Так как $H(X(\varphi_\alpha)) = O(\alpha)$, то

$$\int\limits_{C_{\alpha n}} F_n(dX) \leqslant \int\limits_{\substack{|\varphi| < \frac{\pi}{2} \\ r > n r_0(\varphi)}} F_n(dX) = O\left(e^{-n\alpha c}\right) =$$

$$= o\left(\left[1 - \Phi(x)\right] e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\right). \tag{28}$$

Из соотношений (27) и (28) следует (9). Утверждение (10) доказывается гораздо проще, поскольку в этом случае α фиксировано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей, УМН, 1944, т. X, стр. 166–173.
2. Петров В. В. Обобщение предельной теоремы Крамера, УМН, 1954, т. 9, вып. 4.
3. Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. „Теория вероятностей и ее применения", 1961, т .VI, вып. 2, стр. 145–162; 1962, т. VII, вып. 2, стр. 121–134.
4. Нагаев А. В. Большие уклонения для одного класса распределений, Сб. „Предельные теоремы теории вероятностей", Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1963.
5. Маматов М., Халиков М. К. О глобальных предельных теоремах, „Изв. АН УзССР", 1964, № 1, стр. 13–21.
6. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Ю. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.

С. В. НАГАЕВ, Р. МУХАМЕДХАНОВА

(*Ташкент*)

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц.

Пусть $P_m(n)$ есть вероятность того, что одна частица за время n превратится в m частиц. Положим $p_m = P_m(1)$. Введем производящие функции

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i, \qquad F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(n) x^i.$$

Положим $A = F'(1)$, $B = F''(1)$, $C = F'''(1)$. Пусть μ_n — число частиц в момент времени n, если процесс начался в начальный момент времени с одной частицы;

$$Q_n(x) = 1 - F_n(x); \quad Q_n = 1 - P_0(n);$$

$$S_n(y) = P\left\{\frac{\mu_n}{M^*(n)} < y/\mu_n > 0\right\},$$

где

$$M^*(n) = M(\mu_n / \mu_n > 0).$$

Следуя Б. А. Севастьянову [4], обозначим через $K(B_0, C_0)$ класс производящих функций, удовлетворяющих условиям

$$B = F''(1) \geqslant B_0, \quad C = F'''(1) \leqslant C_0,$$

$$\text{здесь } 0 < B_0 < \infty, \quad 0 \leqslant C_0 < \infty.$$

Теорема 1.

$$Q_n(x) = g_n(A; x)\left[1 + \eta_n(x)\right], \tag{1.1}$$

где

$$g_n(A;x)=\frac{A^n(1-x)}{1+\frac{B}{2}\frac{1-A^n}{1-A}(1-x)},$$

$\eta_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, $A\to 1$ равномерно по всем $F(x)\in K(B_0, C_0)$ и $|x|\leqslant 1$.

Аналогичная теорема была доказана Б. А. Севастьяновым [4] для непрерывного времени.

Следствие. При $n\to\infty$, $A\to 1$ равномерно для всех $F(x)\in K(B_0, C_0)$

$$Q_n\sim\frac{A^n}{1+\frac{B}{2}\frac{1-A^n}{1-A}}.$$

Теорема 2. При $n\to\infty$, $A\to 1$

$$\max_y\left|S_n(y)-S(y)\right|\to 0 \tag{1.2}$$

равномерно по всем $F(x)\in K(B_0, C_0)$; здесь

$$S(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-y}, & y\geqslant 0.\end{cases}$$

Доказательство этой теоремы основывается на представлении (1.1) и проводится совершенно аналогично доказательству теоремы (2) в работе [4].

