\theta(f(P)+W)\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + W)},$$

где θ — тэта-функция многообразия Якоби спектральной кривой Γ, Ω_i — нормированный мероморфный дифференциал с полюсом второго порядка в q_i, $f(P)$ — отображение Абеля, U_i, V_i, W — некоторые векторы, определяемые спектральными данными, Q — фиксированная точка на Γ (см. в [17]). При этом

$$\begin{aligned} \nu(z,\bar{z}) &= -\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + V_1 + W)}{\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + V_2 + W)}, \\ u(z,\bar{z}) &= \frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\ln\theta(U_1 z + U_2\bar{z} + W). \end{aligned} \tag{30}$$

Пусть f_1, f_2 — мероморфные функции на Γ с полюсом в q_1, а g_1, g_2 — мероморфные функции с полюсом в q_2. Тогда существуют единственные дифференциальные операторы $L(f_i)$ и $\widetilde{L}(g_i)$ такие, что

$$\begin{aligned} L(f_i)\psi = f_i\psi, &\qquad \widetilde{L}(g_i)\psi = g_i\psi \\ [L(f_1), L(f_2)] = 0, &\qquad [\widetilde{L}(g_1), \widetilde{L}(g_2)] = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Оператор Шрёдингера L удовлетворяет тождеству

$$[L, L(f_i)] = B_i L, \qquad [L, \widetilde{L}(g_i)] = \widetilde{B}_i L, \tag{32}$$

где B_i и $\widetilde{B}_i$ — некоторые операторы.

Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера изучались во многих работах (см. например [38]-[43]). Основные результаты этой главы — следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Оператор Шрёдингера*

$$L=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}+a\left(\frac{\sqrt{g_0}-\wp'(az+b\bar z)}{2\wp(az+b\bar z)}\right)\frac{\partial}{\partial\bar z}-\frac{bg(g+1)\wp(az+b\bar z)}{2a} \tag{33}$$

является конечнозонным, где $\wp$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению*

$$(\wp'(z))^2=-\frac{2g(g+1)}{a^2}\wp(z)^3+g_2\wp(z)^2+g_1\wp(z)+g_0.$$

Спектральная кривая оператора L *— гиперэллиптическая кривая рода* g.

Доказательство. Конечнозонные на одном уровне энергии операторы Шрёдингера

$$L=\partial_{z\bar z}+\nu(z,\bar z)\partial_{\bar z}+u(z,\bar z)$$

можно находить с помощью тождества (32). Рассмотрим равенство

$$\left[L,\frac{\partial^2}{\partial z^2}+g(g+1)\wp(az+b\bar z)\right]=BL, \tag{34}$$

где

$$(\wp'(z))^2=g_3\wp(z)^3+g_2\wp(z)^2+g_1\wp(z)+g_0.$$

Тождество (34) выполняется тогда и только тогда, когда

$$u = c_1(\bar{z}) + \frac{b}{2a}g(g+1)\wp(az+b\bar{z}),$$

$$\nu = \frac{c_2(\bar{z}) - aU_z}{2aU}, \qquad g_3 = -\frac{2}{a^2}g(g+1),$$

$$c_2 = \frac{a}{2\sqrt{b}}\sqrt{16ac_1^3 + 4a^2bg_2c_1^2 - 2ab^2g(g+1)c_1 + b^3g_0g^2(g+1)^2}.$$

Известно, что оператор Ламе

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + g(g+1)\wp(az+b\bar{z})$$

коммутирует с дифференциальным оператором порядка $2g+1$. Их спектральной кривой Γ является гиперэллиптическая кривая рода g. Очевидно, что блоховские собственные функции оператора L параметризуются кривой Γ. Положим $c_1 = 0$. $\square$

Таким образом, для оператора H тэта-функциональные формулы (30) редуцируются к более простым формулам (33). Отметим, что L удовлетворяет тождеству

$$\left[L, \frac{\partial^2}{\partial z^2} + g(g+1)\wp(az+b\bar{z})\right] = -2a\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{g_0} - \wp'(az+b\bar{z})}{2\wp(az+b\bar{z})}\right)\right)L.$$

Несложно найти другие операторы $L(f_i)$, $\widetilde{L}(g_i)$ для L из (31), (32).

