Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 2

МАТЕМАТИКА

С. В. НАГАЕВ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VII 1962)

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс функций распределения $G(x)$, абсолютно непрерывных для $x > B$ (B зависит от $G(x)$) с плотностью, которую можно представить в виде $G'(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xu}\varphi(u)\,du$, где $\varphi(u) \geqslant 0$ интегрируема, имеет вторую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера и $\varphi'(0) = 0$. Очевидно, распределения из класса $\mathfrak{G}$ не удовлетворяют известному условию Крамера ([1]).

Т е о р е м а. *Пусть ξ_i — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$, причем* $M\xi_i = 0$, *и $F_n(x)$ — функция распределения суммы $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_3$. Если существует $G(x) \in \mathfrak{G}$ такая, что для любых $b > a > B$*

$$\operatorname*{Var}_{a \leqslant x \leqslant b}[F(x) - G(x)] \leqslant \int\limits_a^b \frac{\psi(x)}{x^2} G'(x)\,dx, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ интегрируема на (B, ∞), то

$$1 - F_n(x) = n(1 - F(x))(1 + O(1))\ ^{*} \tag{2}$$

для x таких, что

$$nu_x^2 = O(1), \tag{3}$$

где u_x — решение уравнения $u_x e^{xu_x}(1 - G(x)) = 1$.

*В частности, если $\varphi(u) \sim u^\alpha$, $\alpha > 2$, при $u \to 0$**, то (2) имеет место для $x > \sqrt{n}\ln n\rho(n)$, где $\rho(n)$ — произвольная функция такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\rho(n) = \infty.$$

Недавно В. В. Петров ([4]) получил при $0 \leqslant x \leqslant n^\alpha/\rho(n)$, где $\alpha < 1/2$, асимптотическое выражение для $1 - F_n(x)$ того же типа, что и в работе Крамера ([1]), в предположении, что

$$M \exp|\xi_1|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty. \tag{4}$$

Если наряду с (4) выполняется и условие (2), то несложные вычисления показывают, что x, удовлетворяющие (3), возрастают быстрее, чем n^α.

Вопрос о больших уклонениях для промежуточных значений x остается открытым.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР

Поступило
7 VII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. C r a m e r. Actuel sci. et ind., № 736 (1938). [2] С. В. Н а г а е в, Вестн. ЛГУ, № 1 (1962). [3] Yu. V. L i n n i k, Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathem. Statistics and Probability, 2, 1961. [4] В. В. П е т р о в, ДАН, 138, № 4 (1961).

* Аналогичное представление получено в ([3]) при условии, что

$$1 - F(x) = \frac{A_a}{x^a} + \frac{A_{a+1}}{x^{a+1}} + \ldots + \frac{A_{4a+5}}{x^{4a+5}} + O\left(\frac{1}{x^{4a+5+\varepsilon}}\right),$$

где $a \geqslant 3$ — целое число, A_i — постоянные.

** При таком же качественно условии в (2) были доказаны локальные предельные теоремы.