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. Если $n\to\infty$ и $A\to 1$, то $Q_n\to 0$ равномерно относительно $F(x)\in K(B_0, C_0)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} i(i-1)p_i<\frac{1}{N-1}C.$$

Выберем N так, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} i(i-1)p_i<\frac{B_0}{2}\text{ для всех } F(x)\in K(B_0, C_0).$$

Тогда

$$\sum_{i=2}^{N} i(i-1)p_i > \frac{B_0}{2},$$

откуда следует

$$\sum_{i=2}^{N} p_i > \frac{B_0}{2N^2}. \tag{2.1}$$

Пусть

$$A = p_1 + \sum_{i=2}^{\infty} ip_i < 1 + \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i < \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} ip_i < \frac{1+\varepsilon-p_1}{2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \frac{p_1+1+\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Поскольку в силу (2.1) имеем $p_1 < 1 - \frac{B_0}{2N^2}$, из неравенства (2.2) вытекает

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \frac{2+\varepsilon-\frac{B_0}{2N^2}}{2}. \tag{2.3}$$

Выбирая $\varepsilon < \frac{B_0}{4N^2}$, устанавливаем, что

$$p_0 > \frac{B}{8N^2} \tag{2.4}$$

равномерно по всем $F(x) \in K(B_0, C_0)$.

Как известно (см., например, работу [1]),

$$F_k(x) = F(F_{k-1}(x)), \tag{2.5}$$

поэтому

$$P_0(k) = F_k(0) = 1 - A[1 - P_0(k-1)] + \\ + \frac{\overline{B}}{2}[1 - P_0(k-1)]^2, \tag{2.6}$$

где

$$\overline{B} = F''(\Theta), \quad P_0(k-1) \leqslant \Theta < 1.$$

Очевидно, что $P_0(n) > p_0$; следовательно,

$$\overline{B} > F''(p_0) > p_0^N \frac{B}{2}.$$

Соотношение (2.6) можно переписать в следующей форме:

$$Q_k = AQ_{k-1} - \frac{\overline{B}}{2} Q_{k-1}^2. \tag{2.7}$$

Полагая $\frac{1}{Q_k} = b_k$, получаем

$$b_k = \frac{1}{A} b_{k-1} + \frac{1}{A} \frac{\overline{B}}{2} \frac{b_k}{b_{k-1}}. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) имеем

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} > \frac{1}{2} \quad \text{при } A < 2,$$

поэтому

$$b_k > \frac{1}{A} b_{k-1} + \frac{1}{A} d,$$

где

$$d = p_0^N \frac{B}{4}$$

и, следовательно,

$$b_n > \frac{b_0}{A^n} + d \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A^k}. \tag{2.9}$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{A^k} \to \infty$ при $A \to 1$ и $n \to \infty$, из (2.9) следует утверждение леммы.

Лемма 2. При $n \to \infty$, $A \to 1$ и любых $|x| \leqslant 1$ $Q_n(x) \to 0$ равномерно относительно $F(x) \in K(B_0, C_0)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|1 - F_n(x)| \leqslant |1 - F_n(0)| + |F_n(0) - F_n(x)|.$$

Далее

$$|F_n(0) - F_n(x)| = |P_1(n)x + P_2(n)x^2 + \cdots + P_k(n)x^k + \\ + \cdots| \leqslant P_1(n) + P_2(n) + \cdots + P_k(n) + \cdots = Q_n.$$

Таким образом,

$$|1-F_n(x)|\leqslant 2Q_n.$$

Для завершения доказательства достаточно применить лемму 1. Из равенства (2.5), используя разложение Тэйлора, получаем

$$Q_{n+1}(x)=AQ_n(x)-\frac{B}{2}Q_n^2(x)+\overline{C}(x)Q_n^3(x), \qquad (2.10)$$

где

$$|\overline{C}(x)|<\frac{C}{6}.$$

Деля обе части равенства (2.10) на $Q_n(x)\cdot Q_{n+1}(x)$ и обозначая $\frac{1}{Q_n(x)}$ через $b_n(x)$, определяем

$$b_{n+1}(x)=\frac{1}{A}b_n(x)+\frac{B}{2A}\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)}+\frac{\overline{C}(x)}{A}\frac{b_{n+1}(x)}{b_n^2(x)}. \qquad (2.11)$$