Напомним, что в общем случае потенциал конечнозонного одномерного оператора Шрёдингера $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x)$ выражается через тэта-функцию спектральной кривой (см. [44])

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln\theta(xU_1 + U_2) + const, \qquad U_1, U_2 \in \mathbb{C}^g.$$

В то же время существуют конечнозонные операторы с потенциалами, выраженными через $\wp$-функцию Вейерштрасса, например, оператор Ламе

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g(g+1)\wp(x)$$

или оператор Трейбича–Вердне

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{3} a_i(a_i+1)\wp(x+\omega_i),$$

где ω_i — полупериоды. Теорема 3.1 показывает, что аналогичный феномен возможен и в двумерном случае. Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3.2. *Оператор Шрёдингера*

$$H = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{7a\wp'(az+b\bar{z})}{20g_2a^2 - 14\wp(az+b\bar{z})}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{b\wp(az+b\bar{z})}{2a}$$

является конечнозонным, где $\wp$ удовлетворяет уравнению

$$(\wp'(z))^2 = -\frac{1}{2a^2}\wp(z)^3 + g_2\wp(z)^2 - \left(\frac{7g_0}{10g_2a^2} + \frac{20g_2^2a^2}{49}\right)\wp(z) + g_0.$$

Доказательство. Конечнозонные на одном уровне энергии операторы Шрёдингера

$$L = \partial_{z\bar{z}} + \nu(z,\bar{z})\partial_{\bar{z}} + u(z,\bar{z})$$

можно находить с помощью тождества (32). Рассмотрим равенство

$$\left[L, (\partial_z^2 + V)^2 + W\right] = BL, \tag{35}$$

где B — некоторый дифференциальный оператор. Тождество (35) выполняется тогда и только тогда, когда

$$V_{\bar{z}} = U_z, \qquad W_{\bar{z}} = 2U(V_z + 2\nu\nu_z - \nu_{zz}),$$

где

$$\begin{aligned}\nu &= -\frac{U_z}{2U},\\ W &= \nu_{zzz} - 4\nu\nu_{zz} - 3\nu_z^2 + 6\nu^2\nu_z + 2V(\nu_z - \nu^2)\\ &\quad +2V_z\nu - \nu^4 - V_{zz} - V^2 + c_1(\bar{z}).\end{aligned}$$

Положим $V = \wp(az + b\bar{z})$, где

$$(\wp'(z))^2 = g_3\wp(z)^3 + g_2\wp(z)^2 + g_1\wp(z) + g_0.$$

Тогда получаем

$$U = -\frac{5}{7}abg_2 + \frac{b}{2a}\wp(az + b\bar{z}), \quad g_3 = -\frac{1}{2a},$$
$$g_1 = -\left(\frac{7g_0}{10g_2a^2} + \frac{20g_2^2a^2}{49}\right), \quad c_1 = const.$$

В итоге, самосопряженный оператор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \wp(az + b\bar{z})\right)^2 - \frac{15}{14}g_2a^2\wp(az + b\bar{z}) + \frac{3}{8}\wp(az + b\bar{z})^2 + c_1.$$

коммутирует с дифференциальными операторами порядка 5 и 6. Спектральная кривая Γ данных операторов имеет род 3. Очевидно, что блоховские собственные функции оператора L параметризуются кривой Γ. $\square$

Оператор L из теоремы 3.2 коммутирует с самосопряженным оператором L_4 по модулю L

$$[L, L_4] = BL,$$

где

$$L_4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \wp(az + b\bar{z})\right)^2 - \frac{15}{14}g_2a^2\wp(az + b\bar{z}) + \frac{3}{8}\wp(az + b\bar{z})^2.$$

4 Двумерный оператор Шрёдингера, связанный с семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$

В данной главе изучается двумерный оператор Шрёдингера, связанный с семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$, построенных в [18].

В [18] были построены первые примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}P^n$ (отличных от минимальных). Эти подмногообразия строятся с помощью некоторой надстройки над пересечением квадрик в $\mathbb{R}^n$. Топология этих подмногообразий изучалась в [45]. В двумерном случае эта конструкция дает H-минимальные лагранжевы торы (вложенные или погруженные) и бутылки Клейна (только погруженные) в $\mathbb{C}P^2$ (см. ниже). С другой стороны в [19] было показано, что с каждой лагранжевой поверхностью связан естественным образом двумерный оператор Шрёдингера. Цель этой работы — изучить оператор Шрёдингера, связанный с гамильтоново минимальными лагранжевыми поверхностями, построенных в [18].