Отсюда следует

$$\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)}=\frac{1}{A}+\frac{B}{2A}\frac{b_{n+1}(x)}{b_n^2(x)}+\frac{\overline{C}(x)}{A}\frac{b_{n+1}(x)}{b_n^3(x)}. \qquad (2.12)$$

Подставив в (2.11) вместо $\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)}$ выражение (2.12), будем иметь

$$b_n(x)=\frac{1}{A^{n-1}[1-F(x)]}+\frac{B}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{A^k}+$$

$$+\Theta(x)\sum_{k=2}^{n}\frac{b_k(x)}{b_{k-1}^2(x)A^{n-k+1}}+$$

$$+\frac{\overline{C}(x)B}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{b_k(x)}{b_{k-1}^3(x)A^{n-k+2}}, \qquad (2.13)$$

где

$$\Theta(x)=\frac{B^2}{4A}+\overline{C}(x).$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{1}{A^{n-1}[1-F(x)]}-\frac{1}{A^n(1-x)}\right|<\frac{B|1-x|}{A^n|1-F(x)|}<$$

$$< \frac{B}{A^n\,|1-F(0)|} < \frac{8C_0^{\frac{2}{3}}}{A^n B_0}\left(\frac{C_0}{B_0}+2\right)^2. \qquad (2.14)$$

Далее

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-x} = \operatorname{Re}\frac{1-\bar{x}}{1-|x|^2} \geqslant 0$$

для любого $|x| \leqslant 1$, поэтому

$$\left|\frac{1}{A^n(1-x)} + \frac{B}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{A^k}\right| \geqslant \frac{B}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{A^k}. \qquad (2.15)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. При $A \to 1$, $n \to \infty$ и любом $|x| \leqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k(x)}{A^{n-k}} = O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A^k}\right) \qquad (2.16)$$

равномерно по всем $F(x) \in K(B_0, C_0)$.

Доказательство. Пусть $L = L(A)$ — последовательность индексов такая, что $A^L \to 1, L \to \infty, \frac{n}{L} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $A \to 1$.

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n-L-1}\frac{Q_{n-k}(x)}{A^k} < \max_{L<i<n} Q_i(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A^k}, \qquad (2.17)$$

$$\left|\sum_{k=n-L}^{n}\frac{Q_{n-k}(x)}{A^k}\right| < \sum_{k=n-L}^{n}\frac{1}{A^k}. \qquad (2.18)$$

Далее

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{A^k}}{\sum\limits_{k=n-L}^{n}\frac{1}{A^k}} = \frac{A^n-1}{A^L-1} = \frac{(A^L)^{n/L}-1}{A^L-1} = \sum_{k=1}^{n/L}(A^L)^k\;, \qquad (2.19)$$

но

$$\lim_{n\to\infty,\ A\to 1} \sum_{k=1}^{n/L} (A^L)^k = \infty. \tag{2.20}$$

Из соотношений (2.17) — (2.20) и леммы 2 следует утверждение леммы 3.

Вернемся теперь к равенству (2.13).

Вследствие (2.12) при $n\to\infty$ и $A\to 1$

$$\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \to 1 \tag{2.21}$$

равномерно относительно $F(x)\in K(B_0, C_0)$. Поэтому из (2.13) в силу неравенств (2.14), (2.15) и леммы 3 следует

$$b_n(x) = \left[\frac{1}{A^n(1-x)} + \frac{B}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{A^k}\right][1+\varepsilon_n(x)], \tag{2.22}$$

где $\varepsilon_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, $A\to 1$ равномерно относительно $F(x)\in K(B_0, C_0)$, а это, очевидно, равносильно утверждению теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. К решению одной биологической задачи, „Изв. НИИ математики и механики Томского университета", 1938, 2, 1, стр. 7—12.
2. Яглом А. М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР, 1947, т. 56, № 8, стр. 795—798.
3. Harris T. E. Branching Processes, AMS, 19 (1948), 474—494.
4. Севастьянов Б. А. Переходные явления в ветвящихся случайных процессах, „Теория вероятностей и ее применения", 1959, т. IV, вып. 2, стр. 121—135.