Будем задавать конформное лагранжево погружение области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}P^2$ через композицию $r : \Omega \to S^5 \subset \mathbb{C}^3$, где $|r| = 1$, и проекцию расслоения Хопфа $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$, где $r = (r_1, r_2, r_3)$, r_i —

комплекснозначная функция. Имеет место лемма (см. [19]).

Лемма. *Компоненты r_j вектор-функции r удовлетворяют уравнению Шрёдингера*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0, \tag{36}$$

где $2e^v(dx^2+dy^2)$ — индуцированная метрика на поверхности, а $\beta(x,y)$ — лагранжев угол, определяемый равенством

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 — координаты в $\mathbb{C}^3, x, y$ — координаты на Ω, σ — репер образованный векторами r, $\frac{r_x}{|r_x|}, \frac{r_y}{|r_y|}$.

Напомним конструкцию построения H-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ из [18]. Возьмем двумерный конус $K \subset \mathbb{R}^3$, заданный уравнением

$$mu_1^2 + nu_2^2 + ku_3^2 = 0, \quad m,n,k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим пересечение $\tilde{K}$ конуса K с единичной сферой $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Через T^1 обозначим окружность в $\mathbb{C}^3$

$$T^1 = \{(e^{\pi imy}, e^{\pi iny}, e^{\pi iky}),\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Нам понадобится решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}$, которая порождена числами m, n, k, т.е.

$$\Lambda = \{mp_1 + np_2 + kp_3,\ p_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R} | \lambda\lambda^* \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}$ — двойственная решетка к Λ. Обозначим через G следующую фактор-группу $G = \Lambda^*/2\Lambda^* \simeq \mathbb{Z}_2$. Группа G свободно действует на $\tilde{K} \times T^1$, а именно, если $\gamma \in G$, то

$$\gamma(u_1,\ u_2,\ u_3,\ y) = (u_1 \cos(\pi m\gamma),\ u_2 \cos(\pi n\gamma),\ u_3 \cos(\pi k\gamma),\ y + \gamma),$$

Отметим, что $\cos(\pi m\gamma)$, $\cos(\pi n\gamma)$, $\cos(\pi k\gamma)$ равны ± 1. Фактор-многообразие $\tilde{K} \times T^1/G$ диффеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна.

В [18] показано, что образ многообразия $\tilde{K} \times T^1/G$ при композиции отображений $\mathcal{H} \circ \omega$, где

$$\omega : \tilde{K} \times S^1/G \to S^5, \quad \omega(u,\ y) = (u_1 e^{\pi imy}, u_2 e^{\pi iny}, u_3 e^{\pi iky}),$$

является H-минимальной лагранжевой бутылкой Клейна, либо тором.

Пусть $\Sigma = \mathcal{H} \circ \omega(\tilde{K} \times T^1/G)$. Основной результат этой работы заключается в следующем. Предположим без ограничения общности, что $m < n < 0 < k$. Имеет место теорема.

Теорема 4.1 ([9*]). *Поверхность Σ является образом композиции отображений $\mathcal{H} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, где $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$,*

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \sqrt{\frac{k}{k-m}}\mathrm{cn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi my}, \\
\psi_2(x,y) &= \sqrt{\frac{k}{k-n}}\mathrm{sn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi ny}, \\
\psi_3(x,y) &= \sqrt{\frac{k(n-m)\mathrm{cn}^2(\nu x, \kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}} e^{i\pi ky},
\end{aligned}$$

$\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi,\ \kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}},\ \ \mathrm{sn}(\nu x,\kappa), \mathrm{cn}(\nu x,\kappa)$ — *эллиптические функции Якоби. Индуцированная метрика на Σ имеет вид $ds^2 = 2e^v(dx^2+dy^2)$, где*

$$2e^v = k\pi^2\Big((m-n)\ \mathrm{sn}(\nu x,\kappa)^2 - m\Big).$$

Функции ψ_i удовлетворяют уравнению Шрёдингера $L\psi_i = 0$, где

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y + 2k\pi^2\big((m-n)\ \mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m\big). \quad (37)$$

Оператор Шрёдингера (37) является суммой оператора с постоянными коэффициентами

$$\partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y$$

и конечнозонного оператора Ламе

$$L_2 = \partial_x^2 + 2k\pi^2\big((m-n)\ \mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m\big).$$

Потенциал $u(x) = 2k\pi^2\big((m-n)\ \mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m\big)$ оператора Ламе является периодическим $u(x+\tau) = u(x)$, где $\tau = 2K$,

$$K = \frac{1}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-\kappa^2\sin(t)^2}.$$

Оператор L_2 коммутирует с оператором третьего порядка

$$\begin{aligned} L_3 = &\partial_x^3 - \Big(3k(m-n)\ \mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) + (mn+nk-2km)\Big)\pi^2\partial_x \\ &- 3k(m-n)\nu \mathrm{sn}(\nu x,\kappa)\mathrm{cn}(\nu x,\kappa)\mathrm{dn}(\nu x,\kappa), \end{aligned}$$

$\mathrm{dn}(\nu x,\kappa)$ — эллиптическая функция Якоби. Коммутирование операторов проверяется явным вычислением. Спектральная кривая Γ

операторов L_2, L_3 задается уравнением $Q(z,w)=0$, где

$$\begin{aligned}Q(z,w)=&w^2-z^3-2(mn+nk+km)\pi^2z^2\\&-(m^2n^2+n^2k^2+k^2m^2+3mnk(m+n+k))\pi^4z\\&-mnk(m+n)(n+k)(k+m)\pi^6.\end{aligned}$$

Операторы L_2, L_3 удовлетворяют уравнению $Q(L_2,L_3)=0$. Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа операторов L_2 и L_3 (см., например, [3]), а именно, если

$$L_2f(x)=zf(x),\quad L_3f(x)=wf(x),$$

то $(z,w)\in\Gamma$.

Напомним, что собственная функция $g(x,y)$ периодического оператора называется блоховской, если

$$g(x+\tau)=\mu_1g(x,y),\quad g(x,y+\tau')=\mu_2g(x,y),$$

где $|\mu_1|=|\mu_2|=1$, τ,τ' — периоды. Спектральная кривая Γ параметризует блоховские функции оператора L на нулевом уровне энергии, а именно, если $f(x)$ — блоховская функция оператора L_2,

$$L_2f(x)=zf(x),$$

то функция $g(x,y)=f(x)e^{i\alpha y}$, где α — корень уравнения

$$\alpha^2+(m+n+k)\pi\alpha-z=0,$$

является блоховской для оператора Шрёдингера

$$Lg(x,y)=0.$$

Конечнозонные на одном уровне энергии операторы Шрёдингера изучались в [17]. Отметим, что другие примеры H-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ построены в [46] и [47] (см. также [48]). Отметим также, что если $m + n + k = 0$, то поверхность является минимальной. Оказывается, что в этом случае метрика на Σ является экстремальной для первого собственного значения оператора Лапласа–Бельтрами (см. [50], [51]).

Доказательство Теоремы 4.1

Напомним, что любую лагранжеву поверхность можно строить (локально) с помощью композиции горизонтального отображения (см. [18])

$$r : \Omega \to S^5$$

и проекции Хопфа $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, причем r удовлетворяет уравнениям

$$\langle r, r_x \rangle = \langle r, r_y \rangle = \langle r_x, r_y \rangle = 0, \quad |r_x|^2 = |r_y|^2 = 2e^v, \tag{38}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — эрмитово произведение. Индуцированная метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = 2e^v(dx^2 + dy^2)$, т.е. (x, y) — изотермические координаты. Из (38) следует, что следующая матрица является унитарной

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2}} r_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2}} r_y \end{pmatrix} \in U(3).$$

Следовательно, $\det\tilde{R} = e^{i\beta(x,y)}$, где $\beta(x,y)$ — лагранжев угол поверхности. Если β — гармоническая функция на поверхности, то поверхность H-минимальна, а если β постоянна, то поверхность минимальна (см. [49]). Через лагранжев угол можно выразить вектор средней кривизны поверхности $H = J\nabla\beta$, где J — комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$. Таким образом

$$R = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} r_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} r_y \end{pmatrix} \in SU(3).$$

Матрица R удовлетворяет уравнениям

$$R_x = AR, \quad R_y = BR, \tag{39}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} e^{\frac{v}{2} + i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2} e^{\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} & if & i\big(h + \frac{1}{2}\beta_y\big) - \frac{1}{2} v_y \\ 0 & i\big(h + \frac{1}{2}\beta_y\big) + \frac{1}{2} v_y & if \end{pmatrix} \in su(3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} e^{\frac{v}{2} + i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & ih & i\big(\frac{1}{2}\beta_x - f\big) + \frac{1}{2} v_x \\ -\sqrt{2} e^{\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} & i\big(\frac{1}{2}\beta_x - f\big) - \frac{1}{2} v_x & ih \end{pmatrix} \in su(3),$$

$f(x,y)$, $h(x,y)$ — некоторые вещественные функции. Из (39) вытекает, что r удовлетворяет уравнению Шрёдингера (36).

Найдем вектор-функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, которая удовлетворяет уравнениям (38) в случае поверхности Σ. Это позволит найти искомый оператор Шрёдингера. Будем искать $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ в виде

$$\psi_1(x,y) = \varphi_1(x)e^{i\pi my}, \quad \psi_2(x,y) = \varphi_2(x)e^{i\pi ny}, \quad \psi_3(x,y) = \varphi_3(x)e^{i\pi ky},$$

где $\varphi_j(x)$ — вещественные функции. Потребуем, чтобы $\varphi_j(x)$ удовлетворяли уравнениям

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1, \quad m\varphi_1^2 + n\varphi_2^2 + k\varphi_3^2 = 0. \tag{40}$$

Тогда $\langle \psi, \psi_x \rangle = \langle \psi, \psi_y \rangle = \langle \psi_x, \psi_y \rangle = 0$.

Из условия конформности метрики $|\psi_x|^2 = |\psi_y|^2 = 2e^v$ получаем

$$(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + (\varphi_3')^2 = 2e^v, \tag{41}$$

$$\pi^2(m^2\varphi_1^2 + n^2\varphi_2^2 + k^2\varphi_3^2) = 2e^v. \tag{42}$$

Из (40) и (42) вытекает

$$\varphi_1^2 = \frac{2e^v + kn\pi^2}{(k-m)(n-m)\pi^2}, \quad \varphi_2^2 = \frac{2e^v + km\pi^2}{(k-n)(m-n)\pi^2},$$
$$\varphi_3^2 = \frac{2e^v + mn\pi^2}{(m-k)(n-k)\pi^2}.$$

Из последних равенств следует

$$\varphi_1'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(k-m)(n-m)(2e^v + kn\pi^2)\pi^2},$$
$$\varphi_2'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(k-n)(m-n)(2e^v + km\pi^2)\pi^2},$$
$$\varphi_3'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(m-k)(n-k)(2e^v + mn\pi^2)\pi^2}.$$

Подставим формулы для $(\varphi_j')^2$ в (41). Получим уравнение на v

$$(2e^v + km\pi^2)(2e^v + kn\pi^2)(2e^v + mn\pi^2) + e^{2v}v'^2 = 0. \qquad (43)$$

Напомним, что эллиптическая функция Якоби $\mathrm{sn}(x,\kappa)$ определяется следующим образом (см. [52])

$$\mathrm{sn}(x,\kappa) = \sin\phi(x,\kappa),$$

где $\phi(x,\kappa)$ — обратная функция к

$$x(\phi) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-\kappa^2\sin(t)^2}}, \quad 0<\kappa<1.$$

Из тождества

$$\mathrm{sn}'(x,\kappa)^2 = (1-\mathrm{sn}(x,\kappa)^2)(1-\kappa^2\mathrm{sn}(x,\kappa)^2),$$

вытекает, что уравнение (43) имеет решение вида

$$2e^v = k\pi^2\Big((m-n)\,\mathrm{sn}^2\Big(\sqrt{m(n-k)}\pi x, \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}\Big) - m\Big).$$

Тогда

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{k-m}}\mathrm{cn}(\nu x,\kappa), \qquad \varphi_2 = \sqrt{\frac{k}{k-n}}\mathrm{sn}(\nu \mathrm{x},\kappa),$$
$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{k(n-m)\mathrm{cn}^2(\nu x,\kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}},$$

где $\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi$, $\kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}$, $\mathrm{cn}(x,\kappa) = \cos\phi(x,\kappa)$. Функции φ_j удовлетворяют (40), (41) и (42), а ψ_j удовлетворяют уравнениям (38). Прямыми вычислениями получаем, что для

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}}\psi_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}}\psi_y \end{pmatrix} \in U(3),$$

$\det\tilde{R} = e^{i\beta(x,y)}$, где

$$\beta(x,y) = (m+n+k)\pi y + \frac{\pi}{2}.$$

Матрицы A и B из (39) принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & 0 & \frac{1}{2}ie^{-v}mnk\pi^3 \\ 0 & \frac{1}{2}ie^{-v}mnk\pi^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2}ie^{-v}(mnk\pi^3 + e^v\beta_y) & \frac{v'}{2} \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & -\frac{v'}{2} & \frac{1}{2}ie^{-v}(mnk\pi^3 + e^v\beta_y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функция ψ удовлетворяет уравнению Шрёдингера $L\psi = 0$, где

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y + 2k\pi^2\big((m-n)\,\mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m\big).$$

Теорема 4.1 доказана.

Заключение

В диссертации установлена связь между собственными функциями некоторых одномерных операторов Шрёдингера и функцией Бейкера–Ахиезера ранга 2. Доказано что для любой фиксированной эллиптической спектральной кривой существуют коммутирующие несамосопряженные операторы порядков 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. Найдены конечнозонные на одном уровне энергии двумерные операторы Шрёдингера, коэффициенты которых выражены через $\wp$-функцию Вейерштрасса. Изучен двумерный оператор Шрёдингера, связанный с семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$, построенных в [18].

Список литературы

[1] Schur, J. *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke.* /J. Schur // Sitzungsber. Berl. Math. Ges. — 1905. — № 4. — P. 2–8.

[2] Burchnall, J. L. *Commutative ordinary differential operators.* / J. L. Burchnall, I. W. Chaundy // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. — 1923. — V. 2, № 21. — P. 420–440.

[3] Кричевер, И. М. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* /И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 15–31.

[4] Кричевер, И. М. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* /И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. — С. 20–31.

[5] Кричевер, И. М. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи матем. наук. — 1980. — Т. 35, № 6. — С. 47–68.

[6] Dixmier, J. *Sur les algebres de Weyl.*/ J. Dixmier // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — № 96. — P. 209–242.

[7] Гриневич, П. Г. *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов.* / П. Г. Гриневич // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. — С. 19 – 24.

[8] Мохов, О. И. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.*/ О. И. Мохов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1989. — Т. 53, № 6. — С. 1291 – 1315.

[9] Mironov, A. E. *Self-adjoint commuting ordinary differential operators.* / A. E. Mironov // Invent. math. — 2014. — V. 197, № 2. — P. 417 – 431.

[10] Mironov, A. E. *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.* / A. E. Mironov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — № 234. — P. 309 – 321.

[11] Mironov, A. E. *Commuting higher rank ordinary differential operators.* / A. E. Mironov // Proc. VI Europ. Congress of Mathematics. — July 2012. — Kraków, Poland — Europ. Math. Soc. Publ. House, 2013. — P. 459 – 473.

[12] Миронов, А. Е. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающих кривой рода 2.* / А. Е. Миронов // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 3. — С. 91 – 94.

[13] Миронов, А. Е. *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два.*/ А. Е. Миронов// Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 5. — С. 103 – 114.

[14] Миронов, А. Е. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2.* / А. Е. Миронов// Сиб. электрон. матем. изв. — 2009. — № 6. — С. 533 – 536.

[15] Давлетшина, В. Н. *О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* /В. Н. Давлетшина // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — № 10. — С. 109 – 112.

[16] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // Успехи матем. наук. — 2015. — Т. 70, № 1. — С. 179 – 180.

[17] Дубровин, Б. А. *Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности.* / Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков // ДАН СССР. — 1976. — Т. 229, № 1(187). — С. 15 – 18.

[18] Миронов, А. Е. *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 89 – 102.

[19] Миронов, А. Е. *Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в* $\mathbb{C}P^2$. / А. Е. Миронов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2004. — № 1. — С. 38 – 46.

[20] Гриневич, П. Г. *О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами.* / П. Г. Гриневич, С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. — С. 19 – 20.

[21] Grunbaum, F. *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six.* / F. Grunbaum // Physica D. — 1988. — V. 31, № 3. — P. 424 – 433.

[22] Latham, G. *Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV.* / G. Latham // Appl. Math. Lett. — 1995. — V. 8, № 6. — P. 73 – 78.

[23] Latham, G. *Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations.*/ G. Latham, E. Previato // Acta Appl. Math. — 1995. — № 39. — P. 405 – 433.

[24] Previato, E. *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves.* / E. Previato, G. Wilson // Compositio Math. — 1992. — V. 81, № 1. — P. 107 – 119.

[25] Dehornoy. P. *Operateurs differentiels et courbes elliptiques*, / P. Dehornoy // Compositio Math. — 1981. — V. 43, № 1. — P. 71–99.

[26] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебры Вейля, отвечающие эллиптической спектральной кривой.* / О. И. Мохов // Международная конференция по алгебре памаяти А.И. Ширшева (1921-1981). — Август 1991. — Барнаул, СССР. — Отчеты о теории колец, алгебр и модулей, 1991. — С. 20–25.

[27] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебры Вейля, порожденных полиномами Чебышева.* / О. И. Мохов // Третья международная конференция по алгебре памяти М.И. Каргополова (1928-1976). — 1993. — Красноярск. — С. 23–28.

[28] Mironov, A. E. *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra.* / M.E. Mironov, A.B. Zheglov // Int. Math. Res. Notices.— 2015 — doi: 10.1093/imrn/rnv218. Published online.

[29] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода.* / О. И. Мохов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 2. — С. 314–316.

[30] Mokhov, O. I. *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients.* / O. I. Mokhov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — № 234. — P. 323 – 336.

[31] Давлетшина, В. Н. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами.* /В. Н. Давлетшина // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 3. — С. 513 – 519.

[32] Давлетшина, В. Н. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* / В.Н. Давлетшина, Э.И. Шамаев // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55, № 4. — С. 744 – 749.

[33] Zuo, D. *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2.* / D. Zuo // SIGMA. — 2012. — V. 8, № 044. — P. 1 – 11.

[34] Hartshorne, R. *Algebraic geometry.* / R. Hartshorne // Springer, New York-Berlin-Heilderberg. — 1977.

[35] Masoero, D. *Poles of Integrale Tritronquee and Anharmonic Oscillators.* / D. Masoero // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — № 43. — P. 1 – 28.

[36] Chudnovsky, D., Chudnovsky, G. *Explicit continued fractions and quantum gravity.* / D. Chudnovsky, G. Chudnovsky // Acta Applicandae Math. — 1994. — № 279. — P. 167 – 185.

[37] Dorey, P., Tateo, R. *Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz and nonlinear integral equations* / P. Dorey, R. Tateo // Nucl. Phys. — 1999. — № B563. — P. 573 – 602.

[38] Новиков, С. П. *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза I.* / С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54 – 66.

[39] Веселов, А. П. *Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы.* / А. П. Веселов, С. П. Новиков // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 784 – 788.

[40] Гриневич, П. Г. *Двумерный оператор Шрёдингера: эволюционные (2+1)-системы и их новые редукции; двумерная иерархия Бюргерса и данные обратной задачи.* / П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков // Успехи матем. наук. — 2010. — Т. 65, № 3(393). — С. 195 – 196.

[41] Кричевер, И. М. *Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения.* / И. М. Кричевер // Успехи матем. наук. —- 1989. — Т. 44, № 2(266). — С. 121 – 184.

[42] Тайманов, И. А. *Об эллиптических решениях нелинейных уравнений.* / И. А. Тайманов // теор. и матем. физика. — 1990 — Т. 84, № 1. — С. 38 – 45.

[43] Чередник, И. В. *Об условиях вещественности в конечнозонном интегрировании.* / И. В. Чередник // ДАН СССР. — 1980. — Т. 252, № 5. — С. 1104 – 1108.

[44] Итс, А. Р. *Оператор Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса.* / А. Р. Итс, В. Б. Матвеев // теор. и матем. физика. — 1975. — Т. 23, № 1. —С. 51 – 68.

[45] Миронов, А. Е. *Пересечения квадрик, момент-уголмногообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения.* / А. Е. Миронов, Т. Е. Панов // Функц. анализ и его прил. — 2013. — Т. 47, № 1. — С. 47 – 61.

[46] Миронов, А. Е. *О гамильтоново минимальных лагранжевых торах в* $\mathbb{C}P^2$. / А. Е. Миронов // Сиб. матем. журн. — 2003. — Т. 44, № 6. — С. 1324 – 1328.

[47] Hui Ma. *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in* $\mathbb{C}P^2$ / Hui Ma // Ann. Global Anal. Geom. — 2005. — V. 27, № 1. — P. 1 – 16.

[48] Hunter, R. *The classification of Hamiltonian stationary Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ by their spectral data.* / R. Hunter, I. McIntosh // Manuscripta Math. — 2011. — V. 135, № 3-4. — P. 437 – 468.

[49] Oh, Y. *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations.* / Y. Oh // Math. Z. — 1993. — V. 212, № 1. — P. 175 – 192.

[50] Penskoi, A. V. *Generalize Lawson Tori and Klein bottles.* / A. V. Penskoi // Journal of Geometric Analysis. — 2015. — V. 25, № 4. — P. 2645 – 2666.

[51] Karpukhin, M. *Spectral Properties of a Family of minimal Tori of Revolution in Five-dimensional Sphere.* / M. Karpukhin // Canad. Math. Bull. — 2015. — V. 58, № 2. — P. 285 – 296.

[52] Ахиезер, Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* / Н. И. Ахиезер // М. Наука, Главная редакция физико-математической литературы. — 1970.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Сапарбаева, Б. Т. *Коммутирующие дифференциальные операторы Кричевера–Новикова с полиномиальными коэффициентами.* / А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева // Сибир-

ский математический журнал. — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 1048–1053.

[2*] Сапарбаева, Б. Т. *О собственных функциях одномерного оператора Шрёдингера с полиномиальным потенциалом.* / А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 461, № 3. — С. 261–262.

[3*] Сапарбаева, Б. Т. *Двумерные конечнозонные операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами.* / Б. Т. Сапарбаева // Математические заметки. — 2014. — Т. 95, № 3. — С. 798–800.

[4*] Сапарбаева, Б. Т. *Двумерные операторы Шрёдингера.* / Б. Т. Сапарбаева // Сборник трудов международной научной-практической конференции, посвященной научно-педагогической деятельности академика А.Д. Тайманова «Современная математика: проблемы и приложения»: Математика / Кызылординский гос. ун-т. имени Коркыт Ата, Кызылорда. — 2013. — С. 253–256.

[5*] Сапарбаева, Б. Т. *Двумерные конечнозонные операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами.* [Электронный ресурс] / Б. Т. Сапарбаева // Тезисы Международной конференции «Геометрия и анализ на метрических структурах», Новоси-

бирск. — 2013. — 1 с. — Режим доступа: http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2013/12/Saparbaeva.pdf

[6*] Saparbayeva, B.T. *Finite-gap 2D-Schrödinger operators with elliptic coefficient* [Электронный ресурс] / Bayan Saparbayeva // Международная молодежная конференция «Геометрия и Управление», Москва, 14–18 апреля, 2014: Тезисы.— Москва: Математический институт им. В. А. Стеклова, Российской Академии Наук — 2014. — С.40 – 41. — Режим доступа: http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf

[7*] Saparbayeva, B.T. *Eigenfunctions of one-dimensional Schrödinger operators* [Электронный ресурс] / Bayan T. Saparbayeva, Andrey E. Mironov // Международная конференция «Метрические структуры и управляемые системы», Новосибирск, 17—21 декабря, 2015: Тезисы. — Новосибирск: Институ Математики им. С.Л. Соболева, Российской Академии Наук. — 2015. — С. 32 – 34. — Режим доступа: http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2015/09/abstracts.pdf

[8*] Saparbayeva, B.T. *Krichever–Novikov's operators with polynomial coefficients* [Электронный ресурс] / Bayan Saparbayeva, Andrey Mironov, Alexander Zheglov // Конференция «Динамика в Сибири», Новосибирск. -— 2016. — 1 с. — Режим

доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/ds/2016/pdfs/saparbayeva.pdf

[9*] Сапарбаева, Б. Т. *Оператор Шрёдингера, отвечающий семейству гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в* $\mathbb{C}P^2$. [Электронный ресурс] / Баян Сапарбаева // «Дни геометрии в Новосибирске— 2016»: Тезисы международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2016.–108 с. Новосибирск. — 2016. — С. 104. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2016/abstracts/ProceedingsEXT.pdf